

03;07

Волновая неустойчивость слоя расплавленного металла, образующегося при интенсивных лазерных воздействиях

© Ф.Х. Мирзаде

Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН,
140700 Шатура, Московская область, Россия
e-mail: fmizade@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 20 мая 2004 г.)

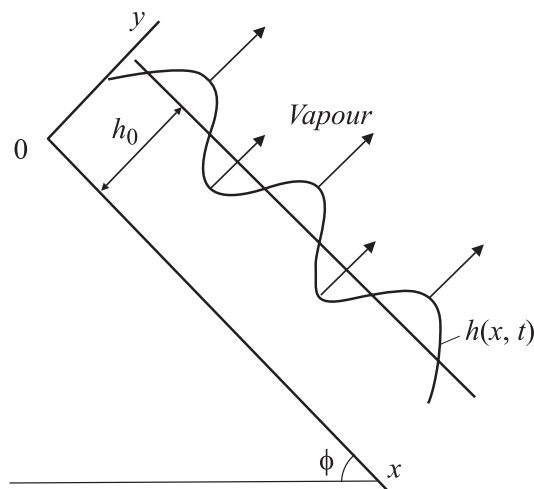
Теоретически исследована волновая структура течения расплавленного металла на стенках парогазовой каверны, образующейся при глубоком проникновении мощного лазерного излучения в конденсированные среды, с учетом действия сил поверхностного натяжения, гравитации, термокапиллярного эффекта и неоднородного испарения со свободной поверхности расплава. Выведено длинноволновое эволюционное уравнение, описывающее генерацию нелинейных волн на свободной поверхности плоского слоя расплавленного металла. Получены пространственно-периодическое бегущее решение этого уравнения и основные характеристики (амплитуда, период) нелинейных волновых структур.

Эволюция возмущений свободной поверхности расплавленного металла, образующегося при воздействии высокоинтенсивных внешних потоков энергии (лазерного и электронного пучков) на конденсированные среды, определяется действием капиллярных и термокапиллярных сил, а также сил давления отдачи паров. Значительную роль в динамике волновых возмущений может играть также процесс непосредственного выноса массы вещества при пространственно неоднородном испарении. Движущийся под действием различных сил слой вязкой жидкости представляет собой пример активно-диссипативной конденсированной среды, накачку энергии в которой обеспечивают внешние силы (например, гравитационные или термокапиллярные силы), а диссипацию — силы вязкого трения [1]. Неустойчивость поверхности раздела фаз оказывает значительное влияние на поведение тепло- и массообменных процессов, прежде всего из-за волнообразования, турбулизации и отрыва капель.

Теоретическому рассмотрению волновых процессов, сопровождающих течение тонких слоев вязкой жидкости в линейной и нелинейной подстановках для случая свободного стекания, посвящено много работ (см., например, [1,2]). В парогазовой каверне, образующейся при каналированном проникновении интенсивных лазерных пучков в металлы, исследование гидродинамических неустойчивостей, приводящих к возникновению на расплавленных стенках каверны нелинейных волновых структур (например, нелинейных периодических волн), значительно усложняется благодаря их взаимосвязи с процессами теплопереноса, испарения и взаимодействия паров металла с внешним потоком энергии [3]. В данной работе в качестве первого приближения исследуется возникновение нелинейных поверхностных волновых структур при течении вдоль фронта плавления плоского слоя расплавленного металла на передней стенке каверны (с конической конфигурацией), с учетом действия сил поверхностного натяжения, гравитации, термокапил-

лярного эффекта, а также неоднородного испарения со свободной поверхности расплава.

Рассматривается движение испаряющегося под воздействием лазерного излучения слоя вязкой несжимаемой жидкости, ограниченного с одной стороны парогазовым потоком, а с другой — плоской полубесконечной поверхностью, имеющей угол наклона ϕ к горизонту. Течение принимается двумерным и периодическим с длиной волны Λ_0 . Схема течения приведена на рисунке. Система координат выбрана таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль, а ось y — перпендикулярно невозмущенной границе раздела фаз. Уравнение свободной поверхности $y = h(x, t)$, h — толщина расплава; t — время; $y = 0$ — поверхность фазового перехода твердое тело — жидкость. Процесс происходит в вакууме. Поглощение энергии излучения в паровой фазе не учитывается.



Волновое течение расплавленного металла вдоль фронта плавления. $h(x, t)$ — толщина расплава; ϕ — угол наклона.

В рамках принятых допущений уравнения динамики расплава и теплопереноса имеют вид [3,4]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad (3)$$

где $\mathbf{v} = (u, v)$ — вектор скорости расплава с компонентами u и v в направлениях x и y соответственно, p — давление, ρ — плотность, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, ν — кинематическая вязкость, T — температура, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — лапласиан.

Здесь (1) — уравнение непрерывности, (2) — уравнения Навье–Стокса для двух компонент скорости, (3) — уравнение теплопроводности. Решение системы уравнений (1)–(3) должно удовлетворять следующим граничным условиям: на свободной поверхности ($y = h(x, t)$) [5]

$$q \equiv \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(i)}) \cdot \mathbf{n} = \rho^{(v)}(\mathbf{v}^{(v)} - \mathbf{v}_{(i)}) \cdot \mathbf{n}, \quad (4)$$

$$q\lambda_v + k\nabla T \cdot \mathbf{n} - k^{(v)}\nabla T^{(v)} \cdot \mathbf{n} - q_L = 0, \quad (5)$$

$$p - p^{(v)} + q_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(v)}) \cdot \mathbf{n} - (s - s^{(v)}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2\sigma(T)H, \quad (6)$$

$$q_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(v)}) \cdot \boldsymbol{\tau} - (s - s^{(v)}) \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla \sigma \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(v)})\boldsymbol{\tau} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{n} = (-h_x, 1)/Y, \quad \boldsymbol{\tau} = (1, h_x)/Y, \quad Y = (1 + h_x^2)^{1/2};$$

на границе раздела фаз жидкость–твердое тело ($y = 0$)

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_m.$$

Здесь q — плотность потока массы за счет испарения жидкости; $\mathbf{v}_{(i)}$ — вектор скорости частиц поверхности раздела жидкость–пар; величины с верхним индексом соответствуют пару, а без него — жидкости; λ_v — скрытая теплота парообразования; $k, k^{(v)}$ — коэффициенты теплопроводности жидкости и пара соответственно; s — тензор вязких напряжений; q_L — поглощенная энергия излучения; T_m — температура плавления; $2H = \nabla \cdot \mathbf{n}$ — средняя кривизна свободной поверхности; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — орты нормального и тангенциального векторов.

Уравнение (4) представляет собой определение потока массы (q) и его закон сохранения, уравнения (5)–(7) описывают законы сохранения энергии и двух компонент импульса: нормальных и тангенциальных соответственно. Уравнение баланса энергии учитывает поглощение энергии лазерного излучения, потери энергии на испарение и теплопроводность. Влияние вязкой диссипации, а также радиационных потерь на свободной поверхности расплава на тепловой баланс не рассматривается. Условие (8) означает непрерывность тангенциального составляющего скорости на фазовой границе. Поверхностное натяжение расплава σ связано с температурой соотношением $\sigma(T) = \sigma_v - \sigma_T(T - T_v)$, $\sigma_T = -d\sigma/dT$ —

температурный коэффициент поверхностного натяжения. Для большинства жидкостей $\sigma_T > 0$. Плотность, коэффициенты вязкости и теплопроводности расплава считаются не зависящими от температуры.

Для тензора напряжений имеем: $s = \mu_v(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$, где μ_v — кинематическая вязкость. Граничные условия (4)–(8) необходимо дополнить формулой [5]

$$q = \left(\frac{k_0 \rho_v \lambda_v}{T_v^{3/2}} \right) \left(\frac{M_w}{2\pi r_g} \right) (T - T_v) \quad (9)$$

(k_0 — коэффициент аккомодации, r_g — универсальная газовая постоянная, M_w — молекулярный вес жидкости, T_v — температура фронта испарения), описывающей зависимость плотности потока массы от локальной температуры на свободной поверхности.

Рассмотрим плоское течение испаряющегося слоя вязкой жидкости по наклонной поверхности. При любых числах Рейнольдса (Re) система уравнений Навье–Стокса и теплопроводности имеет стационарное пространственно неоднородное решение, задающее толщину пленки h_0 , распределение температуры T_0 и поле скоростей V_0 . Такой режим течения неустойчив к бесконечно малым возмущениям даже при очень малых Re. Рост длинноволновых возмущений ограничивается нелинейными эффектами и приводит к формированию нелинейных волновых режимов конечной амплитуды.

Пусть v_0 — характерная скорость, равная максимальной величине x составляющей скорости течения расплава, достигаемой на верхней (свободной) границе слоя расплава при ламинарном течении. Используя $h_0/v_0, v_0, \rho v_0^2, \Delta T = T_v - T_m, k\Delta T/h_0\lambda_v$ как масштабы времени, скорости, давления, температуры и плотности потока массы, введем безразмерные переменные по следующим формулам:

$$(x', y', t') = \left(\frac{\varepsilon x}{h_0}, \frac{y}{h_0}, \frac{\varepsilon v_0 t}{h_0} \right),$$

$$h' = \frac{h}{h_0}, \quad (u', v') = \left(\frac{u}{v_0}, \frac{v}{\varepsilon v_0} \right),$$

$$p' = \frac{p}{\rho v_0^2}, \quad v_0 = \frac{g(1 - \Lambda_\rho)}{2\nu} h_0^2, \quad q' = \frac{h_0 \lambda_v q}{k \Delta T},$$

$$\Delta T = \frac{q_L h_0}{k}, \quad T' = \frac{T - T_m}{\Delta T}.$$

Здесь для продольной координаты введен продольный масштаб Λ_0 , имеющей порядок длины волны возмущений на поверхности расплава; h_0 — масштаб толщины слоя расплава (например, средняя толщина), зависящий только от продольной координаты (x), $\Lambda_\rho = \rho^{(v)}/\rho$. С целью упрощения записей в дальнейшем штрихи над безразмерными переменными опускаем, полагая $x = x', y = y', h = h'$ и т.д. При этом система уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4)–(8) запишется как

$$u_x + v_y = 0, \quad (10)$$

$$u_t + v u_y + u v_x = (\varepsilon \text{Fr})^{-1} - p_x + (\varepsilon \text{Re})^{-1} \Delta u, \quad (11)$$

$$\varepsilon^2(v_t + vv_y + uv_x) = -\text{ctg}\phi\text{Fr}^{-1} - p_y + \varepsilon\text{Re}^{-1}\Delta v, \quad (12)$$

$$T_t + vT_y + uT_x = (\varepsilon\text{Pe})^{-1}\Delta T. \quad (13)$$

На свободной поверхности $y = h(x, t)$

$$q = \varepsilon K(v - h_t - uh_x)Y^{-1}, \quad (14)$$

$$\varepsilon K(v - h_t - uh_x)Y^{-1} + (T_y - \varepsilon^2 h_x T_x)Y^{-1} + q_L = 0, \quad (15)$$

$$p + \varepsilon^2 W h_{xx} Y^{-3} - K^{-2}[(T_y - \varepsilon^2 h_x T_x)Y^{-1} - q_L]^2 + 2\varepsilon\text{Re}^{-1}u_x(1 + \varepsilon^2 h_x^2)(1 - \varepsilon^2 h_x^2)^{-1} = 0, \quad (16)$$

$$4\varepsilon^2 u_x h_x - (u_y + \varepsilon^2 v_x)(1 - \varepsilon^2 h_x^2) = 2\varepsilon\text{Ma}\text{Pr}^{-1}(T_x + T_y h_x)Y, \quad (17)$$

на границе раздела фаз жидкость–твердое тело ($y = 0$) $u = v = 0, T = 0$.

В (10)–(17) в качестве параметров использовались число Рейнольдса $\text{Re} = v_0 h_0 / \nu$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu / \chi$, число Пекле $\text{Pe} = \text{Re}\text{Pr}$, число Вебера $W = \sigma / \rho v_0^2 h_0$, число Кутателадзе $\text{Ku} = \lambda_v / C_p \Delta T$, число Фруда $\text{Fr} = v_0^2 / g h_0 \sin \phi$, число Марангони $\text{Ma} = \sigma_T \Delta T h_0 / 2\rho \nu k$, $K = \text{Re}\text{Pr}\text{Ku}$, $F = \text{Re}/\text{Fr}$, $\Omega = 2\lambda_v / v_0^2$, $\varepsilon = h_0 / \Lambda_0$, где C_p — теплоемкость, χ — температуропроводность, $q_L = \alpha_L I$ (I — интенсивность лазерного излучения, α_L — коэффициент поглощения). Индекс $i = (x, y, t)$ означает частную производную по соответствующей переменной.

Заметим, что параметр K^{-1} представляет собой отношение вязкостного масштаба времени $t_v = h_0^2 / \nu$ к испарительному масштабу времени $t_E = h_0^2 \lambda_v / k \Delta T$ (t_E — время, необходимое для полного испарения жидкости): $K^{-1} = E = k \Delta T / \rho \nu \lambda_v$.

Уравнение (9) после обезразмеривания принимает вид

$$q = N^{-1}(T - 1), \quad (18)$$

где $N = (kT_v^{3/2} / k_0 h_0 \rho^{(v)} \lambda_v^2) (2\pi r_g / M_w)^{1/2}$.

Параметр N характеризует величину неравновесности поверхности испаряющейся жидкости. Условие $N = 0$ соответствует квазиравновесному приближению, $N^{-1} = 0$ — отсутствию потока генерируемого пара (случай нелетучих жидкостей).

Запишем решение системы (10)–(18) в виде рядов по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ (длинноволновое приближение)

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l Z_l, \quad (19)$$

где $Z = \{u, v, p, q, T\}$.

Подставляя разложение (19) в (10)–(18) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε нулю, получаем систему дифференциальных уравнений. Решая ее, выражаем поля скоростей и температуры в виде полиномов от поперечной координаты с коэффициентами, зависящими от толщины $h(x, t)$ и ее производных. Используя далее условие (15) и ограничиваясь учетом

членов до порядка ε^2 включительно, для неоднородной толщины расплава получаем следующее эволюционное уравнение:

$$h_t + a(h) + b(h)h_x + c(h)h_{xx} + d(h)h_{xxx} + n_1(h)h_{tx} + n_2(h)h_t h_x + n_3(h)h_x^2 + n_4(h)h_x h_{xxx} = 0, \quad (20)$$

где $a, b, c, d, n_1, n_2, n_3, n_4$ определяются формулами

$$a(h) = (q_L h - 1) / \varepsilon K(h + N),$$

$$b(h) = F[(5\text{Re}/8K - 1)h^2 - ((5\text{Re}/6K)q_L - \text{ctg}\phi/3)h^3],$$

$$c(h) = \varepsilon\text{Re}[2(1 - q_L h)h^3 / 3\Lambda_\rho K^2(h + N)^3 + 2F^2 h^6 / 15 + \text{Ma}\text{Pr}^{-1}N(h/(h + N))^2],$$

$$d(n) = \text{Re}W\varepsilon^3 h^3 / 3, \quad n_1(h) = 5\varepsilon\text{Re}Fh^4 / 2,$$

$$n_2(h) = 5\varepsilon\text{Re}Fh^4 / 6,$$

$$n_3(h) = \varepsilon(9\text{Re}F^2 h^5 / 20 + h^2 \text{ctg}\phi / 2), \quad n_4(h) = \varepsilon\text{Re}Wh^2.$$

Таким образом, исследование движения испаряющегося слоя вязкой жидкости по наклонной плоской поверхности в рамках используемых ограничений сводится к анализу решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для неоднородной толщины $h(x, t)$. Второй член в левой части уравнения (20) описывает потери массы жидкости вследствие непосредственного испарения и воздействия внешнего потока энергии. Следующие два слагаемых учитывают влияние реактивной силы пара, действующей на поверхность расплава и термокапиллярного эффекта, пятый член — влияние поверхностного натяжения. Последующие же слагаемые характеризуют изменение толщины жидкости за счет действия инерционных сил.

Уравнение (20) в стационарном состоянии ($h_t = 0$) имеет пространственно неоднородное решение $h = h_0(x)$, описывающее безволновое стекание слоя расплава вдоль наклонной поверхности. В приближении первой производной толщины по координате это решение может быть найдено численно из уравнения $b(h_0)h_{0x} + a(h_0) = 0$.

Исследуем линейную устойчивость решения $h = h_0(x)$ и возможные нелинейные режимы, к которым может приводить развитие неустойчивых возмущений. Сделав в (20) замену $h = h_0 + \xi$ (ξ — возмущение свободной поверхности слоя) и проведя соответствующие преобразования, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению (которое ввиду его громоздкости здесь не приводится) в частных производных с коэффициентами, зависящими от x . Однако точное аналитическое решение этого уравнения, описывающее поведение возмущений (ε) как в пространстве, так и во времени, не представляется возможным. Анализ, однако, существенно упрощается, если ограничиться случаем больших $K \gg 1$ (или малых $\Delta T \ll \Delta T_* = \lambda_v \text{Re}\text{Pr}/C_p$). Например, для

значений параметров, характерных для расплава железа, $\Delta T_* = 10^3$ К. На фоне слабоменяющегося базисного течения будем рассматривать линейную устойчивость и возможные нелинейные пространственно-периодические (по координате x) решения. Такое приближение оправдано при выполнении неравенства $|d\xi/dx| \approx \varepsilon \gg |dh_0/dx|$, т. е. когда длина волны (λ) рассматриваемых периодических возмущений много меньше характерного масштаба изменения основного течения. Заметим, что используемый подход (квазипараллельное приближение) широко применяется в задачах с неоднородностью по пространственной переменной [1].

Учитывая вышесказанное, представим решение (20) в виде $h = 1 + \xi$, где 1 — равновесное значение безразмерной толщины. В результате имеем

$$\widehat{L}\xi = -\frac{1}{2}a''_1\xi^2 - \left(b'_1\xi + \frac{1}{2}b''_1\xi^2\right)\xi_x - \left(c'_1\xi + \frac{1}{2}c''_1\xi^2\right)\xi_{xx} - \left(d'_1\xi + \frac{1}{2}d''_1\xi^2\right)\xi_{xxx} + O(\xi^4), \quad (21)$$

где

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + a'_1 + b_1\frac{\partial}{\partial x} + c_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

($b_1, c_1, d_1, a'_1, b'_1, b''_1, c'_1, c''_1, d'_1, d''_1$ — значения a, b, c, d и их производных при $h = 1$, в дальнейшем индекс 1 у этих величин опускается).

Исследуем устойчивость тривиального решения $\xi \equiv 0$ относительно возмущений вида

$$\xi = \eta \exp[i\alpha(x - \gamma t)] + \text{к.с.}, \quad (22)$$

где $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ — безразмерный комплексный инкремент неустойчивости, γ_r — частота неустойчивости, γ_i — инкремент нарастания неустойчивости, η — амплитуда возмущений, $\alpha = 2\pi h_0/\lambda_0$ — безразмерное волновое число.

Подставляя (22) в линеаризованное уравнение $\widehat{L}\xi = 0$, находим

$$\gamma = -i(a' - c + d) + b,$$

отсюда

$$\gamma_r = F \left(1 + \frac{5}{6} \frac{\text{Re}}{K} \left(\frac{3}{4} - q_L \right) + \frac{\text{ctg } \phi}{3} \right),$$

$$\gamma_i = \frac{2\alpha \text{Re}}{3} \left[F^2/5 + (1 - q_L)/\Lambda_\rho K^2(1 + N)^3 + 3\text{Ma}N/2\text{Pr}(N + 1)^2 \right] - \text{Re}W\alpha^3/3 + (q_L N + 1)/\alpha K(N + 1)^2. \quad (23)$$

Если $\gamma_i > 0$, то возмущение нарастает со временем и безволновое течение неустойчиво. Если же $\gamma_i < 0$, то безволновое течение устойчиво. Условие $\gamma_i = 0$ определяет границу области нейтральной устойчивости.

Для максимального инкремента (γ_{im}) и периода волны (d_L) из (23) имеем

$$\gamma_{im} = \beta^2 \text{Re}/3W + E(q_L N + 1)/(1 + N)^2,$$

$$d_L = 2\pi/\alpha_* = 2\pi\sqrt{W\beta^{-1}}, \quad (24)$$

где

$$\beta = F^2/5 + E^2(1 - q_L)/\Lambda_\rho(1 + N)^3 + 3\text{Ma}N/2\text{Pr}(1 + N)^2.$$

Анализируя формулы (23) и (24), заметим, что потеря устойчивости происходит при некотором критическом значении числа $\text{Re}_* = 3$ (значения физических характеристик ($\text{Pr} = 4, W = 10^5, \text{Ku} = 6, \Lambda_\rho = 0.003$) соответствуют расплаву железа). Инерционные параметры (число Re) и термокапиллярный эффект (число Ma) играют дестабилизирующую роль в возникновении неустойчивости, а поверхностное натяжение (число W) оказывает стабилизирующую роль. При этом поперечный поток тепла в гребнях меньше, чем во впадинах. Следовательно, во впадинах толщина расплава растет, в результате малые возмущения свободной поверхности не развиваются. Для больших же значений Ku дестабилизирующая роль числа E^2 и, следовательно, силы реакции, вызванной большим потоком испаряющейся массы, а также инерционных эффектов становится доминирующей.

На нелинейной стадии развития неустойчивости введем набор пространственных и временных масштабов

$$x_n = \varepsilon^n x, \quad t_n = \varepsilon^n t \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом в выражениях для всех дифференциальных операторов в (21) производим замену

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_0} \right) + \dots,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \rightarrow \frac{\partial^4}{\partial x_0^4} + 4\varepsilon \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_0^3} + \varepsilon^2 \left(6 \frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial x_1^2} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x_2 \partial x_0^3} \right) + \dots$$

Разложим решение уравнения (21) в ряд по малому параметру ε , сохраняя члены

$$(\widehat{L}_0 + \varepsilon \widehat{L}_1 + \varepsilon^2 \widehat{L}_2)(\varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3) = -\varepsilon^2 N l_2 - \varepsilon^3 N l_3, \quad (25)$$

где

$$\widehat{L}_0 = \widehat{L}, \quad \widehat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + b \frac{\partial}{\partial x_1} + 2c \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_1} + 4d \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial x_1},$$

$$\widehat{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + c \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 6d \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x_1^2},$$

$$N l_2 = \frac{1}{2} a'' \xi_1^2 + b' \xi_1 \xi_{1x} + c' \xi_1 \xi_{1xx} + d' \xi_1 \xi_{1xxx} + n' \xi_1 \xi_{1xxx},$$

$$\begin{aligned}
Nl_3 = & \frac{1}{2} a'' \xi_1 \xi_2 + b' (\xi_1 \xi_{2x} + \xi_1 \xi_{1x} + \xi_2 \xi_{1x}) \\
& + \frac{1}{2} b'' \xi_1^2 \xi_{1x} + c' (\xi_1 \xi_{2xx} + 2\xi_1 \xi_{1xx} + \xi_2 \xi_{1xx}) \\
& + \frac{1}{2} c'' \xi_1^2 \xi_{1xx} + d' (\xi_1 \xi_{2xxx} + \xi_2 \xi_{1xxx}) + \frac{1}{2} d'' \xi_1^2 \xi_{1xxx}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим пространственно-периодические решения конечной амплитуды со слабой модуляцией на временах порядка $O(\varepsilon^{-m})$. В качестве параметра ε используем порядок амплитуды гармоника (22).

Приравнявая коэффициенты при различных степенях ε в (25), получаем

$$\widehat{L}_0 \xi_1 = 0, \quad (26)$$

$$\widehat{L}_1 \xi_1 + \widehat{L}_0 \xi_2 = Nl_2, \quad (27)$$

$$(\widehat{L}_0 \xi_3 + \widehat{L}_1 \xi_2 + \widehat{L}_2 \xi_1) = Nl_3. \quad (28)$$

Решение (26)–(27) можно представить в форме различных сумм, составленных из слагаемых типа

$$\xi_1 = \eta(x_1, t_1, t_2) e^{i\alpha x} + \text{к.с.} \quad (29)$$

Из (27) с учетом условия разрешимости $\partial\eta/\partial t_1 + 2i\alpha(c - 4d)\partial\eta/\partial x_1 = 0$ для ξ_2 имеем уравнение

$$c\xi_{2xx} + d\xi_{2xxx} = -(a''/2 + ib' - c' + d')\eta^2 e^{2i\alpha x}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\xi_2 = R\eta^2 e^{2i\alpha x}, \quad R = R_r + iR_i, \\
R_r = \frac{a'' + 2(c' - d')}{16\alpha(4d - c)}, \quad R_i = \frac{b'}{16\alpha(4d - c)}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Из решения (30) и секулярного условия для $O(\varepsilon^3)$ имеем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_2} + i\varepsilon^{-1}Q\frac{\partial\eta}{\partial x_1} - \varepsilon^{-2}\gamma_i\eta - D\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + U\eta^2\bar{\eta} = 0, \quad (31)$$

где

$$D = 6d - c, \quad Q = 2(c - 4d), \quad U = U_r + iU_i,$$

$$U_r = -3b'R_i + (17d' - 5c')R_r + \frac{1}{2}(d'' - c''),$$

$$U_i = -3b'R_r + (17d' - 5c')R_i + \frac{1}{2}b''.$$

После замены $\eta = \psi \exp(i\phi_0 x_1)$, $\phi_0 = \varepsilon^{-1}Q/2D$ уравнение (31) принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_2} - \varepsilon^{-2}\gamma_{1i}\psi - D\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + U\psi^2\bar{\psi} = 0, \quad (32)$$

где $\gamma_{1i} = \gamma_i + Q/4D$.

Уравнение (32) является амплитудным уравнением (типа уравнения Ландау–Гинзбурга) для задачи волнового стекания вязкого слоя расплавленного металла

по наклонной поверхности с учетом влияния фазового перехода, термокапиллярного эффекта, капиллярных и гравитационных сил. Используя его, можно исследовать нелинейное волновое поведение слоя расплава в зависимости от параметров внешних потоков энергий и физических свойств среды.

Если пренебречь пространственными изменениями, решение (32) можно представить в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-i\Gamma_0 t_2).$$

Подставляя это выражение в уравнение (32) и пренебрегая диффузионным слагаемым, получаем следующие выражения для амплитуды и инкремента нелинейной волны:

$$\psi_0 = (\gamma_i/\varepsilon^2 U)^{1/2}, \quad \varepsilon^2 \Gamma_0 = U_i(\gamma_i/U_r).$$

Таким образом, исследованы линейная и нелинейная стадии развития волновой неустойчивости на поверхности испаряющегося под лазерным воздействием слоя расплавленного металла, приводящей к формированию на стенках каверны стационарных бегущих нелинейных волновых движений конечной амплитуды. Из системы гидродинамических уравнений типа Навье–Стокса и уравнения теплопроводности получено нелинейное эволюционное уравнение для неоднородной толщины расплавленного металла, описывающее генерацию этих волн с учетом фазового перехода (испарения) и термокапиллярного эффекта. В третьем порядке теории возмущения получено уравнение для амплитуды бегущей нелинейной волны, аналогичное уравнению Гинзбурга–Ландау. Выявлены основные физические факторы, влияющие на условия волнообразования на свободной поверхности плоского слоя расплава, на величины периода и амплитуды установившихся нелинейных волновых структур.

Выражаю благодарность Л.А. Шелепину и В.С. Голубеву за обсуждение результатов работы.

Список литературы

- [1] Холтанов Л.П., Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990.
- [2] Trifonov Yu., Tsvetodub O.Yu. // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 229. P. 531–536.
- [3] Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. // УФН. 1996. Т. 166. № 1. С. 3–32.
- [4] Joo S.W., Davis S.H., Bankoff S.G. // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 230. P. 117–123.
- [5] Burelbach J.P., Bankoff S.G., Davis S.H. // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 195. P. 463–494.