

01;05

Возможные расстояния между линейными вихрями в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 17 декабря 2004 г.)

Предложен метод решения нелинейной системы уравнений квантования флюксоида для двух взаимодействующих линейных вихрей. Показано, что центры вихрей могут находиться в соседних ячейках, только если параметр пиннинга $I > 0.91$, через одну ячейку — при $I > 0.44$, через две ячейки — при $I > 0.25$. Эти критические значения существенно ниже аналогичных величин для плоских вихрей. Показано, что при стремлении I к нулю минимальное расстояние между линейными вихрями не возрастает неограниченно, а достигает некоторой конечной величины и далее остается постоянным. Это значит, что даже при очень близких к нулю величинах I пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя. Показано, что два линейных вихря с центрами в соседних по диагонали ячейках могут сосуществовать при сколь угодно малых значениях I .

Введение

Одной из важнейших проблем в физике высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Исследованию вихрей посвящено значительное количество работ [1–7]. В [3,4] анализируется поведение одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте. Однако в этом рассмотрении вихрь предполагается непрерывным в пространстве распределением фазы, а его пиннинг обусловлен взаимодействием с дискретно расположенными центрами пиннинга. На самом же деле джозефсоновская среда представляет собой ячеистую структуру, что уже само по себе обуславливает пиннинг, определяемый энергией, необходимой для перемещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В [5] проведен анализ поведения вихря в линейной цепочке СКВИД. Однако в этом случае рассмотрение ведется в двумерной ситуации, т.е. магнитное поле отдельной петли учитывается лишь в магнитном потоке, пронизывающем ее саму. В трехмерном же случае вихрь представляет собой систему коаксиальных „соленидов“, поэтому магнитный поток через петлю создается не только ею самой, но и другими токовыми участками, в том числе достаточно удаленными. При этом с уменьшением критического тока контакта растет размер вихря, т.е. число петель, принимающих участие в формировании магнитного потока через центральную ячейку вихря, что компенсирует уменьшение вклада в магнитный поток от каждой петли. В работах [6,7] получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках для трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды.

В [8] проведен расчет равновесных конфигураций ламинарного (плоского) вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и рассчитаны минимальные

возможные расстояния между двумя плоскими вихрями. В [9] исследованы различные конфигурации линейного вихря в такой среде. Целью настоящей работы является расчет минимальных возможных расстояний между двумя линейными вихрями в трехмерной джозефсоновской среде при различных значениях параметра пиннинга. Эта задача представляет значительный практический интерес, так как в большинстве ВТСП приходится иметь дело именно с такими вихрями.

Рассмотрение будем проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом a , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_c . Токковое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии a друг от друга, токи распределены идентично. Такая модель, являясь в достаточной степени простой, позволяет сделать определенные выводы о структуре вихрей, их пиннинге и динамике. Эти результаты качественно сохраняются и в более сложных моделях.

Линейные вихри с центрами в соседних ячейках

Рассмотрим возможность существования вдали от границы образца двух изолированных, одинаково ориентированных линейных вихрей с центрами в соседних ячейках.

Четверть сечения этой картины плоскостью, перпендикулярной ее оси, показана на рис. 1. Центральные ячейки вихрей обозначены жирными точками. Поскольку вихри ориентированы одинаково, то существует плоскость симметрии, в которой все скачки фазы

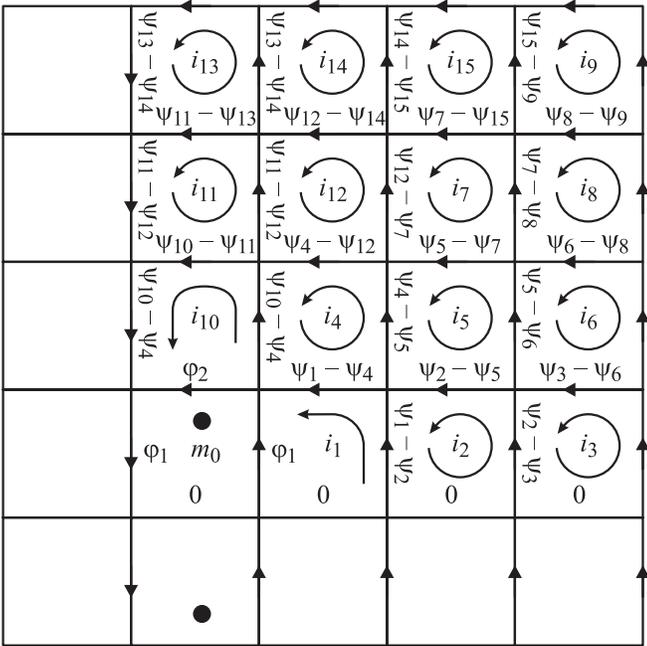


Рис. 1. Распределение токов и скачков фазы на контактах для двух линейных вихрей с центрами в соседних ячейках в плоскости, перпендикулярной их осям. i_m и ψ_m — контурный ток в m -м контуре и соответствующий „контурный“ скачок фазы. Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через ψ_m . Скачки φ_1 и φ_2 не предполагаются малыми. Ячейки, обозначенные жирными точками, содержат 1 квант потока Φ_0 , все остальные — 0 квантов. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

на контактах равны нулю. Полная картина получается симметричной экстраполяцией рис. 1 влево и вниз.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [6]

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \quad (1)$$

где $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ — сумма скачков фазы на джозефсоновских элементах m -й ячейки; Φ_m — полный магнитный поток через m -ю ячейку; Φ_0 — квант магнитного потока; K_m — целое число, равное 1 для центральных ячеек вихрей (с током i_0) и нулю для всех остальных.

Величины джозефсоновских токов $J_k = J_c \sin \varphi_k$ по мере удаления от центров вихрей убывают, причем скорость убывания возрастает с ростом величины критического тока J_c . В данном случае мы будем рассматривать лишь такие конфигурации, в которых $\varphi_k \ll 1$, т.е. $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$, для всех φ_k , кроме самых больших по величине скачков фаз φ_1 и φ_2 в ближайших к центру ячейках (рис. 1). Справедливость этого предположения будет подтверждена результатом. В этом случае, чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“, ячеек. Пусть в каждой ячейке с номером m

($m \neq 0$) протекает контурный ток $i_m = J_c \psi_m$, где ψ_m — „контурный“ скачок фазы. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме φ_1 и φ_2) определяются как разности соответствующих „контурных“ значений (рис. 1). Магнитный поток через m -ю ячейку можно записать в виде [6]

$$\Phi_m = \mu_0 S/a \left(i_m + b \sum_k J_k^{(m)} \right) \quad (m \neq 0), \quad (2a)$$

$$\Phi_m \Big|_{m=0} = \mu_0 S/a (i_0 + i_1 + 4b i_0) \quad (m = 0), \quad (2b)$$

где b — коэффициент неоднородности поля [6] из-за дискретности токового распределения вдоль оси вихря, $\sum_k J_k^{(m)}$ — алгебраическая сумма токов контактов m -й ячейки, S — площадь ячейки.

При толщине провода $\delta \ll a$ параметр b определяется выражением

$$b = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi \delta}{a} \right).$$

Для простоты далее будем рассматривать случай $Ib \ll 1$, где I — параметр пиннинга, определяемый выражением (4). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что длинными джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки не обязана быть квадратной, в частности она может быть образована нитями круглого сечения.

Подставляя (2) в (1) и полагая $i_0 = J_c \sin \varphi_1$, а контурные токи $i_k = J_c \psi_k$ ($k \neq 0$), запишем (при $Ib \ll 1$) систему уравнений квантования флюксоида (m — номер ячейки на рис. 1)

$$I(\sin \varphi_1 + \psi_1) + 2\varphi_1 + \psi_2 = 2\pi \quad (m = 0),$$

$$(I + 2)\psi_1 - \psi_4 - \psi_2 - \varphi_1 = 0 \quad (m = 1),$$

$$(I + 3)\psi_{10} - \psi_2 - 2\psi_4 - \psi_{11} = 0 \quad (m = 10),$$

$$(I + 4)\psi_4 - \psi_1 - \psi_5 - \psi_{10} - \psi_{12} = 0 \quad (m = 4),$$

$$(I + 3)\psi_2 - \psi_1 - \psi_5 - \psi_3 = 0 \quad (m = 2),$$

$$(I + 4)\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7 = 0 \quad (m = 5),$$

$$(I + 4)\psi_{11} - \psi_{10} - 2\psi_{12} - \psi_{13} = 0 \quad (m = 11),$$

$$(I + 4)\psi_{12} - \psi_4 - \psi_7 - \psi_{11} - \psi_{14} = 0 \quad (m = 12),$$

$$(I + 4)\psi_7 - \psi_5 - \psi_8 - \psi_{12} - \psi_{15} = 0 \text{ и т.д. } (m = 7),$$

$$\sin \varphi_1 + \psi_1 = \sin \varphi_2 + \psi_{10}, \quad (3)$$

где

$$I \equiv 2\pi\mu_0 J_c a / \Phi_0. \quad (4)$$

Последнее уравнение в (3) получено из дополнительного условия непрерывности тока в верхнем правом

узле ячейки с номером 0, обозначенном на рис. 1 жирной точкой.

Переход от бесконечной системы (3) к конечной может быть осуществлен пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра (рис. 1). Будем считать равными нулю контурные токи в самом верхнем и крайнем правом рядах ячеек (рис. 1) и далее. Из соображений симметрии ясно, что ситуация с нулевыми токами в самых верхних контактах на рис. 1 примерно соответствует существованию еще одной симметричной, показанной на рис. 1 конфигурации с центром на 7 ячеек выше ячейки с $m = 0$ (строго говоря, это не совсем так, потому что в этом случае не равнялись бы нулю токи в вертикальных участках верхнего ряда ячеек). В сравнении с взаимодействием двух рассматриваемых вихрей с центрами в соседних ячейках влиянием этой удаленной конфигурации можно пренебречь. То же можно сказать и о нулевых токах в крайнем правом ряду. Эти замечания подтверждают правомерность рассмотрения задачи в такой геометрии.

Тогда система (3) будет состоять только из 10 уравнений, явно выписанных выше, в которых надо считать $\psi_3 = \psi_6 = \psi_8 = \psi_9 = \psi_{13} = \psi_{14} = \psi_{15} = 0$. Ее решение производится путем выражения значений всех ψ_m через φ_1 и φ_2 из линейных уравнений системы (3) и подстановкой их в первое и последнее уравнения системы (3). В результате получим систему из двух нелинейных уравнений

$$\varphi_2 = (2\pi - I \sin \varphi_1 - A(I)\varphi_1)/B(I), \quad (5a)$$

$$\varphi_1 = (2\pi - I \sin \varphi_2 - C(I)\varphi_2)/D(I), \quad (5b)$$

где A, B, C и D — многочлены от I .

При величинах параметра пиннинга I , больших некоторого критического значения $I_0 = 0.9093$ (индекс соответствует числу ячеек между центрами), кривые (5) имеют две точки пересечения (рис. 2), соответствующие разным возможным конфигурациям вихрей (оба a или оба b [9]). Значения φ_1 и φ_2 точек пересечения находятся численным методом. Зная φ_1 и φ_2 , затем находим и все ψ_m . При $I < 0.9093$ кривые (5) вообще не имеют

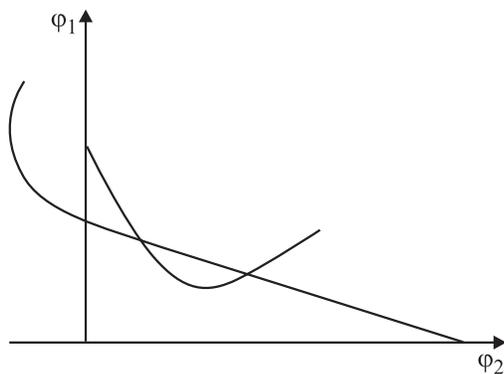


Рис. 2. Характер пересечения кривых, описываемых уравнениями (7).

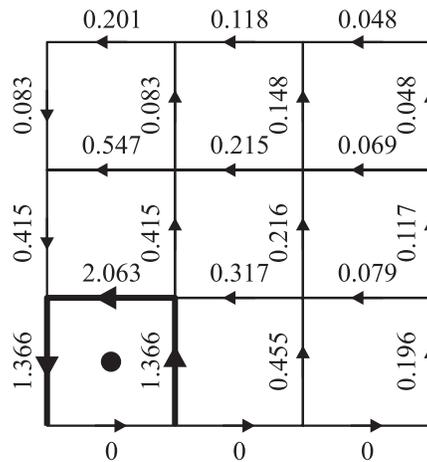


Рис. 3. Распределение скачков фазы в случае двух линейных вихрей с центрами в соседних ячейках при $I = 0.9093$. Жирными линиями показаны участки, на которых скачки фаз не предполагались малыми. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

пересечений. Это означает, что при таких значениях I центры вихрей не могут располагаться в соседних ячейках. На рис. 3 приведено рассчитанное распределение скачка фазы по контактам вихря для $I = 0.9093$. Из него видно, что предположение о малости всех φ_k , кроме φ_1 и φ_2 , справедливо.

Еще одним аргументом, подтверждающим правомерность использованной геометрии, является тот факт, что аналогичный расчет в предположении ненулевых токов только в ячейках с номерами 0, 1, 10 и 4 (и симметричных к ним) дает значение $I_0 = 0.9758$. Это значит, что дальнейшее увеличение размеров рассматриваемой конфигурации не повлияет существенно на величину I_0 . Поэтому можно с уверенностью утверждать, что центры линейных вихрей могут располагаться в соседних ячейках только при $I > 0.9$.

Для плоских вихрей величина I_0 больше (2.907 из [8]). Это можно объяснить следующим образом. Если бы был выполнен принцип суперпозиции, т.е. можно было бы считать, что плоский вихрь представляет собой сплошной ряд линейных (что, конечно, не так, поскольку уравнения нелинейны в центральной области вихря), то на каждый вихрь из этого ряда действовали бы силы со стороны всех линейных вихрей другого плоского вихря. Результирующая сила была бы больше силы взаимодействия двух линейных вихрей, т.е. плоским вихрям удержаться в соседних ячейках труднее, чем линейным. Поэтому критическое значение I_0 для плоских вихрей больше, чем для линейных.

На рис. 4 представлено распределение скачка фазы по контактам для случая двух расположенных в соседних рядах цепочек линейных вихрей, центры которых в каждой цепочке располагаются через одну ячейку. Расчет показывает, что критическое значение I для этой ситуации равно 1.64. Отметим, что если при

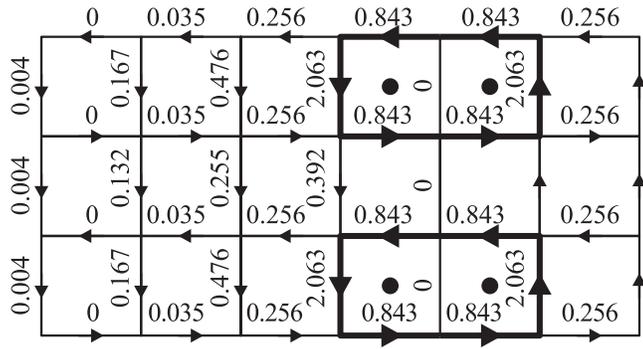


Рис. 4. Распределение скачка фазы по контактам для двух расположенных в соседних вертикальных рядах бесконечных цепочек линейных вихрей, центры которых в каждой цепочке располагаются через одну ячейку. Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не считаются малыми. Картина периодически продолжается вверх и вниз и симметрично вправо. Ячейки, обозначенные жирными точками, содержат 1 квант потока, все остальные — 0 квантов.

расчете ограничиться не тремя вертикальными рядами от центральной ячейки вихря, как на рис. 4, а только двумя, то критическое значение I будет равно 1.65. Сходство этих значений говорит о том, что они близки к точной величине. Рассмотренная конфигурация является промежуточной между предыдущим случаем двух линейных вихрей с центрами в соседних ячейках и двумя плоскими вихрями с центрами в соседних рядах. Сила, действующая в этом случае на каждый линейный вихрь, больше, чем в случае двух линейных вихрей, но меньше, чем для плоских. Того же следовало ожидать и от критических значений параметра пиннинга.

Центры вихрей через одну ячейку

Из соображений симметрии следует, что половина сечения этой картины плоскостью, перпендикулярной ее оси, имеет вид, показанный на рис. 5. Переход от бесконечной системы уравнений к конечной проведем так же, как и в рассмотренном ранее случае, пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра. Ограничимся ячейками, показанными на рис. 5. Центральная ячейка вихря обозначена жирной точкой. Полная картина получается симметричной экстраполяцией рис. 5 вниз.

В результате расчета мы увидим, что при всех значениях I , при которых рассматриваемая конфигурация может существовать, малыми (так что $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$) являются скачки фаз на всех контактах, кроме тех участков, которые выделены на рис. 5 жирными линиями, а именно $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ и φ_{13} . Введем контурные токи $i_m = J_c \psi_m$ при $m \neq 10$. Это позволяет автоматически удовлетворить условия баланса токов на всех узлах, кроме тех, что показаны на рис. 5 жирными точками.

Условия баланса на этих узлах имеют вид

$$\sin \varphi_{13} = \psi_{11} - \psi_{13},$$

$$\psi_4 + \sin \varphi_4 = \psi_{11} + \sin \varphi_{11},$$

$$\psi_0 + \sin \varphi_{10} = \psi_4 + \sin \varphi_4,$$

$$\psi_5 + \sin \varphi_5 = \psi_4 + \sin \varphi_4. \quad (6)$$

Аналогично (3) получим при $b = 0$ следующую систему уравнений квантования флюксоида в ячейках (m — номер ячейки на рис. 5):

$$I(\sin \varphi_4 + \psi_4) + 2\varphi_4 + \varphi_{10} + \varphi_{11} = 2\pi \quad (m = 10),$$

$$(I + 2)\psi_{11} + \psi_{13} - 2\psi_{12} - \psi_{11} = 0 \quad (m = 11),$$

$$(I + 2)\psi_0 - 2\psi_1 - 2\varphi_{10} = 0 \quad (m = 0),$$

$$(I + 2)\psi_4 - \psi_1 - \psi_{12} + \varphi_5 - \varphi_4 = 0 \quad (m = 4),$$

$$(I + 3)\psi_{13} - 2\psi_{14} - \varphi_{13} = 0 \quad (m = 13),$$

$$(I + 3)\psi_5 - \psi_2 - \psi_7 - \varphi_5 = 0 \quad (m = 5),$$

$$(I + 4)\psi_1 - \psi_0 - \psi_2 - 2\psi_4 = 0 \quad (m = 1),$$

$$(I + 4)\psi_2 - \psi_1 - 2\psi_5 = 0 \quad (m = 2),$$

$$(I + 4)\psi_{12} - \psi_4 - \psi_7 - \psi_{11} - \psi_{14} = 0 \quad (m = 12),$$

$$(I + 4)\psi_7 - \psi_5 - \psi_{12} = 0 \quad (m = 7). \quad (7)$$

Система уравнений (6), (7) отличается от системы (3) тем, что она нелинейна не по двум неизвестным, а по большему их количеству, в данном случае по пяти.

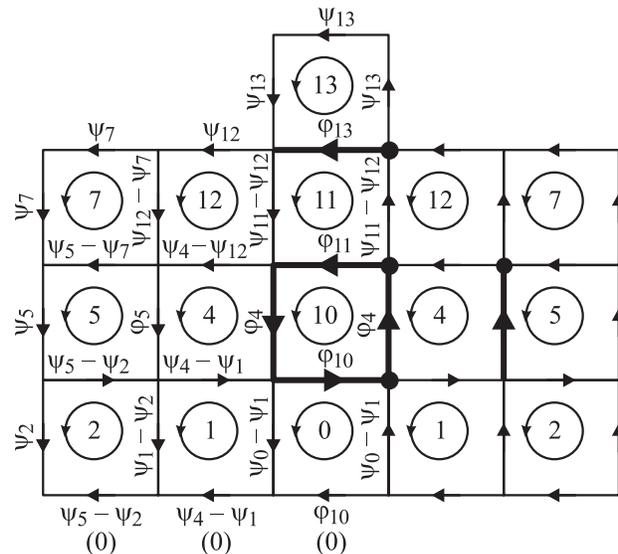


Рис. 5. Распределение скачков фазы на контактах для двух линейных вихрей с центрами через 1 или через 2 ячейки. Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через „контурные“ скачки фазы ψ_m . Верхние значения в нижнем ряду получены, если центры вихрей через 1 ячейку, нижние (нули в скобках) — через 2 ячейки. Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не считаются малыми. Картина симметрично продолжается вправо и вниз.

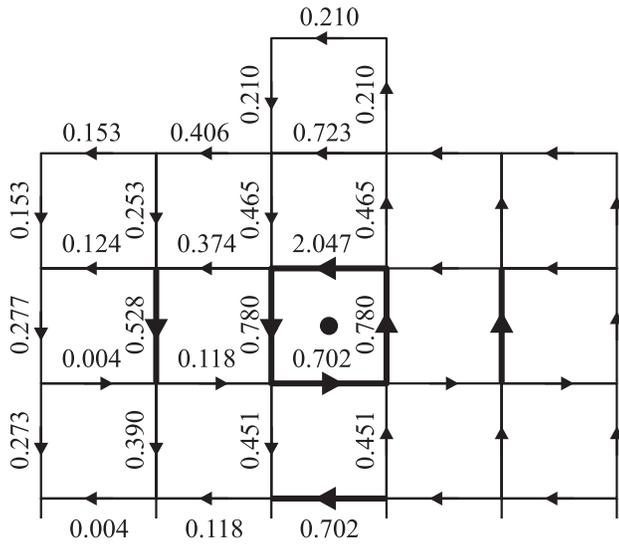


Рис. 6. Распределение скачков фазы в случае двух линейных вихрей с центрами через 1 ячейку при $I = 0.441$. Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не считаются малыми. Картина симметрично продолжается вправо и вниз.

Поэтому она не может быть сведена к системе двух нелинейных уравнений, которую можно решить численно. Решить задачу позволяет метод последовательных приближений. Представим $\varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{13}$ и их синусы в виде $\varphi_5 = \varphi_5^0 + \delta_5, \sin \varphi_5 = \sin \varphi_5^0 + \cos \varphi_5^0 \cdot \delta_5$ и т.д., где $\varphi_5^0, \varphi_{10}^0$ и φ_{13}^0 считаем известными величинами (на первой итерации равными нулю), а δ_5, δ_{10} и δ_{13} являются новыми неизвестными (вместо $\varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{13}$), относительно которых система линейна.

Выразим значения всех ψ_m , а также δ_5, δ_{10} и δ_{13} через φ_4 и φ_{11} из линейных уравнений системы и, подставив их в два оставшихся нелинейных уравнения, получим систему вида

$$\varphi_4 = [2\pi - I \sin \varphi_{11} - E(I) \cdot \varphi_{11} - D(I)]/F(I), \quad (8)$$

$$\varphi_{11} = [2\pi - I \sin \varphi_4 - G(I) \cdot \varphi_4 - H(I)]/M(I), \quad (9)$$

где E, D, F, G, H и M — дробно-рациональные функции от I , коэффициенты которых зависят от значений $\varphi_5^0, \varphi_{10}^0$ и φ_{13}^0 .

Как и в предыдущем случае, при величинах параметра пиннинга I , больших некоторого критического значения I_1 , кривые (8) и (9) имеют две точки пересечения (как на рис. 2), соответствующие разным возможным конфигурациям вихрей (оба a или оба b [9]). Значения φ_4 и φ_{11} точек пересечения находятся численным методом. Зная φ_4 и φ_{11} , затем находим $\delta_5, \delta_{10}, \delta_{13}$ и все ψ_m . Для следующей итерации возьмем новые значения $\varphi_5^0, \varphi_{10}^0$ и φ_{13}^0 , добавив к их предыдущим значениям полученные величины δ_5, δ_{10} и δ_{13} , и снова решим систему. После каждой такой итерации нужно найти откорректированное значение I_1 и следующую итерацию проводить уже при новом значении I_1 . Результаты расчета показывают, что итерационная процедура

сходится, т.е. каждая следующая итерация дает на порядок меньшие значения δ_5, δ_{10} и δ_{13} . Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов. Истинность полученных решений проверялась их подстановкой во все исходные уравнения системы (6), (7).

Расчет показывает, что критическое значение I_1 равно 0.441. (Отметим, что до начала итерационной процедуры величина I_1 равнялась 0.422).

На рис. 6 приведены рассчитанные распределения скачков фазы по контактам вихря для $I = I_1 = 0.450$. Из него видно, что условие справедливости расчета ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ для всех φ_k , кроме $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ и φ_{13}) выполнено.

Отметим, что для плоских вихрей $I_1 = 1.947$ [8].

Центры вихрей через две ячейки

Из соображений симметрии следует, что половина сечения этой картины плоскостью, перпендикулярной ее оси, имеет такой же вид, как и в предыдущем случае (рис. 5), с одним лишь изменением: скачки фазы в участках самой нижней линии равны нулю. Ограничимся снова ячейками, показанными на рис. 5. Центральная ячейка вихря обозначена жирной точкой. Полная картина получается симметричной экстраполяцией рис. 5 вниз.

В системе (6) и (7) уравнения для ячеек с номерами 0, 1 и 2 надо заменить на следующие:

$$\begin{aligned} (I + 2)\psi_0 - 2\psi_1 - \varphi_{10} &= 0 \quad (m = 0), \\ (I + 3)\psi_1 - \psi_0 - \psi_2 - \varphi_4 &= 0 \quad (m = 1), \\ (I + 3)\psi_2 - \psi_1 - \psi_5 &= 0 \quad (m = 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Все остальные уравнения системы (6) и (7) остаются неизменными.

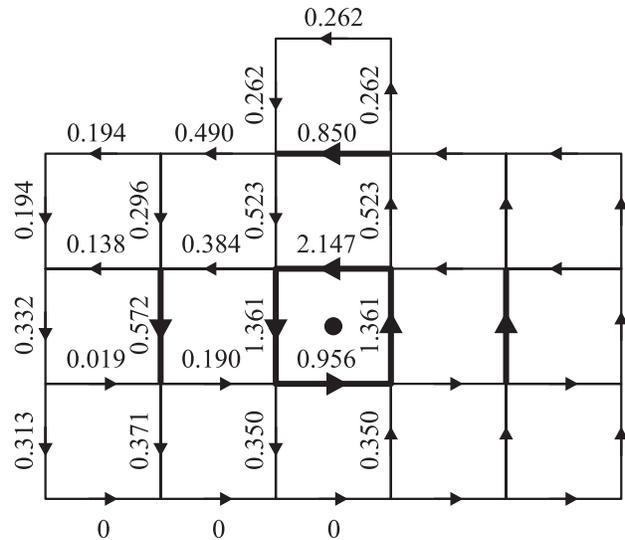


Рис. 7. Распределение скачков фазы в случае двух линейных вихрей с центрами через 2 ячейки при $I = 0.246$. Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не считаются малыми. Картина симметрично продолжается вправо и вниз.

Немалыми будем считать скачки фаз на тех же контактах: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ и φ_{13} . Все замечания относительно предыдущего рассмотрения верны и в данном случае.

Расчет, аналогичный проведенному выше, показывает, что критическое значение I_2 для вихрей, центры которых расположены на расстоянии двух ячеек друг от друга, равно 0.246.

На рис. 7 даны рассчитанные распределения скачков фазы по контактам вихря для $I = I_2 = 0.246$. Из него видно, что условие справедливости расчета ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ для всех φ_k , кроме $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ и φ_{13}) выполнено.

Отметим, что для плоских вихрей $I_2 = 1.428$ [8].

Линейные вихри с центрами в соседних по диагонали ячейках

Сечение этой картины плоскостью, перпендикулярной ее оси, приведено на рис. 8. Центральные ячейки вихрей обозначены жирными точками. Участки, скачки фазы на которых не будут априори считаться малыми ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$), выделены на рис. 8 жирными линиями.

Введем контурные токи $i_m = J_c \psi_m$ при $m \neq 1$. Это позволяет автоматически удовлетворить условия баланса токов на всех узлах, кроме тех, что показаны на рис. 8 жирными точками.

Условия баланса на этих узлах имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_3 + \sin \varphi_3 &= \psi_4 + \sin \varphi_4, \\ \psi_3 + \sin \varphi_3 &= \psi_2, \\ \psi_2 + \sin \varphi_2 &= \psi_7 + \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично (3) получим следующую систему уравнений квантования флюксоида в ячейках (m — номер ячейки на рис. 8):

$$\begin{aligned} I(\sin \varphi_1 + \psi_7) + 2\varphi_1 + 2\varphi_2 &= 2\pi \quad (m = 1), \\ (I + 1)\psi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_2 - \psi_8 &= 0 \quad (m = 2), \\ (I + 3)\psi_3 - \psi_5 - \varphi_3 - \psi_9 &= 0 \quad (m = 3), \\ (I + 2)\psi_4 - 2\psi_5 - 2\varphi_4 &= 0 \quad (m = 4), \\ (I + 4)\psi_5 - \psi_3 - \psi_4 - \psi_6 &= 0 \quad (m = 5), \\ (I + 4)\psi_6 - 2\psi_5 &= 0 \quad (m = 6), \\ (I + 2)\psi_7 - 2\psi_8 - 2\varphi_1 &= 0 \quad (m = 7), \\ (I + 4)\psi_8 - \psi_2 - \psi_7 - \psi_9 - \varphi_{10} &= 0 \quad (m = 8), \\ (I + 4)\psi_9 - \psi_3 - \psi_8 &= 0 \quad (m = 9), \\ (I + 4)\psi_{10} - 2\psi_8 &= 0 \quad (m = 10). \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (11), (12) может быть решена тем же методом последовательных приближений, что и система (6), (7). Проведем линеаризацию по φ_3, φ_4 , как это было сделано в предыдущем разделе относительно $\varphi_5, \varphi_{10}, \varphi_{13}$.

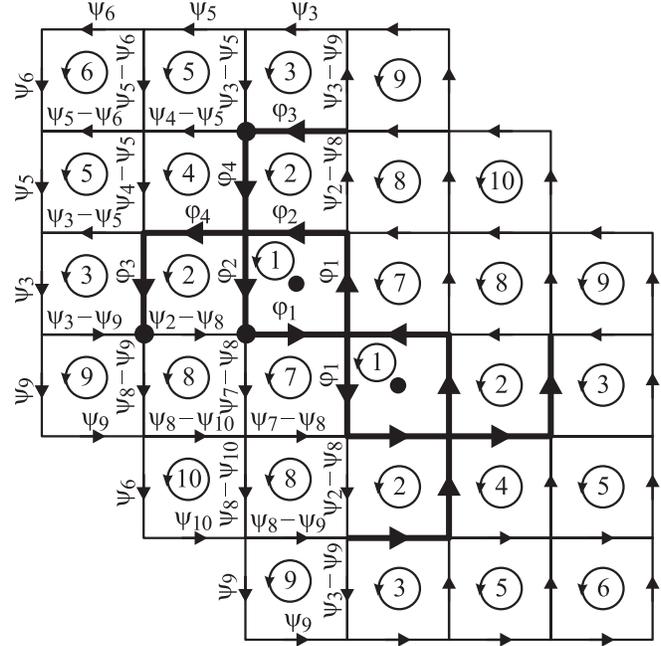


Рис. 8. Распределение скачков фазы на контактах для двух линейных вихрей с центрами в соседних по диагонали ячейках. Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через „контурные“ скачки фазы ψ_m . Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не считаются малыми. Ячейки, обозначенные жирными точками, содержат 1 квант потока, все остальные — 0 квантов. Картина симметрична относительно диагоналей.

Выразив значения всех ψ_m , а также δ_3 и δ_4 через φ_1 и φ_2 из линейных уравнений системы и подставив их в два оставшихся нелинейных уравнения, снова получим систему вида (5). Однако в данном случае в отличие от всех рассмотренных выше уравнения (5) имеют всего одну точку пересечения. С одной стороны, этого следовало ожидать, поскольку в таком „диагональном“ расположении оба вихря могут иметь только конфигурацию a [8] и второй точке пересечения неоткуда взяться. С другой стороны, ясно, что решение системы по мере уменьшения I не может исчезнуть так, как показано на рис. 2. Таким образом, можно ожидать, что система имеет решение при любых, сколь угодно малых значениях I .

Той же итерационной процедурой, что и раньше, систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов. Расчет подтверждает существование решения при любом I . На рис. 9 приведено рассчитанное распределение скачков фазы по контактам для $I = 0.0001$. Из него видно, что условие справедливости расчета ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ для всех φ_k , кроме $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4) можно считать выполненным, хотя и с меньшей точностью, чем в предыдущих случаях.

Из вышеизложенного следует нетривиальный вывод о том, что два линейных вихря с центрами в соседних по диагонали ячейках могут сосуществовать при сколь угодно малых значениях параметра пиннинга.

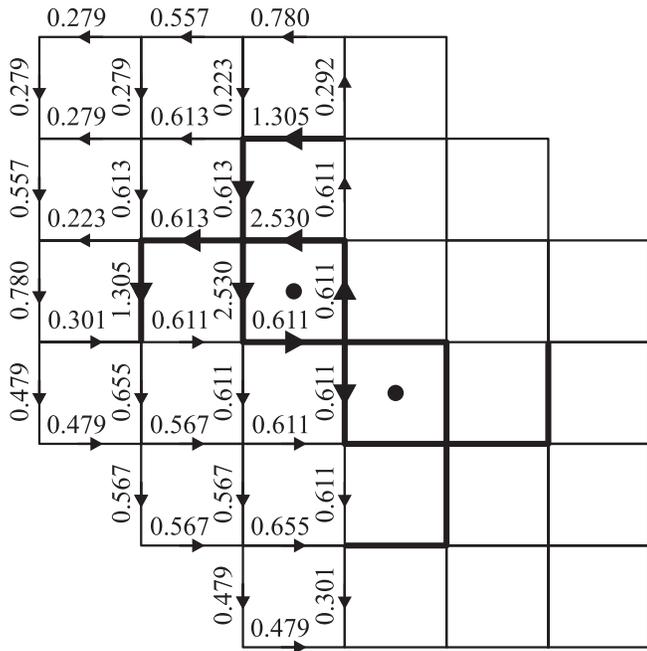


Рис. 9. Распределение скачков фазы в случае двух линейных вихрей с центрами в соседних по диагонали ячейках при $I = 0.0001$. Жирные линии — участки, на которых скачки фаз не предполагались малыми. Ячейки, обозначенные жирными точками, содержат 1 квант потока, все остальные — 0 квантов. Картина симметрична относительно диагоналей.

Линейные вихри на больших расстояниях друг от друга

При малых значениях параметра пиннинга ($I \ll 1$) сила пиннинга мала, а сила взаимодействия вихрей велика, поэтому вихри могут находиться в равновесии лишь на больших расстояниях друг от друга.

При малых I вихри могут считаться квазинепрерывными. Энергии уединенных вихрей в состояниях a и b описываются выражениями [9,10]

$$E_a = E_0 \frac{\pi}{2} I \left(\ln \frac{1}{I} + 2.77 \right),$$

$$E_b = E_0 \frac{\pi}{2} I \left(\ln \frac{1}{I} + 2.81 \right), \quad (13)$$

где $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 a^2$, Φ_0 — квант магнитного потока, μ_0 — магнитная постоянная.

Примерное среднее значение силы пиннинга равно отношению энергии пиннинга, т.е. разности энергий (13), к расстоянию между положениями центра вихря в состояниях a и b , т.е. к половине размера ячейки $a/2$. Максимальная сила пиннинга больше среднего значения. Введя соответствующий коэффициент k , получим

$$F_p^{\max} = k 0.04 E_0 \frac{\pi}{a} I. \quad (14)$$

Поскольку при малых I вихри описываются теми же уравнениями [7], что и абрикосовские, воспользуемся

выражением для энергии взаимодействия двух абрикосовских вихрей [10], приходящейся на каждый вихрь,

$$U_{\text{int}} = E_0 \pi I K_0(x), \quad (15)$$

где K_0 — функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента, $x = r/\lambda$, r — расстояние между центрами вихрей, $\lambda = a/\sqrt{I}$ — характерный размер вихря.

Приравнивая силу взаимодействия, равную $F_{\text{int}} = -\partial U_{\text{int}}/\partial r$, максимальной силе пиннинга (14), получим уравнение для нахождения минимального расстояния между центрами вихрей

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -k 0.04 I^{-0.5}. \quad (16)$$

Воспользуемся тем, что $dK_0/dx = -K_1(x)$. Тогда (16) примет вид

$$K_1(x) = k 0.04 I^{-0.5}. \quad (17)$$

Выберем значение k так, чтобы из (17) следовал результат, полученный точно в одном из предыдущих разделов: при $I = 0.25$ минимальное расстояние между центральными ячейками вихрей равно 2 ячейкам, т.е. между центрами этих ячеек равно $3a$. Тогда, подставив в (17) $\sqrt{I} = 0.5$, $r/a = 3$, $x = 1.5$, получим $k = K_1(1.5)/0.08 = 3.5$, и (17) примет вид

$$K_1(x) = 0.14 I^{-0.5}. \quad (18)$$

Анализ уравнения (17) проведем следующим образом. Выбрав некоторое значение I , вычислим из (17) соответствующее ему K_1 , далее из таблицы функций Бесселя найдем соответствующее значение x , а затем рассчитаем $r/a = x/\sqrt{I}$. В таблице приведены результаты таких расчетов. Строго говоря, приближение квазинепрерывных вихрей выполнено только при $\sqrt{I} \ll 1$, т.е. для первых трех строк таблицы. Но из таблицы видно, что для больших значений I результаты можно считать приемлемыми. Например, при $I = 0.45$ точный расчет, проведенный в предыдущих разделах, дает расстояние между центральными ячейками вихрей, равное 1 ячейке, т.е. между центрами этих ячеек — 2. Расчет по (18) дает значение $r/a = 2.5$. Поэтому нахождение коэффициента k при выводе (18) на основе приложения (17) к случаю $I = 0.25$ имеет под собой определенные основания. Однако, как видно из таблицы, использование (18) при малых I дает значения r/a выше рассчитанных точно. Поэтому и значение r/a , полученное из (18) при $I = 0.25$, также должно быть выше точного значения, равного 3. Таким образом, и значение k должно быть меньше найденной выше величины. Отметим, что полученное значение отношения максимальной силы пиннинга к средней ($k = 3.5$) выглядит весьма правдоподобным, учитывая приближительность вывода выражений (13) в [9].

При малых значениях x функция $K_0(x)$ примерно равна $\ln(1/x)$, и из (16) следует, что минимальное

Расчет минимальных расстояний между вихрями

I	\sqrt{I}	$K_1 = 0.14/\sqrt{I}$	x	$r/a = x/\sqrt{I}$
0.0001	0.01	14	0.071	7.1
0.0049	0.07	2	0.43	6.1
0.01	0.1	1.4	0.57	5.7
0.0625	0.25	0.56	1.05	4.2
0.25	0.50	0.28	1.5	3.0
0.45	0.67	0.21	1.7	2.5
1.00	1.00	0.14	2.0	2.0

расстояние между вихрями равно $r/a = 1/0.04k = 7.1$ ячейки вне зависимости от I . Величина x при этом равна $7.1\sqrt{I}$, т.е. условие малости x принимает вид $\sqrt{I} \ll 0.14$, т.е. $I \ll 0.02$.

Это означает, что при стремлении I к нулю минимальное расстояние между линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для плоских вихрей [8], а также для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя, а пиннингом плоских — можно.

Это объясняется тем, что в случае плоских вихрей с уменьшением I ширина вихря стремится к бесконечности. Поэтому при смещении вихря на величину, малую в сравнении с его размером, изменение его энергии, т.е. и сила пиннинга, при стремлении I к нулю убывает значительно быстрее, чем сила взаимодействия вихрей [8]. Линейный же вихрь при сколь угодно малых значениях I имеет центральную часть размером в несколько ячеек [9], где скачки фазы намного больше, чем в остальной области вихря, причем форма центральной части вихря не изменяется при стремлении I к нулю. Сила пиннинга такого вихря при стремлении I к нулю убывает значительно медленнее, чем в случае плоских вихрей, так что при очень малых I максимальная сила пиннинга и сила взаимного отталкивания линейных вихрей зависят от I одинаково.

Заключение

Предложен метод решения нелинейной системы уравнений квантования флюксоида в ячейках трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, позволяющий найти токовую конфигурацию двух взаимодействующих линейных вихрей, а также минимально возможное расстояние между ними при данном значении параметра пиннинга. Метод основан на приближенной линеаризации большинства нелинейных уравнений и применении процедуры последовательных итераций, приводящей к точному решению за небольшое количество шагов. Сходимость метода во всех случаях подтверждена проверкой выполнения исходных уравнений системы.

Показано, что центры вихрей могут находиться в соседних ячейках только при $I > 0.91$, через одну ячей-

ку — при $I > 0.44$, через две ячейки — при $I > 0.25$. Эти критические значения существенно ниже аналогичных величин для плоских вихрей.

Для случая малых I сравнение величин максимальной силы пиннинга и силы взаимного отталкивания вихрей позволило прийти к нетривиальному выводу о том, что при стремлении I к нулю минимальное расстояние между линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно, а достигает некоторой конечной величины и далее остается постоянным. Это значит, что даже при очень близких к нулю величинах I пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя, в то время как пиннингом плоских — можно.

Еще одним нетривиальным результатом является тот факт, что два линейных вихря с центрами в соседних по диагонали ячейках могут сосуществовать при сколь угодно малых значениях параметра пиннинга.

Полученные результаты представляют интерес для решения задачи о проникновении магнитного поля в трехмерную джозефсоновскую среду и нахождения профиля магнитного поля у границы образца.

Список литературы

- [1] Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R. // *Physica C*. 1989. Vol. 158. P. 69.
- [2] Rzechowski M.S., Benz S.P., Tinkham M., Lobb C.J. // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 42. P. 2041.
- [3] Kivshar Y.S., Malomed B.A. // *Rev. Mod. Phys.* 1989. Vol. 61. P. 763.
- [4] Брыксин В.В., Дороговцев С.Н. // *ЖЭТФ*. 1992. Т. 102. С. 1025.
- [5] Parodi F., Vaccarone R. // *Physica C*. 1991. Vol. 173. P. 56.
- [6] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469.
- [7] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795.
- [8] Зеликман М.А. // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 44.
- [9] Зеликман М.А. // *ЖТФ*. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 37.
- [10] Де Жен П. *Сверхпроводимость металлов и сплавов*. М.: Мир, 1968.