

01;03

О локализации двумерных нелинейных внутренних волн в двухслойной жидкости

© А.В. Порубов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: porubov@math.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 27 сентября 2004 г.)

Показано, что двумерные нелинейные внутренние волны в двухслойной жидкости могут быть описаны при помощи двумерного обобщения уравнения Гарднера. В отличие от использовавшейся ранее модели уравнения Кадомцева–Петвиашвили теперь неустойчивость плоской внутренней уединенной волны оказывается возможной, что приводит к формированию волны, локализованной во всех направлениях. Найдены соотношения между толщинами и плотностями слоев, при которых реализуется неустойчивость.

Введение

Описание нелинейных волновых процессов в двухслойной жидкости имеет важные приложения, прежде всего в океанологии. Особый интерес представляет изучение локализованных или уединенных волн. Такие волны обычно возникают в результате баланса между нелинейностью и дисперсией. Возникнув из начального возмущения, они обладают способностью распространяться с сохранением формы и скорости. Будучи волнами конечной, порой значительной амплитуды, они таким образом могут переносить значительную энергию на большие расстояния. Процесс локализации начального возмущения может сопровождаться ростом амплитуды волны. Помимо локализации вдоль направления распространения волны, приводящей к образованию плоской уединенной волны, возможна локализация и в поперечном направлении. В последнем случае следует ожидать большего роста амплитуды, чем при образовании плоской волны.

Известно, что решения в виде уединенных волн у разных уравнений обладают различными свойствами. Тип модельного уравнения для поверхностных и внутренних волн существенно зависит от соотношения между толщинами и плотностями слоев жидкостей [1]. В частности, когда эти толщины соизмеримы, в длинноволновом пределе возникает уравнение Кортевега–де-Вриза (КдВ) [1–5] в одномерной постановке. В то же время результаты наблюдений внутренних волн часто указывают на недостаточность такого описания, поэтому в [3–5] было предложено учитывать кубическую нелинейность. Тогда в качестве модельных уравнений возникают либо модифицированное уравнение КдВ, либо уравнение Гарднера, содержащее как кубическую, так и квадратичную нелинейности.

Образование двумерных локализованных волн постоянной формы может быть достигнуто как за счет взаимодействия движущихся под углом плоских волн, так и за счет баланса между нелинейностью, дисперсией и дифракцией. В частности, для наиболее извест-

ного модельного двумерного уравнения — уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) первая возможность подробно исследована аналитически и численно, например, в [6,7], а вторая может быть описана при помощи анализа поперечной неустойчивости [8,9] или точного решения в виде „лампа“ [1,10]. Процесс двумерной локализации волны для уравнения КП сопровождается значительным ростом амплитуды, это установлено аналитически для трансформации начальной плоской уединенной волны [11]. Еще больший рост амплитуды достигается при эволюции начального локализованного возмущения в ламп уравнения КП [12].

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили для внутренних волн уже было ранее выведено (см., например, [1,2]). Представляется интересным исследовать возможность поперечной неустойчивости плоской уединенной внутренней волны в рамках модели уравнения Гарднера. В данной работе приводится вывод двумерного обобщения уравнения Гарднера для внутренних волн в двухслойной жидкости. Затем проводится исследование поперечной неустойчивости уединенной волны уравнения Гарднера, устанавливается связь неустойчивости с толщинами и плотностями слоев и знаком амплитуды уединенной волны.

Двумерное обобщение уравнения Гарднера

Рассмотрим систему из двух горизонтальных слоев несмешивающихся идеальных жидкостей: нижней постоянной толщины H , а верхней — H' . Для простоты верхняя граница верхнего слоя не возмущена, мы также полагаем плотности жидкостей постоянными. Учет возмущения верхней границы рассматривался ранее в [3], а различные виды стратификации — в [5]. Поместим декартову систему координат таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с невозмущенной поверхностью раздела. Обозначим постоянную плотность нижней жидкости ρ , а компоненты вектора скорости вдоль

осей x, y, z за $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$ соответственно. Аналогично для верхней жидкости вводим $\rho', u'(x, y, z, t), v'(x, y, z, t)$ и $w'(x, y, z, t)$. Обозначим через t время; $\eta(x, y, t)$ — возмущение поверхности раздела. Тогда нижняя жидкость будет занимать область $-H < z < \eta$ а верхняя — $\eta < z < H'$.

Представляется удобным перейти в уравнениях и граничных условиях к потенциалу скоростей $u = \Phi_x, v = \Phi_y$ и $w = \Phi_z, u' = \Phi'_x, v' = \Phi'_y$ и $w' = \Phi'_z$. В результате имеем

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad -H < z < \eta, \quad (1)$$

$$\Phi'_{xx} + \Phi'_{yy} + \Phi'_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad \eta < z < H', \quad (2)$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \quad (3)$$

$$\Phi'_z = 0 \quad \text{при} \quad z = H', \quad (4)$$

а при $z = \eta$

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_t + 1/2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + g\eta) \\ = \rho'(\Phi'_t + 1/2(\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z) + g\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y = \Phi_z, \quad (6)$$

$$\eta_t + \Phi'_x \eta_x + \Phi'_y \eta_y = \Phi'_z. \quad (7)$$

Для вывода модельного уравнения необходимо ввести ограничения. Мы будем рассматривать только длинные волны характерного размера L , малой, но конечной амплитуды A . С этой целью введем следующие масштабы для переменных задачи: L — для X, Y — для y, H — для $z, L/\sqrt{gH}$ — для t, A — для η и $AL\sqrt{gH}/H$ — для Φ, Φ' . Обозначим $\sigma = H'/H, \Delta = \rho'/\rho$. Введем малый параметр задачи $\varepsilon (\varepsilon = H/L)$ и предположим, что изменения в направлении y слабее, чем в направлении $x, Y = L/\varepsilon$. Тогда решения обезразмеренных уравнений Лапласа (1), (2), удовлетворяющие граничным условиям (3), (4), имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi = \phi(x, y, t) - \varepsilon^2 \frac{(z+1)^2}{2} \phi_{xx} \\ + \varepsilon^4 \left(\frac{(z+1)^4}{24} \phi_{xxxx} - \frac{(z+1)^2}{2} \phi_{yy} \right) + O(\varepsilon^6), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi' = \phi'(x, y, t) - \varepsilon^2 \frac{(z-\sigma)^2}{2} \phi'_{xx} \\ + \varepsilon^4 \left(\frac{(z-\sigma)^4}{24} \phi'_{xxxx} - \frac{(z-\sigma)^2}{2} \phi'_{yy} \right) + O(\varepsilon^6), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\phi(x, y, t), \phi'(x, y, t)$ — новые неизвестные функции.

Рассмотрим вначале случай $A/H = O(\varepsilon^2)$. Для вывода модельного уравнения положим, что решение задачи зависит от фазовой переменной $\theta = x - vt, y$ и медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$. Подставляя (8), (9) в обезразмеренные граничные условия (5)–(7), получаем, что фазовая скорость v определяется как

$$v^2 = \frac{\sigma(1-\Delta)}{\sigma+\Delta}, \quad (10)$$

а возмущение границы раздела η описывается уравнением Кадомцева–Петвиашвили [8]

$$(\eta_\tau + a^* \eta_\theta^2 + b \eta_{\theta\theta\theta})_\theta + d \eta_{yy} = 0, \quad (11)$$

где

$$a^* = \frac{3v(\sigma^2 - \Delta)}{4\sigma(\sigma + \Delta)}, \quad b = \frac{\sigma v(1 + \sigma\Delta)}{6(\sigma + \Delta)}, \quad d = \frac{v}{2}.$$

Нетрудно заметить, что $b > 0, d > 0$, а коэффициент при квадратичной нелинейности может быть любого знака. В частности, возможно такое соотношение толщин слоев $\sigma = \sigma^*$,

$$\sigma^* = \sqrt{\Delta}, \quad (12)$$

при котором $a^* = 0$. В этом случае баланса нелинейности и дисперсии, приводящего к локализации волны, не может быть при принятом соотношении между A/H и ε . Поэтому изменим это соотношение в исходных обезразмеренных уравнениях на $A/H = O(\varepsilon)$, кроме того, положим $v = v^* + \varepsilon v_1 + \dots, \sigma = \sigma^* + \varepsilon \sigma_1 + \dots$. Решение задачи в нулевом приближении приводит к уравнению (10) для v^* , которое с учетом (12) принимает вид

$$v^{*2} = 1 - \sigma^*. \quad (13)$$

Для поправки к скорости получаем в следующем приближении:

$$v_1 = \frac{\sigma_1 v^*}{2(\sigma^* + 1)}.$$

Квадратичная и кубическая нелинейности оказываются одного порядка малости, что позволяет получить из условия разрешимости следующего приближения двумерное обобщение уравнения Гарднера для возмущения поверхности жидкости η ,

$$(\eta_\tau + a \eta_\theta^2 + c \eta_\theta^3 + b \eta_{\theta\theta\theta})_\theta + d \eta_{yy} = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a = \frac{3v^* \sigma_1}{2\sigma^*(\sigma^* + 1)}, \quad b = \frac{v^*(1 + \sigma^* + \sigma^{*2})}{6\sigma^*}, \\ c = -\frac{3v^*}{\sigma^*}, \quad d = \frac{v^*}{2}. \end{aligned}$$

Снова получаем $b > 0, d > 0$, коэффициент при кубической нелинейности всегда отрицателен, $c < 0$, а знак a определяется знаком σ_1 .

Устойчивость плоской внутренней волны

При $b > 0, d > 0$ уравнение Кадомцева–Петвиашвили обладает устойчивым решением в виде плоской уединенной волны, в то время как решение в виде двумерной локализованной волны „лампа“ может быть при $b > 0, d < 0$ или $b < 0, d > 0$ [1,8].

При $a = 0$ ($\sigma_1 = 0$) уравнение (14) переходит в однородном приближении в модифицированное уравнение Кортевега-де-Вриза для функции η , которое при имеющемся соотношении между знаками коэффициентов при кубическом нелинейном и дисперсионном линейном слагаемых не имеет решения в виде локализованной волны, затухающей на бесконечности [1–3].

Известное односолитонное решение уравнения Гарднера имеет вид [3,13]

$$\eta_0 = \frac{3bk^2}{a(B_1 \operatorname{ch}(k\xi) + 1)}, \quad (15)$$

где

$$B_1 = \sqrt{1 + \frac{9bck^2}{2a^2}}, \quad \xi = \theta - bk^2\tau.$$

Особенностью решения (15) является его стремление к протяженной корытообразной форме при $k \rightarrow \sqrt{-2a^2/(9bc)}$. При этом амплитуда волны стремится к предельному значению, равному $-2a/3c$ (рис. 1). Очевидно, что такой режим реализуется при имеющем место $bc < 0$. В двумерной постановке (15) описывает распространение плоской волны-впадины (рис. 2). Важно знать, является ли такая волна устойчивой к поперечным возмущениям. Предположим решение уравнения (14) в виде

$$\eta(\theta, \tau, y) = \eta_0 + \delta w(\theta, \tau) \operatorname{Exp}(\lambda\tau + i\mu y),$$

где $\delta \ll 1$.

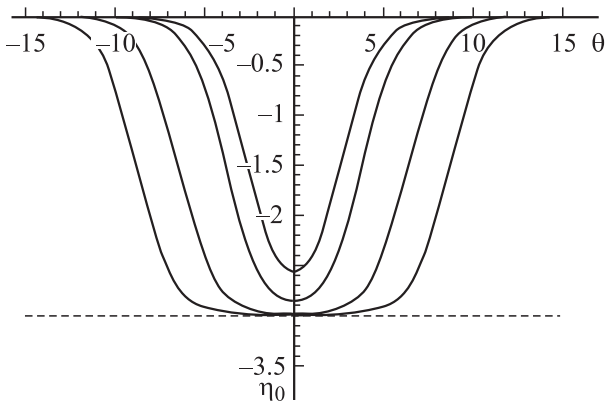


Рис. 1. Изменение формы уединенной волны уравнения Гарднера при $k \rightarrow \sqrt{-2a^2/(9bc)}$ в проекции на плоскость $y = 0$. Штриховая линия — предельная амплитуда.

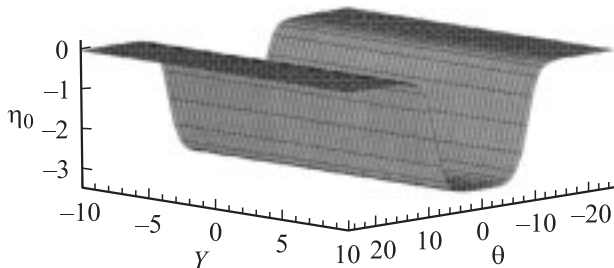


Рис. 2. Уединенная плоская волна-впадина уравнения Гарднера.

Тогда для поправки w имеем линейное уравнение

$$(w_\tau + 2a(\eta_0 w)_\theta + 3c(\eta_0^2 w)_\theta + bw_{\theta\theta\theta})_\theta + \lambda w_\theta - p^2 dw = 0, \quad (16)$$

где асимптотическое решение для случая малых p (слабой поперечной модуляции) ищется в виде

$$w = w_0 + pw_1 + p^2 w_2 + \dots, \quad \lambda = p\lambda_1 + p^2 \lambda_2 + \dots$$

Подставляя эти степенные ряды в уравнение (16) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях p , получаем $w_0 = \eta_{0,\theta}$,

$$w_1 = \frac{3\lambda_1(B_1^2 k \xi \operatorname{sh}(k\xi) - (1 + B_1^2) \operatorname{ch}(k\xi) - 2B_1)}{2aB_1(1 + B_1 \operatorname{ch}(k\xi))^2}.$$

Из условия разрешимости в приближении p^2 следует уравнение для λ_1

$$\lambda_1^2 = \frac{a^2 dB_1^2}{2c(1 - B_1^2)} F,$$

где

$$F = 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - B_1^2}} \operatorname{arcth} \sqrt{(1 - B_1)/(1 + B_1)}.$$

Нетрудно убедиться, что $F < 0$ для допустимых B_1 , $0 < B_1 < 1$. Поэтому неустойчивость определяется знаком c , при имеющемся всегда отрицательном знаке имеем неустойчивый случай, при положительном — устойчивый.

Заключение

Таким образом, главным результатом работы являются вывод двумерного обобщения уравнения Гарднера для внутренних волн в двухслойной жидкости и определение явной зависимости поперечной неустойчивости плоской уединенной волны от коэффициентов уравнения. В отличие от уравнения КП теперь неустойчивость зависит от коэффициента при кубическом нелинейном слагаемом. В свою очередь знак коэффициента a определяется знаком σ_1 или соотношением толщин и плотностей слоев, как следует из определения σ и σ^* ,

$$\varepsilon\sigma_1 = \frac{H'}{H} - \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}.$$

Кроме того, знак a определяет знак амплитуды уединенной волны (15), при $a < 0$ неустойчивыми являются только волны-впадины. Учет поверхностного натяжения на границе раздела может изменить знак коэффициента b на отрицательный в уравнении КП (11). Тогда при $a^* > 0$ неустойчивыми окажутся впадины, а при $a^* < 0$ — солитоны возвышения.

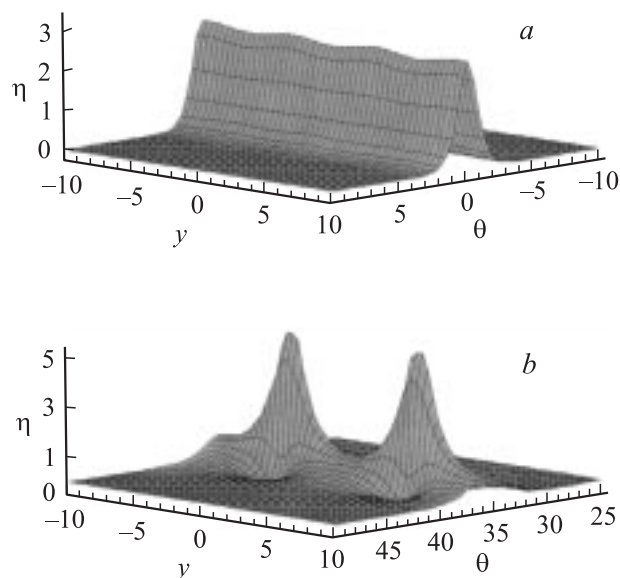


Рис. 3. Преобразование плоской уединенной волны уравнения КП (а) в последовательность двумерных локализованных волн (б).

В неустойчивом случае можно ожидать формирования двумерных локализованных впадин подобно эволюции плоской волны возвышения уравнения Кадомцева–Петвиашвили (11) при $b < 0$, $a^* < 0$ [11]. Начальная и конечная фазы этого решения представлены на рис. 3. Важно отметить, что этот процесс сопровождается ростом амплитуды волны. Что касается формирования самой плоской волны, то для уравнения Гарднера в одномерном случае ранее проводилось численное исследование формирования уединенной волны (15) из начального возмущения произвольного вида [13]. Оказалось, что в отличие от обычных уединенных волн здесь появление волны (15) возможно лишь из достаточно широкого начального импульса, при этом может возникнуть только одна такая волна, а не последовательность солитонов разной амплитуды, как это имеет место, например, для уравнения Кортевега-де-Вриза.

Наконец, отметим, что мы ограничились рассмотрением невозмущенной свободной поверхности верхнего слоя и постоянными плотностями. Учет возмущения поверхности и стратификации может быть сделан путем обобщения на двумерный случай результатов работ [3,5].

Список литературы

- [1] Абловитц М., Сегюр Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
- [2] Djordjevic V.D., Redekopp L.G. // J. Phys. Oceanogr. 1978. Vol. 8. P. 1016–1024.
- [3] Kakutani T., Yamasaki N. // J. Phys. Soc. Jap. 1978. Vol. 45. P. 674–679.
- [4] Miles J. // Tellus. 1979. Vol. 3.1. P. 456–462.
- [5] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. // Nonlinear Processes in Geophysics. 1997. Vol. 4. P. 237–250.

- [6] Peterson P. et al. // Nonlinear Processes in Geophysics. 2003. Vol. 10. P. 1–8.
- [7] Tsuji H., Oikawa M. // J. Phys. Soc. Jap. 1993. Vol. 62. P. 3881–3892.
- [8] Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. // ДАН СССР. 1970. № 192. С. 753–756.
- [9] Alexander J.C., Pego R.L., Sachs R.L. // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 226. P. 187–192.
- [10] Satsuma J., Ablowitz M.J. // J. Math. Phys. 1979. Vol. 20. P. 1496–1503.
- [11] Пелиновский Д.Е., Степанянц Ю.А. // ЖЭТФ. 1993. Vol. 104. P. 3387–3400.
- [12] Minzoni A.A., Smith N.F. // Wave Motion. 1996. Vol. 24. P. 291–305.
- [13] Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н. // ЖЭТФ. 1999. Vol. 116. P. 318–335.