

01;03;05

Численное исследование сходящихся ударных волн в пористых средах

© А.А. Чарахчян,¹ К.В. Хищенко,² В.В. Милявский,² В.Е. Фортов,²
А.А. Фролова,¹ И.В. Ломоносов,² Л.В. Шуршалов¹

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
119991 Москва, Россия

² Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенного института высоких температур РАН,
125412 Москва, Россия
e-mail: chara@ccas.ru

(Поступило в Редакцию 12 января 2005 г.)

Исследуется зависимость решений уравнений гидродинамики сжимаемых сред, описывающих сходящиеся ударные волны, от плотности вещества перед фронтом волны. Изучаются свойства ударных адиабат, которые могут объяснить качественно различный характер этой зависимости для уравнения состояния совершенного газа и уравнений состояния конденсированных сред. Рассмотрены одномерные задачи о сходящихся ударных волнах в графите и алюминии, а также двумерная задача о сжатии графита в стальной мишени с конической полостью. Последняя задача рассматривается также в рамках простейшей модели деформируемого твердого тела, учитывающей сдвиговые напряжения.

Введение

Продолжение исследований [1] по моделированию ударного сжатия графита в конических твердотельных мишенях привело к необходимости учета начальной пористости образцов. Здесь авторы столкнулись с необычным свойством сходящихся ударных волн в пористых средах, которое проявлялось в значительном повышении давления при уменьшении начальной плотности графита по сравнению с кристаллической плотностью при неизменности всех остальных параметров задачи. Этот результат стимулировал исследование сходящихся одномерных сферических и цилиндрических ударных волн. Ранее было опубликовано краткое сообщение [2] о первых полученных результатах.

Чтобы продемонстрировать необычность повышения давления при уменьшении начальной плотности, приведем две задачи, в которых это не так. Первая задача о сходящейся сферической или цилиндрической ударной волне в среде с уравнением состояния совершенного газа имеет известное автомодельное решение (см., например, монографию [3]). В этом решении давление на фронте волны как функция радиуса с точностью до постоянной определяется показателем автомодельности, не зависящим от начальной плотности. Постоянная в автомодельном решении определяется интенсивностью ударной волны на больших расстояниях от центра. Как будет показано ниже, при прохождении ударной волны по исходно пористому веществу давление на фронте тем меньше, чем меньше начальная плотность образца. Поэтому следует ожидать, что давление на фронте волны с заданным значением радиуса будет также уменьшаться с уменьшением начальной плотности. Расчет задачи с уравнением состояния совершенного газа подтверждает этот вывод. Однако численное решение

задачи с реальным уравнением состояния твердых тел имеет качественно другой характер: давление на фронте волны с заданным значением радиуса увеличивается с уменьшением начальной плотности. Как будет показано в настоящей работе, такое изменение характера решения связано с вырождением ударной адиабаты совершенного газа в приближении сильной ударной волны.

В качестве другого примера, демонстрирующего необычность повышения давления при замене сплошного вещества на пористое, рассмотрим одномерную задачу о входе ударной волны в пористое вещество, являющуюся частным случаем задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений гидродинамики сжимаемых сред. Все неизвестные функции зависят от одной пространственной переменной x . Уравнение состояния будем полагать заданным в виде $\varepsilon = \varepsilon(p, v)$, где ε — удельная внутренняя энергия, p — давление, v — удельный объем. В начальный момент времени полупространство $x > 0$ занимает неподвижное (скорость $u = 0$) пористое вещество с давлением p_0 , удельным объемом v_{00} , удельным объемом сплошного вещества $v_0 < v_{00}$ и удельной внутренней энергией $\varepsilon_0 = \varepsilon(p_0, v_0)$. Ударная волна в таком веществе полагается подвижной границей, за которой пор нет [3]. Скорость распространения волны и значения неизвестных функций за ней связаны обычными законами сохранения, в частности давление p и удельный объем v за фронтом волны связаны уравнением ударной адиабаты

$$\varepsilon(p, v) - \varepsilon_0 = (p + p_0)(v_{00} - v)/2. \quad (1)$$

Пусть при $x < 0$ первоначально находится уже сжатое ударной волной вещество с термодинамическими параметрами p_1, v_1 и скоростью u_1 . Решение такой задачи (см., например, монографию [4]) имеет вид двух волн, идущих вправо и влево от разрыва, каждая из которых

может быть или ударной волной, или центрированной волной разрежения, и контактного разрыва, на котором непрерывны давление и скорость. Для рассматриваемого случая идущей вправо ударной волны давление за фронтами волн находится из решения алгебраического уравнения

$$U(p, p_1, v_1) + U_s(p, p_0, v_{00}) + u_1 = 0, \quad (2)$$

которое определяет функцию $p = p(p_0, v_{00}, p_1, v_1, u_1)$.

Скорость течения вещества слева от фронта есть $U = U_s(p, p_1, v_1)$ при $p > p_1$ или $U = U_r(p, p_1, v_1)$ при $p < p_1$,

$$U_s(p, p_*, v_*) = \sqrt{(p - p_*)(v_* - v(p, v_*, p_*))},$$

$$U_r(p, p_*, v_*) = \int_{p_*}^p \frac{dp'}{a(p', v(p', v_*, p_*))}.$$

Функции U_s и U_r имеют смысл массовой скорости соответственно за ударной волной и волной разрежения с давлением p , идущими по неподвижному веществу с параметрами p_* , v_* ; $a(p, v)$ — лагранжева скорость звука. Зависимость $v(p, v_*, p_*)$ в функциях U_s и U_r определяется соответственно ударной адиабатой (1) и изоэнтропой $d\varepsilon + pdv = 0$.

Дифференцируя (2), найдем

$$\frac{\partial p}{\partial v_{00}} = - \frac{\partial U_s(p, p_0, v_{00}) / \partial v_{00}}{\partial U_s(p, p_0, v_{00}) / \partial p + \partial U(p, p_1, v_1) / \partial p}. \quad (3)$$

Для производной в числителе (3) имеем

$$\frac{\partial U_s(p, p_0, v_{00})}{\partial v_{00}} = \frac{p - p_0}{2U_s} \left(1 - \frac{\partial v}{\partial v_{00}} \right). \quad (4)$$

Продифференцировав ударную адиабату (1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial v_{00}} = \frac{1}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{2}{p + p_0} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)_p.$$

Подставляя это выражение в (4), найдем

$$\frac{\partial U_s(p, p_0, v_{00})}{\partial v_{00}} = \frac{(p - p_0)}{2U_s} \frac{\xi}{(1 + \xi)}.$$

Если влево идет волна разрежения, то второе слагаемое в знаменателе (3) $\partial U_r / \partial p = 1/a > 0$. В результате получаем, что производная

$$\frac{\partial p}{\partial v_{00}} < 0 \quad (5)$$

при выполнении двух условий: если производная вдоль ударной адиабаты от скорости за ударной волной по давлению $\partial U_s / \partial p > 0$ и термодинамическая производная $(\partial \varepsilon / \partial v)_p > 0$. Оба этих условия выполняются, по видимому, всегда. Следовательно, увеличение пористости, т.е. увеличение v_{00} , практически всегда приводит к

уменьшению интенсивности ударной волны в момент ее вхождения в вещество. Однако, как будет показано в настоящей работе, при дальнейшем движении сходящейся ударной волны по пористому веществу за ее фронтом может возникать давление, значительно превышающее то, которое было бы в случае менее пористого или сплошного вещества.

В настоящее время нет теории, которая позволила бы представить в аналитическом виде обнаруженные при численном исследовании свойства решений уравнений гидродинамики сжимаемых сред. Тем не менее сопоставление полученных решений со свойствами ударных адиабат позволило выявить одно такое свойство, которое объясняет характер зависимости давления на фронте от начальной плотности в сходящихся ударных волнах, если предположить, что плотность на фронте волны слабо зависит от начальной плотности. Этому свойству ударных адиабат посвящен следующий раздел настоящей работы. Далее представлены результаты расчета сферических и цилиндрических сходящихся ударных волн для уравнений состояния графита, алюминия и совершенного газа, которые, в частности, подтверждают слабую зависимость плотности на фронте волны от начальной плотности для конденсированных сред. Последний раздел посвящен двумерной задаче об ударном сжатии графита в конической стальной мишени, которая рассматривается как в рамках уравнений гидродинамики, так и в рамках простейшей модели динамики твердого деформируемого тела, учитывающей сдвиговые напряжения.

Об одном свойстве ударных адиабат твердых тел

Для ударных волн в твердых телах с большой точностью выполняется приближение сильной ударной волны, когда давлением и внутренней энергией перед фронтом волны можно пренебречь по сравнению со значениями за фронтом. Тогда ударная адиабата (1) превращается в связь трех величин p , v и v_{00}

$$\varepsilon(p, v) = p(v_{00} - v)/2. \quad (6)$$

Если уравнение состояния имеет вид $\varepsilon(p, v) = p\varphi(v)$, то давление p из (6) исключается и соотношение (6) определяет функцию $v = v(v_{00})$. В частности, для уравнения состояния совершенного газа $\varphi(v) = v/(\gamma - 1)$, где $\gamma = \text{const} > 1$. Для уравнения состояния конденсированной среды такого вырождения не происходит, и уравнение (6) определяет функцию $p = p(v, v_{00})$. Это видно из рис. 1, где для уравнений состояния графита [5,6] и алюминия [7] приведены ударные адиабаты в виде зависимости степени сжатия $\sigma = \rho/\rho_0$ от давления p для исходной пористости перед волной $m_p = \rho_0/\rho_{00} = 1$ и 2. Здесь $\rho = v^{-1}$ — плотность, $\rho_0 = v_0^{-1}$ — плотность сплошного вещества при нормальных условиях, $\rho_{00} = v_{00}^{-1}$ — исходная плотность образца. Для графита

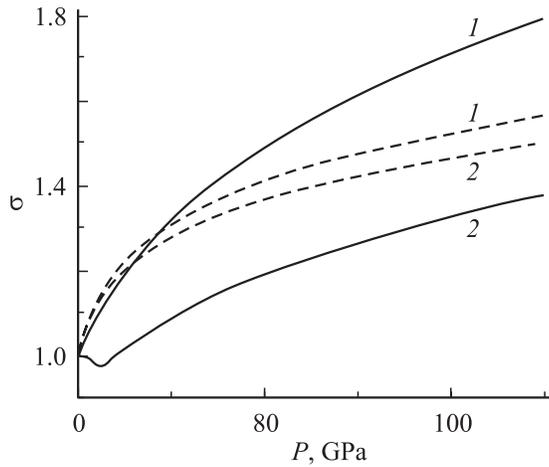


Рис. 1. Ударные адиабаты образцов алюминия (сплошные линии) и графита (штриховые) с исходной пористостью $m_p = 1$ (1) и 2 (2).

кривые $\sigma(p, \rho_0)$ и $\sigma(p, \rho_0/2)$ близки друг к другу, что означает слабую зависимость ρ на ударной адиабате от ρ_{00} . Для алюминия эти кривые заметно отличаются друг от друга. Предположим тем не менее, что при движении ударной волны плотность за фронтом ρ как функция плотности ρ_{00} и каких-то параметров, характеризующих положение ударной волны, слабо зависят от ρ_{00} . Например, в применении к одномерным ударным волнам предположим, что функция $\rho = \rho(r, \rho_{00})$, где r — радиус волны, слабо зависит от ρ_{00} . В качестве предварительного оправдания такой гипотезы сошлемся на работы [8,9], где при моделировании взрывов в пористых средах независимость ρ от ρ_{00} принималась в качестве постулата. Тогда возрастание или убывание давления за фронтом волны p в зависимости от изменения плотности перед волной ρ_{00} определяется знаком производной $(\partial p / \partial \rho_{00})_{\rho}$, или в терминах удельных объемов производной $(\partial p / \partial v_{00})_v$. Рассмотрим несколько примеров ударных адиабатов, для которых эту производную можно найти аналитически.

Взяв дифференциал от (6) и исключив из него с помощью (6) разность $v_{00} - v$, получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v_{00}}\right)_v = \frac{p^2}{2[p(\partial \varepsilon / \partial p)_v - \varepsilon]}. \quad (7)$$

Для уравнения состояния совершенного газа $(\partial \varepsilon / \partial p)_v = \varepsilon / p$ и производная (7) обращается в бесконечность, что и следовало ожидать, так как давление p в этом случае из (6) исключается.

При моделировании некоторых ударно-волновых течений в твердых телах использовалось так называемое двучленное уравнение состояния [10]

$$\varepsilon = \frac{p - (\rho - \rho_*)c_*^2}{(\gamma - 1)\rho},$$

где ρ_* , c_* — плотность и скорость звука вещества в нормальном состоянии.

Из уравнения (7) имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v_{00}}\right)_v = \frac{(\gamma - 1)\rho p^2}{2(\rho - \rho_*)c_*^2} > 0$$

при $\rho > \rho_*$, т. е. для сжатого относительно нормального состояния вещества.

Другой пример — ударная адиабата с линейной связью между скоростью ударной волны D и массовой скоростью за волной u

$$D = a + bu, \quad a > 0, \quad b > 1.$$

Связь между p , v и v_{00} для такой ударной адиабаты имеет вид (см., например, монографию [11])

$$p = \frac{a^2(v_{00} - v)}{[v_{00} - b(v_{00} - v)]^2}. \quad (8)$$

Область применимости выражения (8) ограничена значениями $v_{00} \geq v > v_{00}(b - 1)/b$. Непосредственным дифференцированием (8) можно убедиться, что в этой области $(\partial p / \partial v_{00})_v > 0$.

Таким образом, для обеих рассмотренных аппроксимаций ударной адиабаты твердых тел давление за фронтом волны возрастает с уменьшением начальной плотности ρ_{00} , если плотность за волной ρ не меняется при изменении ρ_{00} . Можно ожидать, что давление будет возрастать и при слабой в некотором смысле зависимости ρ от ρ_{00} , например для одномерных ударных волн при слабой зависимости функции $\rho = \rho(r, \rho_{00})$ от ρ_{00} . Такая ситуация заведомо невозможна для уравнения состояния совершенного газа, когда связь между ρ и ρ_{00} однозначно определится ударной адиабатой. Можно предположить, что слабая зависимость ρ от ρ_{00} отсутствует и в случае очень сильных ударных волн, когда плотность ρ близка к своему предельному значению, зависящему от ρ_{00} . В этом случае характер зависимости интенсивности ударной волны от ρ_{00} будет, по-видимому, качественно такой же, как и в случае уравнения состояния совершенного газа.

Для течений со сходящимися ударными волнами интерес представляет не только давление на фронте сходящейся волны, но и давление, возникающее за фронтом отраженной ударной волны. Поэтому в качестве характеристики интенсивности сходящейся волны введем в рассмотрение давление p_r , возникающее при взаимодействии ударной волны с жесткой неподвижной стенкой, которое является решением уравнения

$$\sqrt{(p_r - p)(v - v_r(p_r))} = u, \quad (9)$$

где u — нормальная к фронту волны массовая скорость за фронтом; функция $v_r(p_r)$ определяется ударной адиабатой, проведенной из состояния p, v ,

$$\varepsilon(p_r, v_r) - \varepsilon(p, v) = (p + p_r)(v - v_r)/2.$$

Давление p_r увеличивается с увеличением как r , так и u . Например, в акустическом приближении $v - v_r \approx (p_r - p)/\rho^2 c^2$, где c — скорость звука, из условия (9) имеем $p_r \approx p + \rho c u$.

В приближении сильной ударной волны $u = \sqrt{p(v_{00} - v)}$. Поэтому если $(\partial p/\partial v_{00})_v > 0$, то и $(\partial u/\partial v_{00})_v > 0$. Если теперь для одномерных ударных волн предположить слабую зависимость функции $\rho = \rho(r, \rho_{00})$ от ρ_{00} , то с уменьшением ρ_{00} будет увеличиваться не только давление p , но скорость u и давление p_r .

Одномерные сходящиеся ударные волны

Задача ставится в рамках уравнений бездиссипативной гидродинамики сжимаемых сред

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\rho \frac{d(\varepsilon + u^2/2)}{dt} + \operatorname{div} pu = 0, \quad (10)$$

которые замыкаются уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \quad (11)$$

Здесь r — радиус, u — скорость, T — температура, $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r$ — лагранжева производная по времени,

$$\operatorname{div}(\cdot) = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial r^\nu(\cdot)}{\partial r},$$

индекс $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ — сферической. Уравнения (11) можно обратить и определять, например, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$ и $T = T(\rho, p)$ или $p = p(\rho, \varepsilon)$ и $T = T(\rho, \varepsilon)$. В начальный момент времени задаются плотность ρ_{00} , давление p_0 , а в случае пористого образца нормальная плотность вещества в отсутствие пор $\rho_0 > \rho_{00}$. Предполагается, что движение пористой среды начинается с прохождения по ней головной ударной волны. Граничным условием на волне является ударная адиабата с параметрами перед фронтом ρ_{00} , $p_0 = p(\rho_0, T_0)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(\rho_0, T_0)$.

Реализованы два численных метода, которые основаны на разных подходах к расчету сходящейся ударной волны. Первый — метод явного выделения фронта волны. Первоначально вводится расчетная область небольшого размера с небольшим числом узлов сетки, значения искоемых функций в которых берутся из решения задачи о распаде разрыва, определяющей параметры входящей в пористое вещество ударной волны. Далее на каждом шаге по времени по схеме второго порядка точности определяются значения искоемых функций на верхнем временном слое. По давлению в ближайшем к фронту волны узле сетки и ударной адиабате определяются скорость волны и тем самым новое положение фронта. По мере увеличения расчетной области туда

добавляются новые узлы сетки, вплоть до некоторого заданного количества узлов. При добавлении узла сетки новые узлы располагаются равномерно по r , а значения функций в них определяются с помощью интерполяции локальными сплайнами четвертого порядка точности, построенными на полиномах Эрмита. Фронт волны выделяется явно вплоть до ее выхода на жесткую стенку, поставленную при достаточно малом r . Далее исходное пористое вещество уже не влияет на решение задачи и расчет отраженной ударной волны ведется по обычной схеме сквозного счета для уравнений (10) и (11). На этапе явного выделения фронта головной сходящейся волны ударные волны внутри расчетной области отсутствуют, что позволяет вместо третьего уравнения (10) использовать уравнение изоэнтропии $d\varepsilon = pd\rho/\rho^2$, которое вместе с (11) для каждого узла лагранжевой сетки интегрируется с достаточно малым шагом по ρ .

Вторым является метод сквозного счета через фронт головной волны, использующий простую модель кинетики пор (см., например, работу [12]). В постановку задачи можно формально включить удельный объем пор v_p , определив его в начальный момент так: $v_p = \rho_{00}^{-1} - \rho_0^{-1}$ перед фронтом волны, $v_p = 0$ за фронтом. В расчете функция v_p полагается новой неизвестной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dv_p}{dt} = -Av_p(p - p_0). \quad (12)$$

В уравнения состояния (11) вместо плотности ρ подставляется плотность сплошного вещества $\rho_s = (\rho^{-1} - v_p)^{-1}$. Уравнение (12) записывается в каждой ячейке разностной сетки, а постоянная A выбирается так, чтобы за размазанной по сетке головной ударной волной функция v_p уменьшалась на несколько порядков.

Контрольные расчеты по двум описанным методам хорошо совпали друг с другом.

В качестве тестовой задачи для изучения свойств сходящихся ударных волн рассматривается шар или цилиндр радиуса $r_0 = 2$ мм, состоящий из вещества с нормальной плотностью ρ_0 и исходной пористостью в интервале $1 \leq m_p \leq 2$, на который с некоторой скоростью u_0 налетает сферический или цилиндрический ударник, возможно, из другого вещества без пор. Начальное давление в пористом веществе и ударнике $p_0 = 0.1$ МПа. Величины, относящиеся к фронту волны, будем считать функциями радиуса волны r и $\rho_{00} = \rho_0/m_p$.

На рис. 2 для сферического случая и алюминиевого ударника $u_0 = 1$ км/с при трех значениях $r = r_0$, $r_0/5$ и $r_0/10$ приведены отношения $f(\rho_{00}, r)/f(\rho_0, r)$ в зависимости от относительной исходной плотности $\rho_{00}/\rho_0 = m_p^{-1}$, где f — плотность ρ_s и давление p_s в сходящейся волне, давление p_r и температура T_r в отраженной от жесткой стенки волне. Задача решалась для шара с уравнениями состояния алюминия, графита и совершенного газа с $\gamma = 3$. В последнем случае плотность ρ_{00} совпадала с плотностью графита.

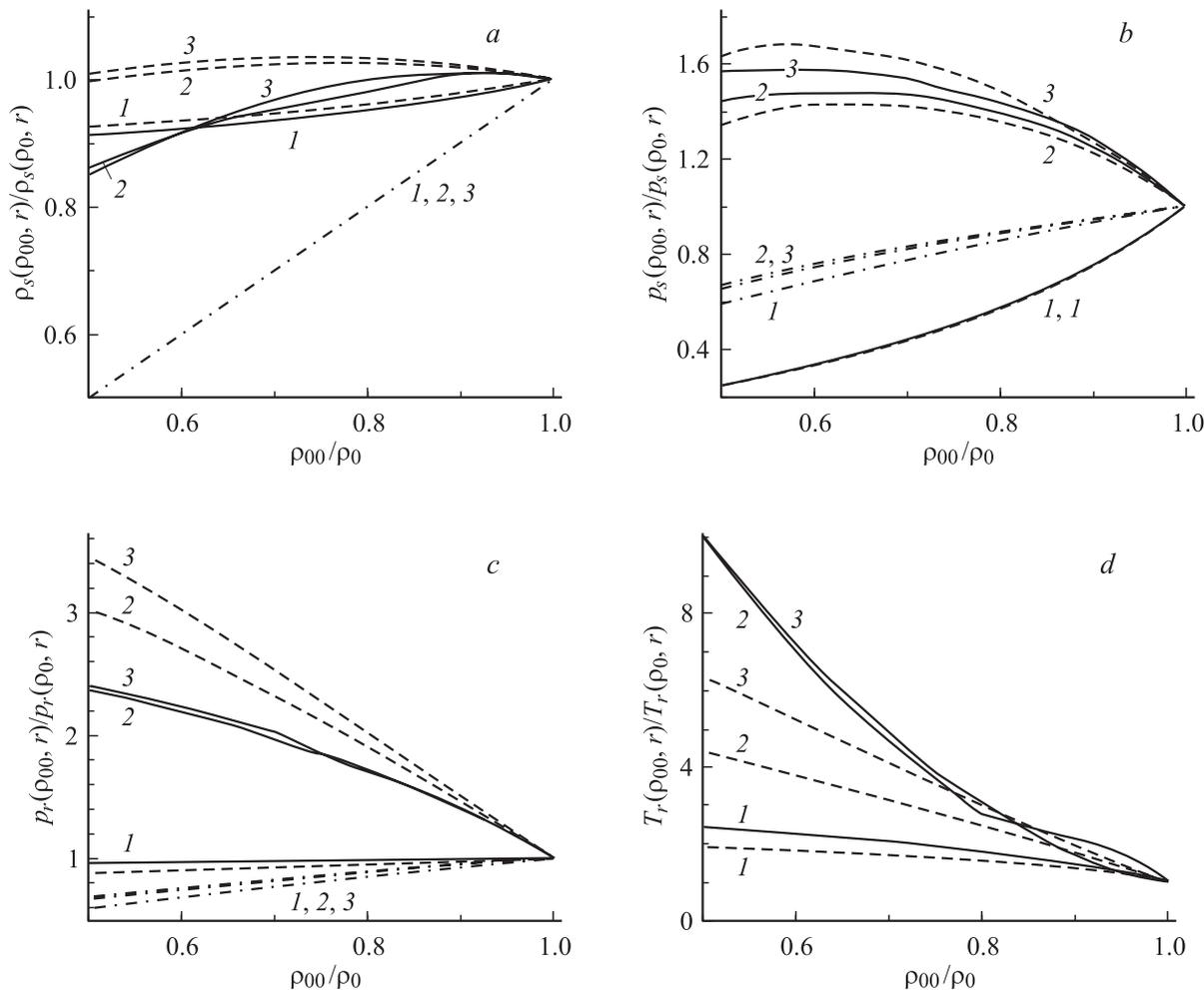


Рис. 2. Относительные изменения плотности ρ_s (a) и давления p_s (b) в сходящейся сферической волне, давления p_r (c) и температуры T_r (d) в отраженной от жесткой стенки волне при $r = r_0$ (1), $r_0/5$ (2) и $r_0/10$ (3) для алюминия (сплошные линии), графита (штриховые) и совершенного газа (штрих-пунктирные); алюминиевый ударник, $u_0 = 1$ км/с.

Для совершенного газа ρ_s есть линейная функция ρ_{00} , не зависящая от r . Давление p_s уменьшается с уменьшением ρ_{00} , как это следует из свойств соответствующего автомодельного решения и условия (5) при $r = r_0$. Давление в отраженной волне p_r также уменьшается.

Для уравнения состояния конденсированного вещества зависимость решения от ρ_{00} имеет совершенно другой характер. Плотность ρ_s для графита почти не зависит от ρ_{00} . Для алюминия зависимость более сильная, особенно при малых ρ_{00} . Однако даже на границе исследуемого интервала $m_p = 2$ плотность ρ_s уменьшается всего на 15% по сравнению с решением задачи для $m_p = 1$. Давление p_s при $r = r_0$, т.е. в момент входа ударной волны в пористое вещество, уменьшается с уменьшением ρ_{00} , как это и следует из анализа задачи о распаде разрыва. Однако при малых r , наоборот, $p_s(\rho_{00}, r)$ возрастает при уменьшении ρ_{00} от ρ_0 до $\sim 0.7\rho_0$.

Наиболее интересной является зависимость от ρ_{00} параметров отраженной ударной волны при малых r . Давление p_r в графите растет почти линейно с уменьшением ρ_{00} . Для $\rho_{00} = 0.5\rho_0$ p_r увеличивается по сравнению со случаем $\rho_{00} = \rho_0$ в 3–3.5 раза. В алюминии увеличение p_r менее значительно: в ~ 2.5 раза. Следует отметить впечатляющий рост температуры T_r при малых r в алюминии: примерно в 10 раз для $\rho_{00} = 0.5\rho_0$ по сравнению с $\rho_{00} = \rho_0$, в то время как при $r = r_0$ температура увеличивается всего в 2.5 раза.

На рис. 3 представленные выше зависимости давления p_r и температуры T_r от ρ_{00} в алюминии и графите для сферической волны сравниваются с зависимостями для цилиндрической волны, вызванной цилиндрическим ударником с той же начальной скоростью. В цилиндрической волне оба параметра также усиливаются с уменьшением ρ_{00} . В обоих веществах давление p_r в цилиндрической волне увеличивается слабее, чем в

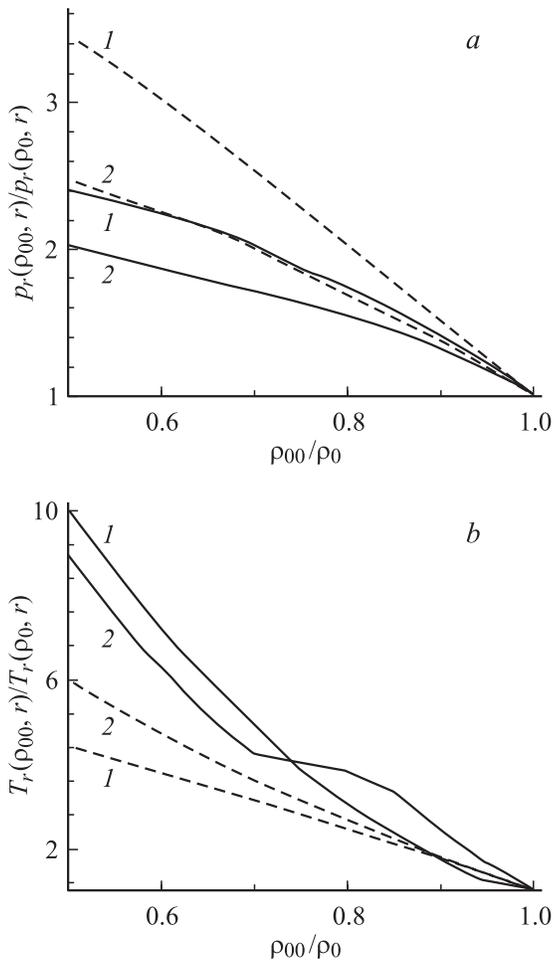


Рис. 3. Относительные изменения давления p_r (a) и температуры T_r (b) в отраженной ударной волне при $r = r_0/10$ в алюминии (сплошные линии) и графите (штриховые) для сферической (1) и цилиндрической (2) волны.

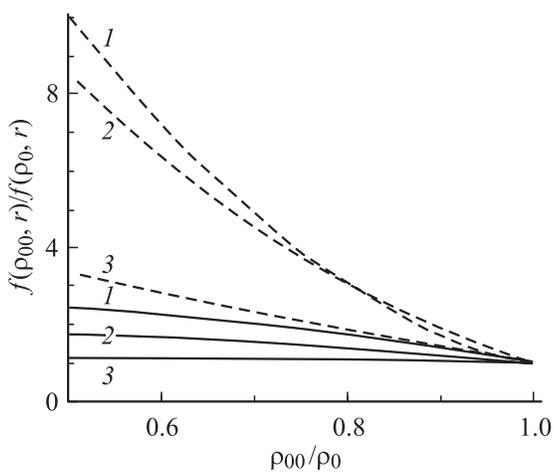


Рис. 4. Сферические ударные волны разной интенсивности в алюминии: 1 — алюминиевый ударник, $u_0 = 1$ km/s; 2 и 3 — стальной ударник, $u_0 = 1$ и 2 km/s соответственно; $f = p_r$ (сплошные линии) и T_r (штриховые); $r = r_0/10$.

сферической волне. Температура T_r в алюминии растет примерно одинаково для сферической и цилиндрической волн, а в графите растет сильнее для цилиндрической волны.

Представляемые на рис. 4 результаты отвечают на вопрос о том, что происходит при увеличении интенсивности ударной волны. В качестве пористого вещества рассматривается только алюминий, поскольку для графита при высоких давлениях и температурах возможны фазовые превращения со значительным скачком плотности, что окажет основное влияние на течение всего процесса. Для случая сферической волны приводятся результаты расчета, относящиеся к трем ударникам: рассмотренному выше алюминиевому ударнику с $u_0 = 1$ km/s и стальным ударникам со скоростями $u_0 = 1$ и 2 km/s. Для первого стального ударника давление в сходящейся волне вполне при $r = r_0/10$ и $\rho_{00} = \rho_0$ увеличивается примерно в 1.5 раз по сравнению с алюминиевым ударником. Для ударника с $u_0 = 2$ km/s давление увеличивается еще примерно в 2.4 раза. Как видно из рис. 4, с увеличением интенсивности сходящейся волны заметно падает скорость роста давления и температуры в отраженной волне при уменьшении ρ_{00} . В частности, для стального ударника с $u_0 = 2$ km/s давление в отраженной волне уже не увеличивается с уменьшением ρ_{00} .

Выше были рассмотрены характеристики течения, связанные с фронтом ударной волны. Перейдем теперь к характеристикам всего сжимаемого объема. На рис. 5 приведен типичный пример зависимости от времени радиуса границы раздела ударника и сжимаемого шара $r_b(t)$, соответствующей средней плотности

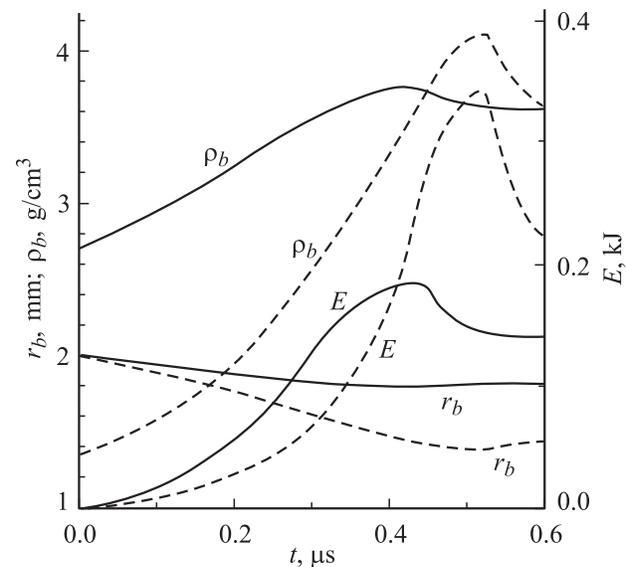


Рис. 5. Радиус алюминиевого шара r_b , его средняя плотность ρ_b и полная внутренняя энергия E в зависимости от времени для $m_p = 1$ (сплошные линии) и 2 (штриховые); алюминиевый ударник, $u_0 = 1$ km/s.

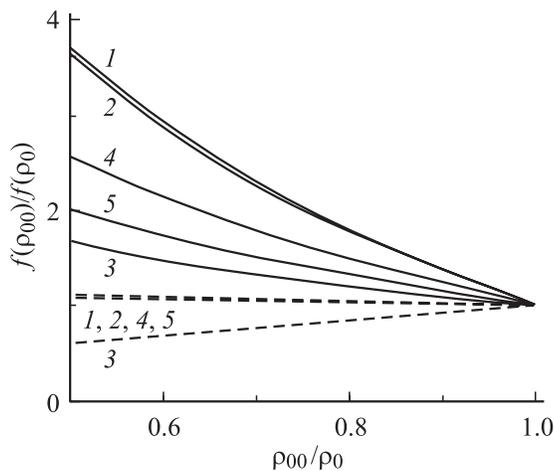


Рис. 6. Относительные изменения максимальных по времени средних величин: $f = \varepsilon_{b \max}$ (сплошные линии) и $\rho_{b \max}$ (штриховые) в графите (1), алюминии (2) и совершенном газе (3) для алюминиевого ударника с $u_0 = 1$ км/с, а также в алюминии для стального ударника с $u_0 = 1$ (4) и 2 км/с (5).

$\rho_b(t) = m/v_b(t)$, где $v_b = 4\pi r_b^3/3$ — объем шара, m — его масса

$$m = 4\pi \int_0^{r_b} \rho r^2 dr = \text{const},$$

и полной внутренней энергии

$$E(t) = 4\pi \int_0^{r_b} \varepsilon \rho r^2 dr.$$

Видно, что функции $\rho_b(t)$ и $E(t)$ имеют максимум. В качестве интегральных характеристик были выбраны $\rho_{b \max}$ и $\varepsilon_{b \max} = E_{\max}/m$. Последняя величина является максимальной по времени средней внутренней энергией единицы массы.

На рис. 6 приведены относительные изменения этих характеристик при изменении ρ_{00} в совершенном газе, графите и алюминии для разных интенсивностей ударных волн. Для графита и алюминия во всех вариантах $\rho_{b \max}$ очень слабо зависит от ρ_{00} . Для совершенного газа $\rho_{b \max}$ уменьшается вместе с ρ_{00} примерно так же, как и плотность на фронте сходящейся волны. Наиболее значительный рост $\varepsilon_{b \max}$ имеет место в алюминии и графите для алюминиевого ударника с $u_0 = 1$ км/с. При увеличении интенсивности сходящейся волны скорость роста $\varepsilon_{b \max}$ заметно падает, приближаясь к скорости роста в совершенном газе.

В заключение этого раздела укажем на возможный механизм поддержания плотности за фронтом сходящейся волны в пористом веществе на столь же высоком уровне, что и для вещества без пор. Как видно из рис. 2, при $r_b = r_0$, т.е. в момент входа ударной волны в пористое вещество, плотность за фронтом ρ уменьшается с уменьшением ρ_{00} , а давление p_r почти

не зависит от ρ_{00} . Последнее означает, что скорость вещества при $r_b = r_0$ увеличивается с уменьшением ρ_{00} , так как давление p уменьшается. Увеличенная скорость в сходящемся течении приводит к усилению кумулятивного эффекта и соответственно к большему относительному росту плотности по сравнению со случаем кристаллической начальной плотности. Это увеличение, как показывают вышеприведенные расчеты, во многих случаях компенсирует уменьшение плотности за счет наличия пор.

Сходящаяся ударная волна в конической твердотельной мишени

Рассматривается следующая задача (рис. 7). На стальную мишень со скоростью 2.5 км/с налетает алюминиевый ударник. Внутри мишени находится полость в форме обрезанного конуса, заполненная графитом. Угол раствора конуса 75° , радиус меньшего основания 1 мм, высота полости 7 мм. Течение в ударнике рассматривается в рамках уравнений гидродинамики. Для описания течения в мишени и графите используются как уравнения гидродинамики, так и более общая модель гипотупругой, идеально-пластической среды. Начальная плотность графита ρ_{00} менялась в пределах $\rho_0 = 2.265 \text{ г/см}^3 \geq \rho_{00} \geq 1.1 \text{ г/см}^3$. Так как целью настоящей работы было исследование влияния пористости на величину давления, фазовый переход в графите, также влияющий на величину давления, не учитывался.

Приведем уравнения, описывающие осесимметричные течения гипотупругой, идеально-пластической среды (см., например, работы [13,14]). В цилиндрических координатах r, z, ϑ все функции полагаются независимыми от ϑ . Вектор скорости \mathbf{u} имеет две компоненты: u_r и u_z . Отличными от нуля компонентами тензора напряжений являются $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ и $\sigma_{\vartheta, \vartheta}$, которые для краткости будем обозначать σ_r, σ_z, τ и σ_ϑ соответственно. Уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и

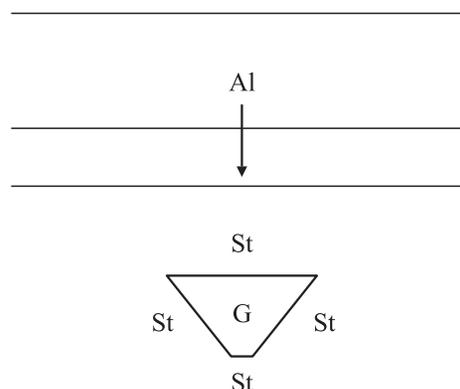


Рис. 7. Схема процесса ударного нагружения алюминиевым ударником (Al) стальной мишени (St) с конической полостью, заполненной графитом (G).

энергии, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \rho \frac{du_r}{dt} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r}, \quad \rho \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau}{\partial r}, \\ \rho \frac{d(\varepsilon + |\mathbf{u}|^2/2)}{dt} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r(\sigma_r u_r + \tau u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(\tau u_r + \sigma_z u_z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_r \partial/\partial r + u_z \partial/\partial z$ — лагранжева производная по времени.

Из тензора напряжений выделяется девиаторная часть: $\sigma_r = -p + s_r$, $\sigma_z = -p + s_z$, $\sigma_\vartheta = -p + s_\vartheta$, где p — давление; s_r, s_z, s_ϑ — диагональные элементы девиатора тензора напряжений, удовлетворяющие условию

$$s_r + s_z + s_\vartheta = 0. \quad (14)$$

Уравнения (13) замыкаются уравнениями состояния (11) и уравнениями, описывающими эволюцию компонент девиатора,

$$\begin{aligned} \frac{ds_r}{dt} - \tau \psi &= 2G\varphi_r - \frac{2}{3} G \operatorname{div} \mathbf{u} - \lambda s_r, \quad \psi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \frac{ds_z}{dt} + \tau \psi &= 2G\varphi_z - \frac{2}{3} G \operatorname{div} \mathbf{u} - \lambda s_z, \\ \frac{ds_\vartheta}{dt} &= 2G\varphi_\vartheta - \frac{2}{3} G \operatorname{div} \mathbf{u} - \lambda s_\vartheta, \\ \frac{d\tau}{dt} + \frac{s_r - s_z}{2} \psi &= G\varphi_{rz} - \lambda \tau, \end{aligned} \quad (15)$$

где в левой части стоит производная Яуманна по времени от компонент тензора; G — задаваемый модуль сдвига среды; $\varphi_r = \partial u_r/\partial r$, $\varphi_z = \partial u_z/\partial z$, $\varphi_\vartheta = u_r/r$, $\varphi_{rz} = \partial u_r/\partial z + \partial u_z/\partial r$ — компоненты тензора скоростей деформаций.

Для определения s_ϑ можно пользоваться и формулой (14), которая следует из (15) в силу равенства $\varphi_r + \varphi_z + \varphi_\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u}$. Функция λ выбирается так, чтобы выполнить условие Мизеса для пластического течения

$$Q = s_r^2 + s_z^2 + s_\vartheta^2 + 2\tau^2 \leq \frac{2}{3} Y^2, \quad (16)$$

где Y — задаваемый предел текучести среды.

Можно убедиться, что из (15) следует формула

$$\frac{dQ}{dt} = W - \lambda Q,$$

$$W = 2G(\varphi_r s_r + \varphi_z s_z + \varphi_\vartheta s_\vartheta + \varphi_{rz} \tau). \quad (17)$$

Поэтому если положить

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \quad \text{при } Q < 2Y^2/3, \\ \lambda &= 3W/2Y^2 \quad \text{при } Q = 2Y^2/3, \end{aligned} \quad (18)$$

то из (17) при $Q = 2Y^2/3$ следует $dQ/dt = 0$.

Опуская описание используемого численного метода, остановимся на его некоторых особенностях. Если положить предел текучести $Y = 0$, то девиатор тензора напряжений зануляется и выписанные выше уравнения переходят в уравнения гидродинамики. Аналогичным свойством обладает численный метод. При $Y = 0$ он переходит в метод для уравнений гидродинамики второго порядка точности на подвижных регулярных сетках с явным выделением границ раздела сред в виде линий сетки, который использовался в наших предыдущих исследованиях [1].

Следуя работе [13], уравнения (15) аппроксимируются без последних слагаемых, отвечающих за пластичность течения. Вместо этого на каждом шаге по времени при нарушении условия Мизеса (16) все компоненты девиатора домножаются на один и тот же коэффициент, обеспечивающий выполнение (16). Как было показано Григорьяном С.С. в примечании к работе [13] (см. также [15]), такой алгоритм дает разностную схему, аппроксимирующую уравнения (15) и (18).

Были реализованы два варианта метода сквозного счета через фронт головной ударной волны, идущей по пористому веществу. Первый метод, основанный на простой модели кинетики пор, описан в предыдущем разделе. Второй метод построен на модели [1] смеси двух фаз: графита и совершенного газа с начальной плотностью ρ_g , определяемой по начальным давлению и температуре. Массовая концентрация газа в смеси β постоянна и определяется из условия $\rho_{00}^{-1} = \beta \rho_g^{-1} + (1 - \beta) \rho_0^{-1}$. Очень хорошее совпадение результатов контрольных расчетов, выполненных обоими методами, указывает на то, что метод сквозного счета не вносит заметных искажений в решение задачи.

Основные расчеты проводились на сетке в графите 25×50 , где первая цифра — число интервалов вдоль основания конуса, вторая — вдоль оси симметрии. Проводились также контрольные расчеты на сетке, в 2 раза более подробные по обоим направлениям.

Вначале будут представлены результаты расчетов чисто гидродинамической задачи с $Y = 0$. На рис. 8 приведены изобары в исходно пористом графите с $\rho_{00} = 1.7 \text{ г/см}^3$ в четыре последовательных момента времени. На рис. 8, а, соответствующем первому моменту времени, видны головная плоская ударная волна вблизи оси симметрии и боковой импульс сжатия, идущий из угла при основании конуса. Точный расчет параметров головной плоской ударной волны, основанный на законах сохранения, дает давление за фронтом $\sim 9 \text{ ГПа}$. Численный метод дает примерно такое же значение, что говорит о его неплохой точности. Заметим, что в случае сплошного графита давление за фронтом головной волны увеличивается до $\sim 17 \text{ ГПа}$.

Далее, как видно из рис. 8, б и с, возникает сходящаяся ударная волна, близкая к сферической. Механизмом ограничения кумуляции в этой волне является деформация стенок конуса. Рис. 8, д отвечает моменту времени после схлопывания волны.

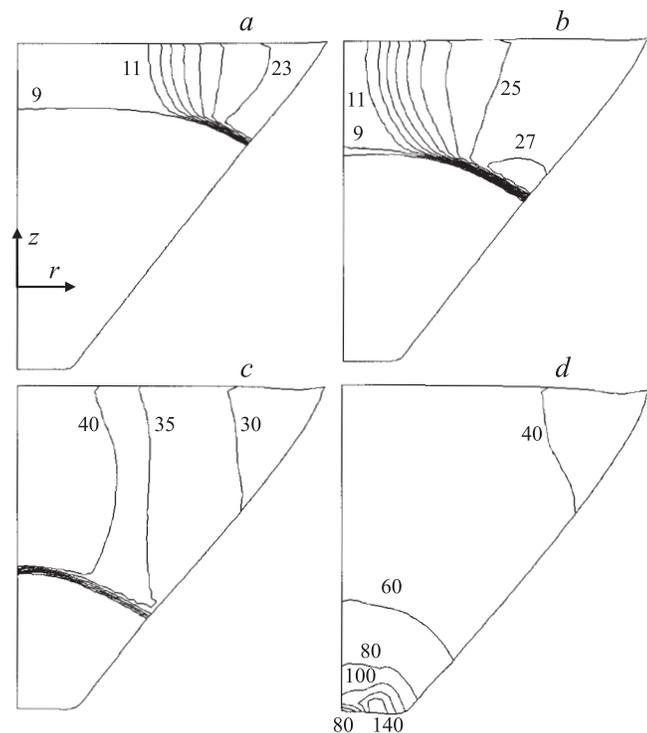


Рис. 8. Изобары в конической мишени из пористого графита при $t = 2$ (a), 2.25 (b), 2.5 (c) и $2.75 \mu\text{s}$ (d): цифры — давление в GPa.

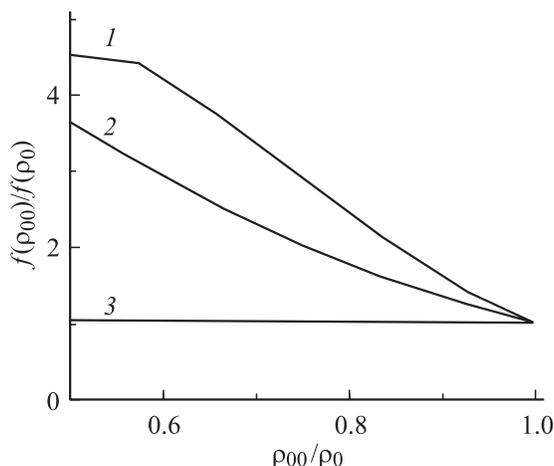


Рис. 9. Характеристики течения в конической мишени: $f = p_{\text{max}}$ (1), ε_{max} (2) и ρ_{max} (3).

В качестве аналога давления p_r в отраженной одномерной волне возьмем максимальное по времени и пространству давление p_{max} . Так же, как и для одномерных течений, можно ввести максимальные по времени среднюю плотность ρ_{max} и среднюю внутреннюю энергию ε_{max} . Относительные изменения этих величин при изменении ρ_{00} показаны на рис. 9. Так же, как и в одномерных сходящихся волнах, уменьшение ρ_{00} приводит к существенному увеличению p_{max} и ε_{max} при почти неизменном ρ_{max} .

Увеличение давления и температуры графита при уменьшении ρ_{00} носит далеко не локальный характер. Чтобы это продемонстрировать, возьмем некоторые достаточно большие давление $p_* = 40$ GPa и температуру $T_* = 1500$ K и определим функции

$$\beta_p(t) = \int_{p > p_*} \rho dV/m, \quad \beta_{pT}(t) = \int_{p > p_*, T > T_*} \rho dV/m,$$

где m — полная масса графита.

Функцию $\beta_p(t)$ назовем массовой долей графита высокого давления, $\beta_{pT}(t)$ — массовой долей высокотемпературного графита высокого давления. Последняя величина примерно соответствует массовой доле графита, сжатого до высокого давления в сходящейся волне, так как при повторном сжатии в отраженной волне температура увеличивается незначительно.

На рис. 10 приведены функции $\beta_p(t)$ и $\beta_{pT}(t)$ для сплошного и пористого графита с $\rho_{00} = 2.265, 1.9$ и 1.7 g/cm^3 . В случае сплошного образца давление $p > p_*$ имеет $\sim 10\%$ графита в течение $\sim 0.5 \mu\text{s}$, а графита с $p > p_*$ и $T > T_*$ практически нет (менее 0.1%). Для пористого образца с $\rho_{00} = 1.9 \text{ g/cm}^3$ доля графита с $p > p_*$ значительно возрастает, приближаясь к 1 на небольшом интервале времени. Давление $p > p_*$ и температуру $T > T_*$ имеют уже $\sim 10\%$ графита в течение $\sim 0.5 \mu\text{s}$. При уменьшении ρ_{00} до 1.7 g/cm^3 весь графит в течение $\sim 0.5 \mu\text{s}$ имеет давление $p > p_*$. Доля графита с $p > p_*$ и $T > T_*$ увеличивается примерно до 30% , а время существования такого графита возрастает до $\sim 1 \mu\text{s}$.

В заключение приведем результаты, относящиеся к модели гипопругой идеально-пластической среды. Значение предела текучести Y для одного и того же материала может значительно меняться в разных экспериментах. Например, в [16] для стали марки X18H10T приведено значение $Y = 0.26$ GPa, полученное из некоторых

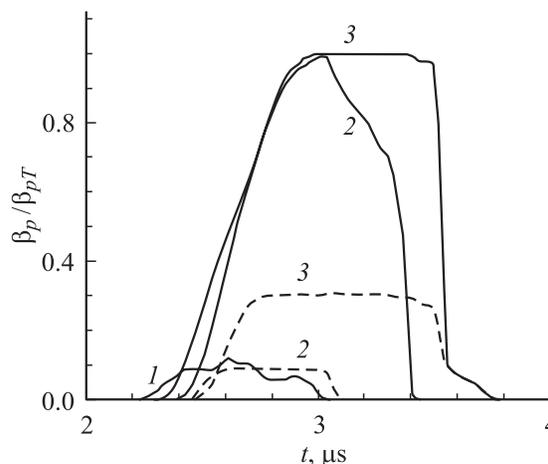


Рис. 10. Массовая доля графита высокого давления β_p (сплошные линии) и высокотемпературного графита высокого давления β_{pT} (штриховые) от времени для $\rho_{00} = 2.265$ (1), 1.9 (2) и 1.7 g/cm^3 (3).

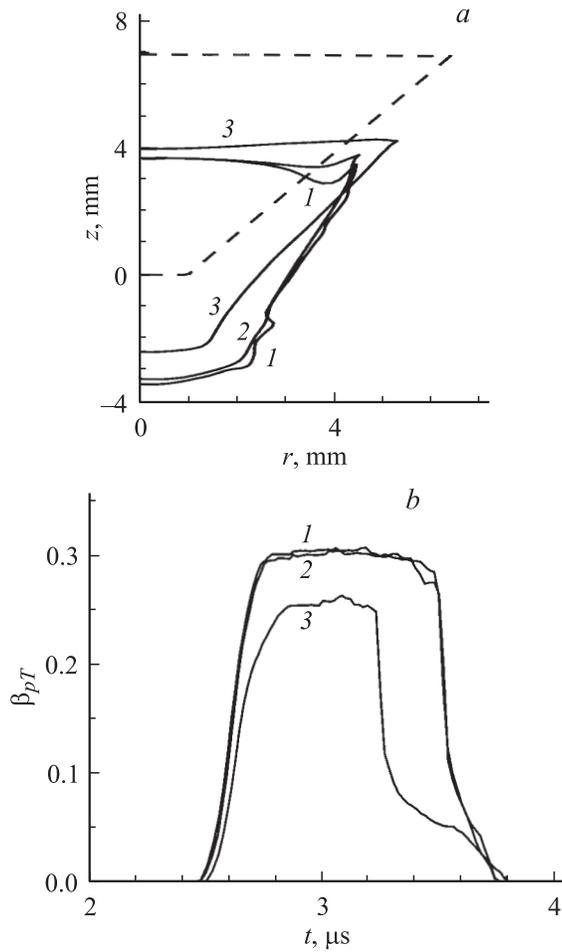


Рис. 11. Сравнение решений для $Y = 0$ (1), 0.26 (2) и 4.6 GPa (3) в стали, $G = 80$ GPa; *a* — граница графитовой полости при $t = 0$ (штриховая линия) и $5 \mu\text{s}$ (сплошные линии); *b* — массовая доля высокотемпературного графита высокого давления от времени.

экспериментов с ударными волнами. В то же время в работе [17] утверждается, что в сильных ударных волнах в металлах напряжения сдвига сравнимы с теоретической прочностью на сдвиг $k = Y/\sqrt{3}$, в качестве которой можно взять величину $G/30$ [18]. Для стали типичное значение $G = 80$ GPa [18,19]. В результате получаем $Y \approx 4.6$ GPa, что, по-видимому, является верхней оценкой возможных значений Y в стали.

На рис. 11 для случая $\rho_{00} = 1.7 \text{ g/cm}^3$ представлены граница графитовой полости при $t = 5 \mu\text{s}$ и функция $\beta_{pT}(t)$ для значений предела текучести в стали $Y = 0, 0.26$ и 4.6 GPa. Видно, что расчеты для $Y = 0$ и 0.26 GPa практически совпадают. Для $Y = 4.6$ GPa сдвиговые напряжения уже играют заметную роль: изменилась деформация графитовой полости, массовая доля β_{pT} уменьшилась с ~ 30 до $\sim 25\%$, время существования области высокотемпературного графита высокого давления уменьшилось до $\sim 0.5 \mu\text{s}$. Такое уменьшение связано с ослаблением бокового импульса сжатия, который формирует сходящуюся ударную волну. Тем не менее эффект при

переходе от сплошного графита к пористому остается очень сильным, так как для сплошного графита $\beta_{pT} = 0$.

Модуль упругости графита $G \sim 0.1$ GPa значительно меньше, чем у стали. Соответственно меньше и предел текучести Y . Выполненные расчеты с $G = 0.1$ GPa и $Y = 0.05$ GPa в графите показали, что сдвиговые напряжения в графите не оказывают заметного влияния на решение задачи.

Заключение

Решения уравнений гидродинамики сжимаемых сред, описывающие одномерные сходящиеся ударные волны умеренной интенсивности в твердых телах, обладают следующим свойством. При уменьшении начальной плотности твердого тела увеличиваются давление и температура в отраженной волне. Существенно увеличивается и максимальная по времени средняя внутренняя энергия всей массы сжимаемого вещества. Плотность на фронте сходящейся волны при заданном радиусе, как и максимальная по времени средняя плотность всей массы сжимаемого вещества, слабо зависит от начальной пористости.

Для уравнения состояния совершенного газа зависимости характеристик течения от исходной плотности имеют качественно иной характер, что связано с вырождением ударной адиабаты совершенного газа в приближении сильной волны, когда плотность за фронтом волны однозначно определяется начальной плотностью.

При высоких интенсивностях сходящейся волны давление за фронтом отраженной волны почти перестает зависеть от начальной пористости образца, а температура и средняя внутренняя энергия вещества в отраженной волне увеличиваются при уменьшении исходной плотности в существенно меньшей степени, чем при низких интенсивностях.

Увеличение давления в отраженной волне при уменьшении начальной плотности имеет место также в двумерной задаче об ударном сжатии графита в стальной мишени с конической полостью, в которой сходящаяся ударная волна не является сферической, а ее кумуляция ограничена деформацией стенок мишени. При уменьшении начальной плотности значительно возрастают как массовая доля графита, сжатого до высокого давления, так и время удержанного высокого давления в мишени. Эффект сохраняется и при учете возможных сдвиговых напряжений в мишени в рамках модели гипопругой идеально-пластической среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-01-00051 и 04-02-16471), Российской академии наук (программа № 3 ОМН) и Совета по грантам Президента РФ (гранты № МК-2103.2003.08 и МК-2572.2004.8).

Авторам также приятно выразить свою благодарность Фонду содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчян А.А., Шуришалов Л.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 66–75.
- [2] Чарахчян А.А., Ломоносов И.В., Милляевский В.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А., Хищенко К.В., Шуришалов Л.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 1. С. 72–77.
- [3] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
- [4] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [5] Khishchenko K.V., Fortov V.E., Lomonosov I.V., Pavlovskii M.N., Simakov G.V., Zhernokletov M.V. // Shock Compression of Condensed Matter – 2001 / Ed. M.D. Furnish, N.N. Thadhani, Y. Horie. New York: AIP, 2002. P. 759–762.
- [6] Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчян А.А., Шуришалов Л.В. // ТВТ. 2003. Т. 41. № 4. С. 515–526.
- [7] Bushman A.V., Fortov V.E., Kanel' G.I., Ni A.L. Intense Dynamic Loading of Condensed Matter. Washington: Taylor & Francis, 1993.
- [8] Коломеец А.С. // ДАН СССР. 1956. Т. 109. № 1. С. 49–52.
- [9] Андрианкин Э.И., Корявов В.П. // ДАН СССР. 1959. Т. 128. № 2. С. 257–260.
- [10] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П., Крайко А.Н. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
- [11] Бушман А.В., Ломоносов И.В., Фортвов В.Е. Уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии. Черноголовка: ИХФЧ РАН, 1992.
- [12] Жук А.З., Иванов А.В., Канель Г.И. // ТВТ. 1991. Т. 29. № 3. С. 486–493.
- [13] Уилкинс М.Л. // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
- [14] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
- [15] Кукуджанов В.В. // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 98–108.
- [16] Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые течения в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996.
- [17] Макаров П.В. // Ударные волны и экстремальные состояния вещества. М.: Наука, 2000. С. 219–254.
- [18] Киттель Ч. Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1965.
- [19] Слепцова Г.П. // Физический энциклопедический словарь. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1963. С. 273–274.