01

О простейших адекватных токах эллипсоидального тела

© Р.З. Муратов, В.Л. Шкуратник

Московский государственный горный университет,
117935 Москва, Россия
e-mail: rodeszmu@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 9 марта 2004 г.)

Дано решение задачи Я.И. Френкеля о нахождении по заданному в объеме эллипсоидальной области пространства простейшему стационарному току адекватного ему (т.е. создающему такое же внешнее магнитное поле) поверхностного тока на границе области. Попутно в рамках этой частной задачи найдены мультипольные представления псевдоскалярных магнитных потенциалов объемного и поверхностного токов. Показано, что эти представления совершенно аналогичны соответствующим мультипольным представлениям скалярных потенциалов эллипсоида, обусловленных объемными или поверхностными распределениями скалярных источников (зарядов или масс).

Введение

Данная работа посвящена одной из допускающих точное аналитическое рассмотрение задач о магнитном поле эллипсоида.

Исторически первым было решение краевой задачи макроскопической магнитостатики об однородном эллипсоиде (с $\mu \neq 1$) в однородном внешнем магнитном поле. Это принадлежащее Пуассону и, по оценке Максвелла, „весьма изобретательное“ решение вошло в знаменитый „Трактат“ [1]. Эллипсоидальное тело в работе Пуассона представляло собой диэлектрический или проводящий (в отсутствие токов проводимости) неферромагнитный магнетик. В этой ситуации (см., например, [2]) система уравнений магнитостатики и граничных условий к ним формально совпадает с системой уравнений, определяющих электростатическое поле в диэлектриках (в отсутствие свободных зарядов), отличаясь от них лишь заменой

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}. \tag{1}$$

Сказанное, в частности, означает, что при рассмотрении подобных магнитостатических задач правомерны использование во всем пространстве псевдоскалярного магнитного потенциала и интерпретация, опирающаяся на представление о связанных „магнитных зарядах“ [3]. Имея в виду замену (1), отметим, что обобщение результатов Пуассона можно найти в статьях [4,5], посвященных слоисто-неоднородному диэлектрическому эллипсоиду в неоднородном внешнем электростатическом поле.

В предлагаемой работе рассматривается следующая задача. В объеме эллипсоида, ограниченном заданной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

задано простейшее распределение тока, который характеризуется плотностью

$$j_x = 0, \quad j_y = B_{001}\,\frac{z}{c}, \quad j_z = C_{010}\,\frac{y}{b}, \tag{3}$$

линейно зависящей от координат. Требуется на поверхности (2) найти плотность $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ тока, адекватного[1] (эквивалентного) объемному току (3).

Поскольку в рассматриваемой задаче источники магнитного поля (токи) распределены непосредственно в толще эллипсоида, то (в отличие от задач пуассонова типа) введение псевдоскалярного потенциала во внутренней области теперь исключено. Непригоден теперь и эффективный для шара [8] способ аналитического решения, опирающийся на использование мультипольного разложения потенциала, ибо в случае эллипсоида число отличных от нуля магнитных мультипольных моментов всегда бесконечно. Эти обстоятельства принуждают при решении задачи вычислять предварительно векторные потенциалы, магнитные поля и находить псевдоскалярные потенциалы, обусловленные заданным и искомым токами. Однако, как мы увидим, результаты этого довольно громоздкого решения обнаруживают признаки существования такой же фундаментальной связи между магнитостатическими задачами об эллипсоиде (в присутствии и в отсутствие токов в нем), каковая была установлена для него в случае аналогичных электростатических задач (с зарядами и без них).

1. Потенциалы и магнитные мультиполи объемного тока

Всякий постоянный объемный ток должен удовлетворять условию стационарности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{4}$$

и краевому условию

$$j_n\big|_S = 0 \tag{5}$$

[1] Разновидность задач об адекватных (т.е. создающих одинаковые внешние поля) источниках скалярной (заряды) или векторной (токи) природы была выдвинута Я.И. Френкелем [6, с. 103; 7, с. 524]. Для концентрических шаровых областей пространства решение задачи об адекватных токах дано в [8].

на границе S эллипсоида. Последнее в рассматриваемом случае эллипсоидальной границы (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{p}\,\langle n_x j_x\rangle\Big|_S = \left\langle \frac{x}{a^2}\, j_x \right\rangle\Big|_S = 0. \tag{6}$$

Здесь $p = \langle x^2/a^4\rangle^{-1/2}$ — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, касательную к его поверхности в точке, характеризуемой единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, а угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ всюду обозначается сумма трех членов циклической перестановки.

Условию (4) ток (3) удовлетворяет автоматически, а из (6) следует, что

$$c\,B_{001} = -b\,C_{010}. \tag{7}$$

Току (3) соответствует векторый потенциал[2]

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\mathrm{c}}\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,dV \tag{8}$$

магнитного поля. Содержащиеся в (8) объемные интегралы в интересующем нас случае эллипсоида подробно рассмотрены в [9]. В частности, для точек наблюдения вне эллипсоида

$$\int x\,\frac{dV}{R} = 2\pi a^2 x\left(\mathscr{M}_{100} - \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{200}x^2 - \mathscr{M}_{110}y^2 - \mathscr{M}_{101}z^2\right), \tag{9}$$

причем входящие сюда внешние потенциальные факторы $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ определены формулой

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn}\,\frac{abc}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{l+\frac{1}{2}}(b^2+u)^{m+\frac{1}{2}}(c^2+u)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Здесь $\Pi_{lmn} = (2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!$, ξ — эллипсоидальная координата точки наблюдения (x, y, z), являющаяся неотрицательным корнем уравнения $x^2/(a^2+\xi) + y^2/(b^2+\xi) + z^2/(c^2+\xi) = 1$. На поверхности эллипсоида (2) эллипсоидальная координата $\xi = 0$. Выражения для интегралов, отличающихся от (9) заменой x под знаком интеграла на y или z, получаются из (9) с помощью циклической перестановки.

В результате с учетом (7) находим компоненты векторного потенциала вне эллипсоида

$$A_x^{(e)} = 0, \quad A_y^{(e)} = -\frac{V}{5\mathrm{c}}\,bC_{010}\varphi_{001}, \quad A_z^{(e)} = \frac{V}{5\mathrm{c}}\,bC_{010}\varphi_{010}. \tag{11}$$

Здесь V — объем эллипсоида,

$$\varphi_{100} = \frac{15}{2abc}\left(\mathscr{M}_{100} - \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{200}x^2 - \mathscr{M}_{110}y^2 - \mathscr{M}_{101}z^2\right)x, \tag{12}$$

а выражения для φ_{010} и φ_{001} получаются из (12) циклической перестановкой. Величины $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$, введенные в [10], образуют так называемый тензор-потенциал эллипсоида ранга $\nu = \alpha + \beta + \gamma$. Переход от используемой здесь и справедливой только для симметричных тензоров трехиндексной записи тензора $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ и фигурирующего в следующем разделе тензора $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ к обычной тензорной записи понятен из примера

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} \equiv \varphi_{\underbrace{x\ldots x}_{\alpha\ \text{раз}}\underbrace{y\ldots y}_{\beta\ \text{раз}}\underbrace{z\ldots z}_{\gamma\ \text{раз}}}.$$

В частности, компоненты $\varphi_{100} \equiv \varphi_x$, $\varphi_{010} \equiv \varphi_y$ и $\varphi_{001} \equiv \varphi_z$ являются векторным представителем указанного семейства тензоров.

Векторному потенциалу (11) соответствуют компоненты магнитной индукции $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, описываемые формулами

$$B_x^{(e)} = \frac{V}{5\mathrm{c}}\,b\,C_{010}\left(\frac{\partial\varphi_{010}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{001}}{\partial z}\right),$$

$$B_y^{(e)} = -\frac{V}{5\mathrm{c}}\,b\,C_{010}\,\frac{\partial\varphi_{010}}{\partial x}, \quad B_z^{(e)} = -\frac{V}{5\mathrm{c}}\,b\,C_{010}\,\frac{\partial\varphi_{001}}{\partial x}.$$

Используя затем соотношения

$$\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{010}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{001}}{\partial z} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varphi_{010}}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_{100}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi_{001}}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_{010}}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi_{100}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_{001}}{\partial x}, \tag{14}$$

доказанные в [11], приходим к окончательному выражению

$$\mathbf{B}^{(e)} = -\operatorname{grad}\Phi^{(e)}, \tag{15}$$

где

$$\Phi^{(e)} = \frac{V}{5\mathrm{c}}\,b\,C_{010}\,\varphi_{100}. \tag{16}$$

Таким образом, получено выражение для псевдоскалярного потенциала магнитного поля $\Phi^{(e)}$, создаваемого объемным током (3).

Используя формулу Лагранжа

$$\int\left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} dV = 3\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+3)!!}\,V, \tag{17}$$

вычислим теперь магнитные дипольный $\mathbf{m}^{(\mathbf{j})}$ и октупольный $m_{klm}^{(\mathbf{j})}$ моменты эллипсоида,[3] обусловленные током (3). Будем иметь

$$m_x^{(\mathbf{j})} = \frac{1}{2\mathrm{c}}\int[\mathbf{rj}]_x\,dV = \frac{V}{5\mathrm{c}}\,bC_{010}, \quad m_y^{(\mathbf{j})} = m_z^{(\mathbf{j})} = 0, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} m_{xyy}^{(\mathbf{j})} &= \frac{3}{4\mathrm{c}}\int\Big\{10xyz\,j_x + (x^2+z^2-4y^2)z\,j_y \\ &\quad + (4y^2-11x^2-z^2)y\,j_z\Big\}dV \\ &= -\frac{9V}{7!!\mathrm{c}}\,bC_{010}(3a^2-4b^2+c^2), \end{aligned} \tag{19}$$

[2] Следует различать обозначения полуоси c эллипсоида и скорости с света.

[3] Что касается квадрупольного и высших моментов такой же четности, то они, очевидно, равны нулю.

$$m^{(\mathbf{j})}_{xzz} = -\frac{9V}{7!!c}\, b\, C_{010}(3a^2 + b^2 - 4c^2), \tag{20}$$

$$m^{(\mathbf{j})}_{xxx} = -m^{(\mathbf{j})}_{xyy} - m^{(\mathbf{j})}_{xzz}. \tag{21}$$

Все остальные компоненты октупольного магнитного момента тока (3) равны нулю.

Октупольный момент объемного тока понадобится нам позднее, а формулы (18) для дипольного момента позволяют переписать (16) в виде скалярного произведения

$$\Phi^{(e)} = m^{(\mathbf{j})}_x \varphi_x. \tag{22}$$

2. Магнитные мультиполи и потенциалы поверхностного тока

Как известно (см., например, [12]), распределенному в эллипсоиде объемному заряду, плотность которого является полиномиальной (степени L) функцией координат, на поверхности эллипсоида адекватен заряд плотности σ, где σ/p — полином степени $L+2$. Это подсказывает, что декартовы компоненты поверхностной плотности тока $\mathbf{i}$ на границе (2), адекватного заданному току (3), следует искать в виде кубических полиномов. Кроме того, из соображений симметрии следует, что i_x должна быть нечетной функцией всех декартовых координат, i_y — четной функцией x и y и нечетной функцией z, а i_z — четной функцией x и z и нечетной функцией y. Поэтому искомый поверхностный ток можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_x}{p} &= \alpha_{111}\,\frac{xyz}{abc}, \\ \frac{i_y}{p} &= \left(\beta_{201}\,\frac{x^2}{a^2} + \beta_{021}\,\frac{y^2}{b^2} + \beta_{003}\,\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z}{c}, \\ \frac{i_z}{p} &= \left(\gamma_{210}\,\frac{x^2}{a^2} + \gamma_{030}\,\frac{y^2}{b^2} + \gamma_{012}\,\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Для поверхностного тока граничное условие (6) принимает вид

$$\left.\left\langle \frac{x}{a^2}\, i_x \right\rangle\right|_S = 0. \tag{24}$$

Подстановка в (24) выражений (23) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях координат приводят к равенствам

$$\frac{\alpha_{111}}{a} + \frac{\beta_{201}}{b} + \frac{\gamma_{210}}{c} = 0, \quad \frac{\beta_{021}}{b} = -\frac{\gamma_{030}}{c}, \quad \frac{\beta_{003}}{b} = -\frac{\gamma_{012}}{c}. \tag{25}$$

Если представить себе, что весь эллипсоид (2) разбит (подобными ему, подобно расположенными и концентрическими с ним) эллипсоидальными поверхностями на бесконечно тонкие эллипсоидальные слои,[4] то нетрудно показать, что в случае объемного тока, отличающегося от (23) лишь отсутствием фактора p, равенства (25) не позволяют такому току пересекать границы слоев. Поэтому для поверхностного тока $\mathbf{i}$ условие стационарности (4) приобретает вид

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{i}}{p}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{i_x}{p} \right\rangle = 0, \tag{26}$$

дополняя (25) вытекающим из (26) равенством

$$\frac{\alpha_{111}}{a} + 2\,\frac{\beta_{021}}{b} + 2\,\frac{\gamma_{012}}{c} = 0. \tag{27}$$

Отметим, что с учетом четырех соотношений (25), (27) из семи искомых коэффициентов, входящих в полиномы (23), независимых коэффициентов остается три. Через эти три коэффициента, в качестве которых выберем γ_{030}, γ_{012} и γ_{210}, можно выразить, в частности, мультипольные моменты поверхностного тока (23).

Как известно, в односвязной области пространства, внешней по отношению к стационарным электрическим токам, мультипольное разложение псевдоскалярного потенциала их магнитного поля имеет вид [13]

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, m_{i_1\ldots i_l}\, \nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_l}\,\frac{1}{r}, \tag{28}$$

где ∇ — оператор Гамильтона.

Из универсальности мультипольного разложения следует, что у адекватных токовых систем все соответствующие мультипольные моменты совпадают между собой. В частности, в рассматриваемой здесь задаче должны совпадать дипольные и октупольные магнитные моменты объемного (3) и поверхностного (23) токов.

Используя формулу Лагранжа

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} p\,dS = 3\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\,V, \tag{29}$$

вычисляем магнитные дипольный $\mathbf{m}^{(\mathbf{i})}$ и октупольный $m^{(\mathbf{i})}_{klm}$ моменты эллипсоида, обусловленные током (23). С учетом соотношений (25) получаем

$$m^{(\mathbf{i})}_x = \frac{1}{2c}\oint [\mathbf{ri}]_x\, dS = \frac{Vb}{5c}\,(\gamma_{012} + \gamma_{210} + 3\gamma_{030}),$$

$$m^{(\mathbf{i})}_y = m^{(\mathbf{i})}_z = 0; \tag{30}$$

$$m^{(\mathbf{i})}_{xyy} = \frac{3}{4c}\oint \Big\{ 10xyz\, i_x + (x^2+z^2-4y^2)z\, i_y + (4y^2-11x^2-z^2)y\, i_z \Big\} dS = -\frac{3Vb}{35c}\Big\{(5a^2-20b^2+3c^2)\gamma_{030} + (7a^2-4b^2+3c^2)\gamma_{012} + (9a^2-4b^2+c^2)\gamma_{210}\Big\}, \tag{31}$$

$$m^{(\mathbf{i})}_{xzz} = -\frac{3Vb}{35c}\Big\{(25a^2+5b^2-12c^2)\gamma_{030} + (13a^2-b^2+12c^2)\gamma_{012} + (9a^2+b^2-4c^2)\gamma_{210}\Big\}, \tag{32}$$

[4] Такие слои называют гомеоидами.

$$m_{xxx}^{(\mathbf{i})} = -m_{xyy}^{(\mathbf{i})} - m_{xzz}^{(\mathbf{i})}. \quad (33)$$

Все остальные компоненты октупольного магнитного момента поверхностного тока (23) равны нулю.

Далее нам понадобятся и обратные формулы, выражающие коэффициенты α, β, γ через магнитные мультиполи,

$$-c\beta_{021} = b\gamma_{030} = \frac{\mathrm{c}}{6V\delta_a}\Big\{15(14a^4 + 7a^2c^2 - \delta_a)m_x^{(\mathbf{i})} + \frac{7}{3}(11a^2 + 4c^2)m_{xyy}^{(\mathbf{i})} - \frac{7}{3}(a^2 - c^2)m_{xzz}^{(\mathbf{i})}\Big\}, \quad (34)$$

$$-b\gamma_{210} = \frac{\mathrm{c}}{6V\delta_a}\Big\{15(\delta_a - 14a^2b^2 - 7b^2c^2)m_x^{(\mathbf{i})} + \frac{7}{3}(32a^2+b^2+12c^2)m_{xyy}^{(\mathbf{i})} + \frac{7}{3}(8a^2+4b^2+3c^2)m_{xzz}^{(\mathbf{i})}\Big\}, \quad (35)$$

$$-\frac{bc}{a}\alpha_{111} = \frac{7\mathrm{c}}{9V\delta_a}\big\{45a^2(b^2-c^2)m_x^{(\mathbf{i})} - (12a^2-b^2+4c^2)m_{xyy}^{(\mathbf{i})} + (12a^2 + 4b^2 - c^2)m_{xzz}^{(\mathbf{i})}\big\}, \quad (36)$$

где

$$\delta_a \equiv 8a^4 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + b^2c^2. \quad (37)$$

Что касается выражений для $b\gamma_{012} = -c\beta_{003}$ и $c\beta_{201}$, то они получаются из формул (34) и (35) соответственно в результате взаимной замены $y \leftrightarrow z$. При этом у всех псевдовеличин (каковыми являются мультипольные магнитные моменты) следует изменить знак на противоположный.

Из представленных в (30)–(33) отличных от нуля компонент дипольного и октупольного моментов независимы (в силу (33)) три. Это совпадает с числом независимых коэффициентов полиномов (23). Поэтому приравнивание $m_x^{(\mathbf{i})} = m_x^{(\mathbf{j})}$, $m_{xyy}^{(\mathbf{i})} = m_{xyy}^{(\mathbf{j})}$, $m_{xzz}^{(\mathbf{i})} = m_{xzz}^{(\mathbf{j})}$ дает систему алгебраических уравнений, позволяющих найти искомые коэффициенты. Решение этой системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\gamma_{030}}{c} = -\frac{\beta_{021}}{b} = \frac{a^2(2a^2 + c^2)}{\delta_a}\frac{C_{010}}{c},\\
&\frac{\gamma_{012}}{c} = -\frac{\beta_{003}}{b} = \frac{a^2(2a^2 + b^2)}{\delta_a}\frac{C_{010}}{c},\\
&\gamma_{210} = \frac{b^2(2a^2+c^2)}{\delta_a}C_{010}, \quad \frac{\beta_{201}}{b} = -\frac{c^2(2a^2+b^2)}{\delta_a}\frac{C_{010}}{c},\\
&\frac{\alpha_{111}}{a} = -\frac{2a^2(b^2 - c^2)}{\delta_a}\frac{C_{010}}{c}.
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Подчеркнем, что, обеспечив совпадение дипольных и октупольных моментов объемного (3) и поверхностного (23) токов, мы не предъявили доказательств совпадения и всех высших, отличных от нуля магнитных мультиполей этих токов. Нам предстоит поэтому удостовериться, что магнитное поле, создаваемое снаружи эллипсоида током (23) с коэффициентами (38), совпадает с полем тока (3).

Векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\mathrm{c}}\oint\frac{\mathbf{i}}{R}\,dS \quad (39)$$

токов (23) содержит подробно рассмотренные в [9] поверхностные интегралы. В частности, для точек наблюдения снаружи эллипсоида имеют место формулы

$$\oint\left(\frac{x}{a}\right)^2\frac{y}{b}\,\frac{pdS}{R} = Vb\left(\frac{1}{5}\varphi_{010} + \frac{18a^2}{7}\psi_{210}\right),$$

$$\oint\left(\frac{z}{c}\right)^3\frac{pdS}{R} = Vc\left(\frac{1}{15}\varphi_{001} + \frac{18c^2}{7}\psi_{003}\right),$$

$$\oint\frac{xyz}{abc}\,\frac{pdS}{R} = \frac{18}{7}V\,abc\,\psi_{111}$$

и те, что получаются из первых двух формул путем циклической или взаимной координаты. Здесь

$$\psi_{210} = -\frac{7}{12abc}\left(\mathscr{M}_{110} - \mathscr{M}_{210}x^2 - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{120}y^2 - \mathscr{M}_{111}z^2\right)y, \quad (40)$$

$$\psi_{003} = -\frac{7}{12abc}\left(\mathscr{M}_{002} - \mathscr{M}_{102}x^2 - \mathscr{M}_{012}y^2 - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{003}z^2\right)z, \quad (41)$$

$$\psi_{111} = \frac{7}{6abc}\mathscr{M}_{111}\,xyz. \quad (42)$$

Величины $\psi_{\alpha\beta\gamma}$, введенные в [10], образуют так называемый тензор-потенциал гомеоида ранга $\nu = \alpha + \beta + \gamma$. В [11] показано, что компоненты тензора $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial\psi_{\alpha+1,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{\alpha,\beta+1,\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{\alpha,\beta,\gamma+1}}{\partial z} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial\psi_{\alpha,\beta+1,\gamma}}{\partial x} = \frac{\partial\psi_{\alpha+1,\beta,\gamma}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi_{\alpha,\beta,\gamma+1}}{\partial y} = \frac{\partial\psi_{\alpha,\beta+1,\gamma}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\psi_{\alpha+1,\beta,\gamma}}{\partial z} = \frac{\partial\psi_{\alpha,\beta,\gamma+1}}{\partial x}, \quad (44)$$

аналогичным (13) и (14).

В результате для компонент векторного потенциала вне эллипсоида будем иметь

$$A_x^{(e)} = \frac{18V\,abc}{7\mathrm{c}}\,\alpha_{111}\,\psi_{111}, \quad (45)$$

$$A_y^{(e)} = \frac{Vc}{5\mathrm{c}}(\beta_{201} + \beta_{021} + 3\beta_{003})\varphi_{001} + \frac{18Vc}{7\mathrm{c}}(a^2\beta_{201}\psi_{201} + b^2\beta_{021}\psi_{021} + c^2\beta_{003}\psi_{003}), \quad (46)$$

а выражение для $A_z^{(e)}$ получается из (46) с помощью взаимной замены $y \leftrightarrow z$.

Соответственно магнитное поле поверхностного тока дается формулами

$$B_x^{(e)} = \frac{V}{\mathrm{c}}\left\{\frac{b}{5}(\gamma_{210}+\gamma_{012}+3\gamma_{030})\frac{\partial\varphi_{010}}{\partial y} - \frac{18b}{7}(b^2\gamma_{030}-a^2\gamma_{210})\frac{\partial\psi_{210}}{\partial y} - \frac{18b}{7}(b^2\gamma_{030}-c^2\gamma_{012})\frac{\partial\psi_{012}}{\partial y} - \frac{c}{5}(\beta_{201}+\beta_{021}+3\beta_{003})\frac{\partial\varphi_{001}}{\partial z} + \frac{18c}{7}(c^2\beta_{003}-a^2\beta_{201})\frac{\partial\psi_{201}}{\partial z} + \frac{18c}{7}(c^2\beta_{003}-a^2\beta_{021})\frac{\partial\psi_{021}}{\partial z}\right\}, \quad (47)$$

$$B_y^{(e)} = \frac{18V\,abc}{7\mathrm{c}}\,\alpha_{111}\,\frac{\partial\psi_{111}}{\partial z} - \frac{V}{\mathrm{c}}\left\{\frac{b}{5}(\gamma_{210}+\gamma_{012}+3\gamma_{030})\frac{\partial\varphi_{010}}{\partial x} - \frac{18b}{7}(b^2\gamma_{030}-a^2\gamma_{210})\frac{\partial\psi_{210}}{\partial x} - \frac{18b}{7}(b^2\gamma_{030}-c^2\gamma_{012})\frac{\partial\psi_{012}}{\partial x}\right\}. \quad (48)$$

Формула для $B_z^{(e)}$ получается из (48) с помощью взаимной замены $y \leftrightarrow z$.

Вместо того чтобы подставлять в эти выражения формулы (38), представим (47) и (48) в терминах магнитных мультиполей поверхностного тока по аналогии с записью (15), (22). С помощью простых преобразований, использующих равенства (30), (34)–(36), соотношения (13) и (44), свойство неприводимости (т. е. обращение в нуль свертки по любым двум индексам) тензора октупольного магнитного момента и тензор-потенциала гомеоида и легко проверямое тождество

$$\varphi_{100} = \psi_{100} + \frac{18}{7}(a^2-b^2)\psi_{120} + \frac{18}{7}(a^2-c^2)\psi_{102}, \quad (49)$$

где

$$\psi_{100} \equiv \psi_x = \frac{3}{abc}\mathscr{M}_{100}\,x,$$

выражения (47) и (48) преобразуются в единую векторную форму

$$\mathbf{B}^{(e)} = -\operatorname{grad}\Psi^{(e)}. \quad (50)$$

Входящий в (50) псевдоскалярный потенциал магнитного поля в тензорной форме описывается формулой

$$\Psi^{(e)} = m_x^{(\mathbf{i})}\psi_x + (m_{xxx}^{(\mathbf{i})} - 9m_x^{(\mathbf{i})}a^2)\psi_{xxx} + 3(m_{xyy}^{(\mathbf{i})} - 3m_x^{(\mathbf{i})}b^2)\psi_{xyy} + 3(m_{xzz}^{(\mathbf{i})} - 3m_x^{(\mathbf{i})}c^2)\psi_{xzz}. \quad (51)$$

Здесь уместно сделать следующее замечание. Если бы речь шла не о токах, а о скалярных источниках (например, зарядах), то электростатический потенциал вне эллипсоида (2), несущего объемный заряд плотности $\rho \sim x$, давался бы, как это следует из [14], любой из формул (22) или (51), в которых магнитные мультиполи заменены соответствующими электрическими. Формула, аналогичная (51), описывает и электростатический потенциал вне эллипсоида, создаваемый его поверхностным зарядом плотности $\sigma = P_3(x, y, z)p$, где P_3 — кубический многочлен, зависимость которого от координат характеризуется такой же симметрией, что и у объемного заряда.[5]

Из сказанного понятно, что если псевдоскалярный потенциал магнитного поля обладает совершенно такими же мультипольными представлениями, что и электростатический потенциал, то при подстановке в формулу (51) для поверхностных токов выражений (18)–(21) для мультипольных моментов объемных токов должна получиться формула (22). Элементарная проверка, в процессе которой вновь используется тождество (49) и свойство неприводимости тензор-потенциала гомеоида, это подтверждает. Таким образом, токи (3) и (23) создают вне эллипсоида одинаковые поля, причем это установлено без явного использования формул (38). Что касается последних, то их подстановка в (23) и доставляет решение нашей задачи.

При вырождении эллипсоида (2) в шар $(c = b = a)$ плотность объемного тока (3) с учетом (7) трансформируется в выражения

$$j_x = 0, \quad j_y = -C_{010}\,\frac{z}{a}, \quad j_z = C_{010}\,\frac{y}{a},$$

а адекватный поверхностный ток (23) упрощается, как и должно быть [8], к виду

$$i_x = 0, \quad i_y = -\frac{1}{5}C_{010}\,z, \quad j_z = \frac{1}{5}C_{010}\,y.$$

Заключение

Подводя итоги, ограничимся несколькими замечаниями.

1. То, что мультипольные представления (22) и (51) псевдоскалярных магнитных потенциалов эллипсоида для токов (3) и (23) существуют и при замене магнитных мультиполей электрическими они переходят в соответствующие точные формулы для мультипольных представлений электростатических потенциалов,[6] является признаком существования мультипольных представлений магнитных потенциалов эллипсоида в общем случае токов с полиномиальной зависимостью от координат.

[5] Так, объемному задяру $\rho \sim x$ соответствует P_3 содержащий только одночлены x^3, xy^2 и xz^2.

[6] В которых, разумеется, следует положить равным нулю полный заряд эллипсоида (в силу отсутствия магнитных зарядов).

2. На конкретном примере простейших адекватных объемного и поверхностного токов показано, что мультипольные представления их псевдоскалярных потенциалов, выражающиеся в терминах тензор-потенциалов гомеоида, совершенно идентичны друг другу.[7]

3. Представим себе, что в сверхпроводнике, заполняющем все пространство, имеется полость, которая ограничена эллипсоидальной поверхностью (2) и в которой существует заданный ток (3). Тогда очевидно, что на граничной поверхности полости будет наведен ток, поверхностная плотность которого равна $\mathbf{i}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ есть решение рассмотренной здесь задачи, описываемое формулами (23), (38). Разумеется, бесконечный сверхпроводник можно заменить сверхпроводящим телом ограниченных размеров, но заземленным.

Список литературы

[1] *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism in two volumes. Oxford: Clarendon Press Series, 1873. Vol. 2. (*Максвелл Дж. Клерк.* Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1989. Т. 2. 437 с.).

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 662 с.

[3] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.

[4] *Левин М.Л., Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2464–2471.

[5] *Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 2097–2104.

[6] *Френкель Я.И.* Электродинамика (Общая теория электричества). Собр. избр. тр. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. 370 с.

[7] *Френкель Я.И.* Электродинамика. Л.; М.: ОНТИ, 1935. Т. 2. 556 с.

[8] *Муратов Р.З.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 6–10.

[9] *Муратов Р.З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.

[10] *Ефимов С.П., Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. Вып. 2. С. 302–313.

[11] *Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1993. Т. 70. Вып. 6. С. 1271–1280.

[12] *Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 4. С. 1–6.

[13] *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977. 496 с.

[14] *Ефимов С.П., Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. Вып. 2. С. 314–325.

[7] Заметим, что векторный потенциал магнитного поля вне эллипсоида подобным универсальным свойством не обладает. Это видно, например, из того, что число отличных от нуля компонент векторного потенциала не одинаково для адекватных токов (3) и (23).