

01;03

## Влияние формы начальной деформации заряженной капли на нелинейные поправки к критическим условиям реализации ее неустойчивости

© А.И. Григорьев, А.Н. Жаров, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ru

(Поступило в Редакцию 1 декабря 2004 г.)

В асимптотических расчетах третьего порядка малости обнаружен эффект ограничения нелинейного, пропорционального квадрату амплитуды осцилляций капли, снижения критической для реализации неустойчивости капли величины собственного заряда, имеющий место, когда в спектр мод, определяющих начальную деформацию, наряду с основной модой входят моды с высокими номерами. Проанализировано влияние плотности окружающей среды на величины нелинейных поправок к критическим условиям неустойчивости.

1. Критические условия реализации неустойчивости изолированной капли электропроводной идеальной несжимаемой жидкости по отношению к собственному заряду теоретически вывел в конце девятнадцатого века Рэлей в виде соотношения  $W \equiv (Q^2/4\pi\sigma R^3) \geq 4$ , где  $R$ ,  $Q$  и  $\sigma$  — радиус капли, ее заряд и коэффициент поверхностного натяжения жидкости соответственно [1]. В течение двадцатого века и в начале текущего этот критерий неоднократно экспериментально повторялся в различного вида лабораторных установках: в вертикальном электростатическом поле между плоскими пластинами (т.е. в электростатическом подвесе типа использованного Милликемом в экспериментах по определению заряда электрона) [2]; в неоднородном, периодически изменяющемся во времени электрическом поле между электродами сложной геометрии (комбинация колец, цилиндрических и сферических поверхностей) [3]; в комбинированном электрическом подвесе с электростатическим и периодически меняющимися электрическими полями между тремя плоскими электродами [4], в воздушном потоке [5]; в электродинамическом подвесе на основе двух кольцевых электродов [6]. Эксперименты были проведены с каплями широкого диапазона размеров: сотни микрометров в [2,5], десятки микрометров в [3,4] и единицы микрометров в [6] (следует, однако, отметить, что физические механизмы сброса избыточного заряда избыточной каплей диаметром в сотню микрометров и в один микрометр качественно различны и подробно описаны в [7,8]). Во всех случаях справедливость критерия Рэрея была подтверждена. Причем наибольшая точность экспериментов была достигнута в [4], где критерий Рэрея был подтвержден с точностью до 4%, и в [6], где точность была около 5%.

С началом нелинейных исследований осцилляций и устойчивости заряженной капли [9–12] выяснилось, что при расчетах третьего порядка малости по амплитуде начальной деформации появляются квадратичные по амплитуде поправки к частотам осцилляций, а поскольку

критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду определяются из требования прохождения квадрата частоты основной моды осцилляций через нуль в область отрицательных значений, то и критическое значение параметра Рэрея  $W = W_{cr}$  оказывается зависящим от квадрата начальной деформации равновесной сферической формы. Область применимости этого результата ограничивается лишь применимостью асимптотических разложений, лежащих в основе анализов [9–12], и на величину нелинейной поправки к критическому значению параметра Рэрея накладывается только требование ее малости по сравнению с четверкой. Другими словами, в зависимости от условий проведения эксперимента (в зависимости от амплитуды начальной деформации капли) можно ожидать отклонения измеряемой в эксперименте критической величины параметра Рэрея от предсказываемого линейной теорией значения  $W_{cr} = 4$  на 10–20%. В связи со сказанным результаты измерений [4,6] вызывают сомнения, так как и в том и в другом случае в силу особенностей экспериментальных установок [4,6] амплитуда основной моды капли была сильно возбуждена. Для выяснения этого обстоятельства и было сформулировано настоящее исследование, которое, однако, проводилось в несколько более общем виде, с учетом наличия в реальных экспериментах внешней для капли среды, моделируемой идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса  $R$ , имеющая заряд  $Q$ , идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho_{(i)}$ , окруженная идеальной несжимаемой жидкостью плотности  $\rho_{(e)}$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$  в условиях отсутствия гравитации. Коэффициент межфазного поверхностного натяжения обозначим  $\sigma$ . Движение жидкости в капле и внешней среде примем потенциальным, с потенциалами скоростей  $\psi_{(i)}$  и  $\psi_{(e)}$  соответственно. Потенциал электрического поля в окрестности капли обозначим  $\phi$ .

Форму капли будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение границы раздела сред в безразмерных переменных, в которых  $\rho_{(i)} = 1$ ,  $R = 1$ ,  $\sigma = 1$ , в любой момент времени  $t$  запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t).$$

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных капиллярных колебаний заряженной капли имеет вид

$$\Delta\psi_{(i)} = 0; \quad \Delta\psi_{(e)} = 0; \quad \Delta\phi = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_{(i)} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_{(e)} \rightarrow 0; \quad \nabla\phi \rightarrow 0;$$

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \partial_t \xi = \partial_r \psi_{(i)} - \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta \psi_{(i)} \partial_\vartheta \xi \\ = \partial_r \psi_{(e)} - \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta \psi_{(e)} \partial_\vartheta \xi;$$

$$\partial_t \psi_{(i)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi_{(i)})^2 - \rho \left( \partial_t \psi_{(e)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi_{(e)})^2 \right)$$

$$= p_0 - p_\infty + p_q - p_\sigma; \quad \phi = \phi_S(t);$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3};$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \leq r \leq 1 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = 1 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0 P_0(\cos \vartheta) + \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\cos \vartheta); \quad \partial_t \xi = 0.$$

В выписанных уравнениях  $p_\infty$  и  $p_0$  — давление во внешней среде на бесконечности и постоянное давление в капле;  $p_q$  и  $p_\sigma$  — давление электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности капли;  $\phi_S$  — электрический потенциал поверхности капли;  $\rho \equiv (\rho_{(e)}/\rho_{(i)})$ ;  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения;  $P_m(\cos \vartheta)$  — полином Лежандра порядка  $m$ ;  $\xi_0$  — константа, подобранная так, чтобы объем капли в начальный момент времени совпадал с объемом равновесной сферы; знак  $\partial_t$  означает частную производную по переменной  $t$ ;  $\Omega$  — множество индексов изначально возбужденных мод;  $h_m$  — константы, учитывающие вклад  $m$ -й моды в формирование начальной формы капли, такие что  $\sum_{m \in \Omega} h_m = 1$ .

3. Решение сформулированной задачи методом многих масштабов приводит в расчетах третьего порядка малости к аналитическому выражению для образующей

нелинейно-осциллирующей в диэлектрической несжимаемой среде заряженной капли электропроводной несжимаемой жидкости [13]

$$r(\vartheta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} M_n^{(1)}(t) \cdot P_n(\cos \vartheta) \\ + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (M_n^{(2)}(t) + \varepsilon M_n^{(3)}(t)) \cdot P_n(\cos \vartheta); \quad (1)$$

$$M_n^{(1)}(t) = h_n \cos(\omega_n t + \varepsilon^2 \cdot b_n t);$$

$$\omega_n^2 = \left( \frac{(n^2 - 1)n(n + 2 - W)}{1 + n(1 + \rho)} \right);$$

$$W \equiv (Q^2/4\pi\varepsilon_d\sigma R^3);$$

$$b_n = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{h_n^2(\Xi_n^0 + 2\omega_n^2(\Xi_n^1 - 2\Xi_n^2))}{4(2n + 1)} + \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2 \Xi_n^0}{2(2k + 1)} \right.$$

$$- \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2}{4} \left[ H_{nkkn}^{1(-)(+)} + H_{nkkn}^{2(+)(+)} + H_{nkkn}^{2(-)(-)} \right.$$

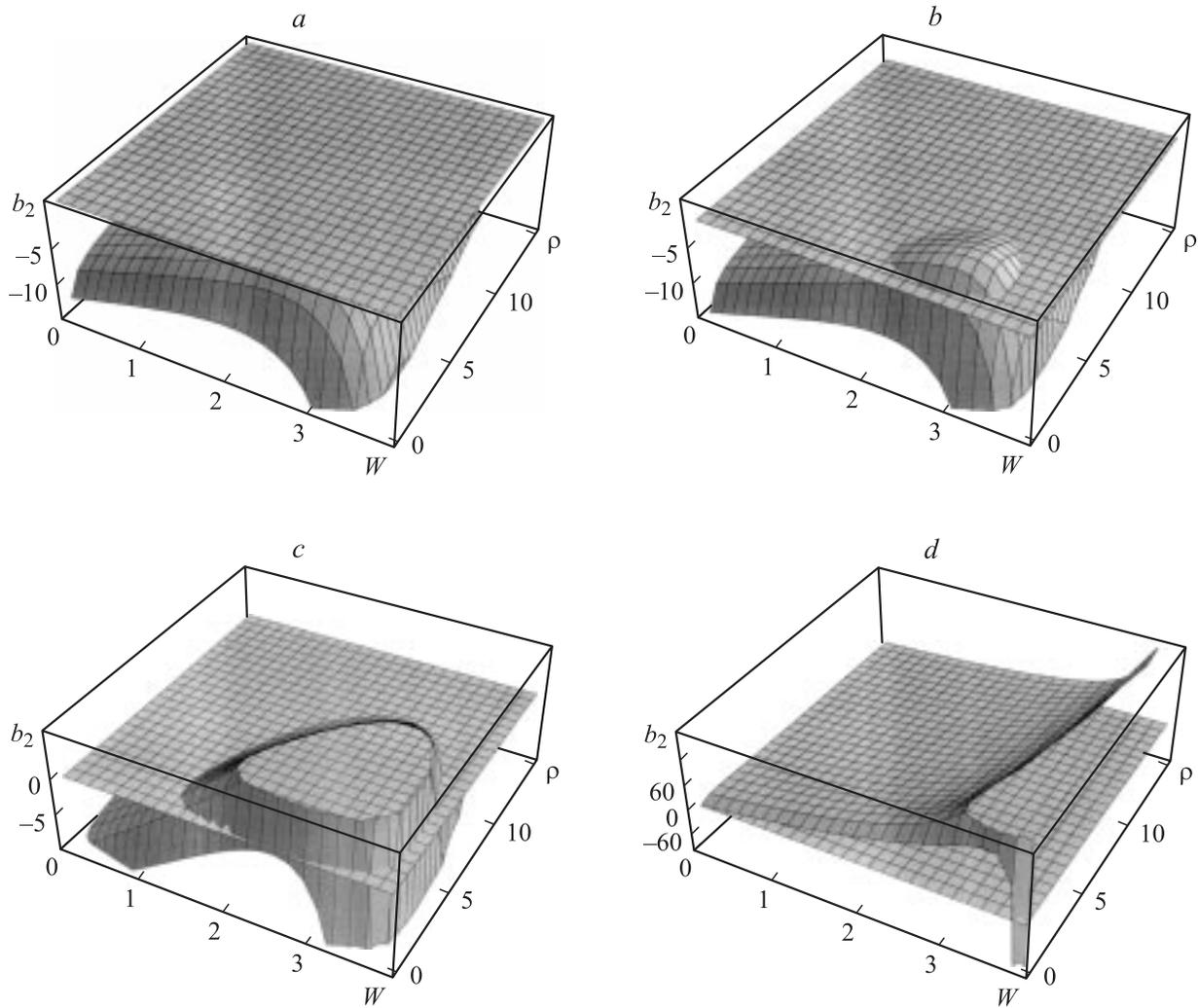
$$\left. \left. + (1 - \delta_{kn}) \left( H_{kkn}^{1(-)(+)} + H_{kkn}^{2(+)(+)} + H_{kkn}^{2(-)(-)} \right) \right] \right\}.$$

Явный вид коэффициентов, входящих в выражение для коэффициента  $b_n$  в нелинейной поправке к частоте, приведен в Приложении А. Аналитические выражения для коэффициентов  $M_n^{(2)}$  и  $M_n^{(3)}$ , имеющие громоздкий вид, здесь не приводятся, поскольку они не представляют интереса для настоящего рассмотрения, посвященного анализу критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду, связанных непосредственно с нелинейными поправками к частотам осцилляций.

а) Как отмечалось выше, наличие поправок к частотам капиллярных колебаний поверхности капли приводит к изменению критических условий реализации неустойчивости  $m$ -моды по отношению к собственному заряду капли. Известно, что при увеличении заряда квадрат частоты капиллярных колебаний уменьшается и при некотором критическом значении параметра Рэлея  $W_{cr}$  обращается в нуль. Дальнейшее увеличение заряда капли ведет к переходу квадрата частоты в область отрицательных значений, т.е. к появлению мнимых частот и экспоненциальному росту амплитуд капиллярных колебаний поверхности капли и, как следствие, к ее неустойчивости. Критическое условие реализации неустойчивости  $n$ -й моды с учетом нелинейной поправки к частоте можно записать в виде

$$(\omega_n + \varepsilon^2 b_n)^2 \approx \omega_n^2 + 2\varepsilon^2 \omega_n b_n + O(\varepsilon^4) = 0. \quad (2)$$

В этом выражении должно выполняться условие  $|\omega_n| \gg |\varepsilon^2 b_n|$ . Подставляя в (2) выражения для частоты  $\omega_n$  и для коэффициента  $b_n$ , можно в принципе получить весьма громоздкое выражение, связывающее



**Рис. 1.** Зависимости коэффициента  $b_2 = b_2(W, \rho)$ , определяющего величину нелинейной поправки к частотам основной моды, от параметра Рэлея  $W$  и безразмерной плотности внешней среды  $\rho$ , рассчитанные для различных видов начальных деформаций, определенных суперпозицией основной моды ( $n = 2$ ) и одной из более высоких мод с номером  $m > 2$ :  $m = 11$  (a), 12 (b), 14 (c), 30 (d) при  $h_2 = 0.75$ ,  $h_m = 0.25$ .

критическое значение параметра Рэлея  $W_{cr}$  со спектром изначально возбужденных мод и их амплитудами, выраженными через квадрат малого параметра  $\varepsilon$ . Однако некоторые результаты можно получить и из анализа соотношения (2).

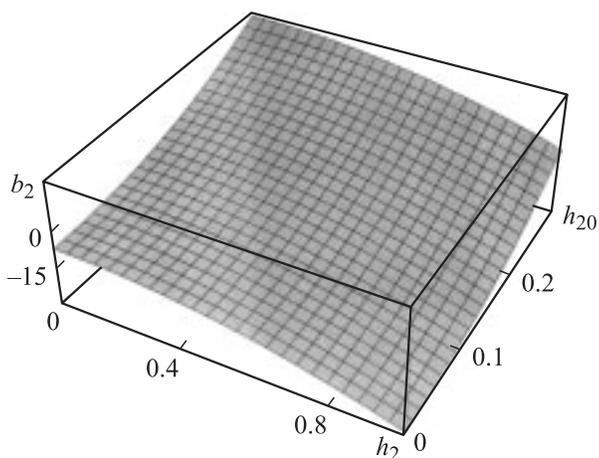
Из (2) можно заметить, что в расчетах второго порядка малости по  $\varepsilon$  критическая величина параметра Рэлея  $W_{cr}$  с ростом амплитуды начальной деформации (с ростом  $\varepsilon^2$ ) при  $b_n < 0$  будет снижаться (по сравнению с полученным в линейной теории значением  $W_{cr} = 4$ ), а при  $b_n > 0$  — увеличиваться. В [13] в качестве примера анализировались различные ситуации с одномодовыми начальными деформациями и было показано, что  $b_n < 0$  везде, кроме малых окрестностей значений частот, соответствующих внутренним нелинейным резонансам. Тем самым был подтвержден вывод работ [9–12] о снижении критического значения параметра Рэлея  $W_{cr}$  с ростом ам-

плитуды начальной деформации. Однако в действительности знак коэффициента  $b_n$  сложным образом зависит от спектра мод, определяющих начальную деформацию, от величины безразмерной плотности окружающей среды  $\rho$ , параметра Рэлея  $W$  и не всегда отрицателен.

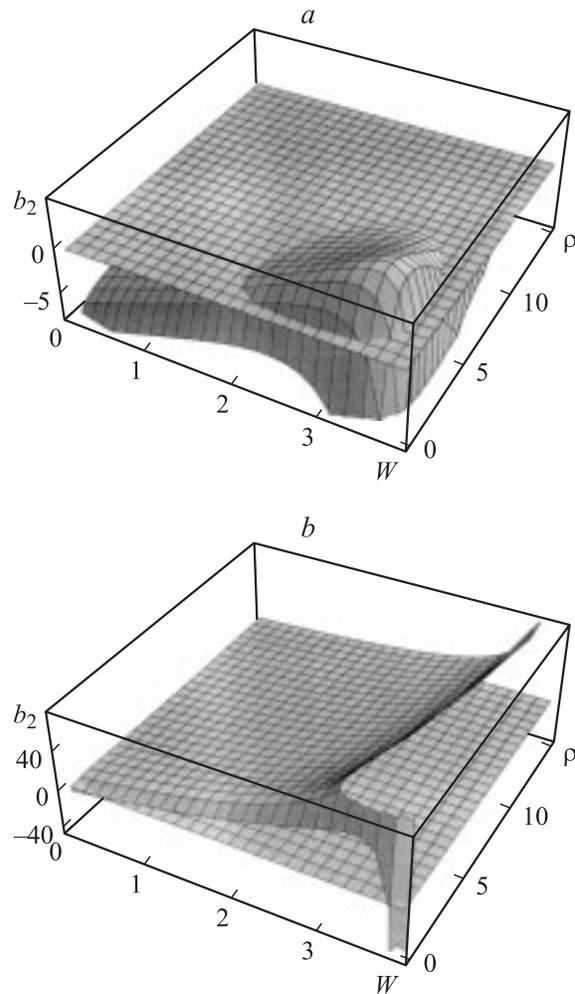
б) На рис. 1, a–d приведены зависимости  $b_2 = b_2(W, \rho)$  в диапазонах изменения параметров  $0 \leq W \leq 3.9$ ,  $0 \leq \rho \leq 15$ . Графики рассчитаны для различных видов начальных деформаций, определенных суперпозицией основной моды ( $n = 2$ ) и одной из более высоких мод с номером  $m > 2$ , т.е. для двухмодовых начальных деформаций равновесной сферической формы капли с парциальными вкладами  $h_2 = 0.75$ ,  $h_m = 0.25$ . Как показывают расчеты, в ситуациях, когда  $m \leq 11$ , коэффициент  $b_2$  в нелинейной поправке к частоте основной моды отрицателен. Согласно рис. 1, b, при  $m \geq 12$  на множестве значений параметров  $W$ ,  $\rho$

появляется область, в которой  $b_2 \geq 0$ . Из рис. 1, *a–d* видно, что при  $m \geq 12$  с увеличением номера  $m$  размеры области значений параметров  $W, \rho$ , на которой  $b_2 \geq 0$ , растут. Согласно рис. 1, *c*, при  $m \geq 14$  передняя граница этой области выходит на плоскость  $\rho = 0$ , физически соответствующую нулевой плотности окружающей среды, т.е. капле, осциллирующей в вакууме. При  $m \geq 30$  и  $\rho = 0$  и любых значениях  $W < 3.8$  коэффициент  $b_2$  положителен (рис. 1, *d*), что, согласно вышесказанному, означает увеличение критического значения параметра Рэлея  $W_{cr}$  с ростом амплитуды осцилляций. Иными словами, в ситуации, когда начальная деформация капли определяется суперпозицией основной моды и одной из мод с номером  $m \geq 30$ , сильно заряженная капля с  $W \leq 3.8$  не может претерпеть неустойчивость даже при весьма значительной (в рамках асимптотической теории) амплитуде ее нелинейных осцилляций. Из сказанного следует, что при указанной начальной деформации отклонение критического значения параметра Рэлея от четверки не может превысить пяти процентов принципиально. По-видимому, именно это обстоятельство и объясняет результаты вышеупомянутых экспериментов [4,6], в которых, вероятнее всего, имело место возбуждение основной моды в совокупности с несколькими более высокими модами.

На рис. 2 приведена зависимость величины коэффициента  $b_2$  в поправке к частоте основной моды от парциальных вкладов  $h_2$  и  $h_m$ , с которыми основная мода ( $n = 2$ ) и высокая мода с номером  $m$  (на рисунке  $m = 20$ ) формируют начальную деформацию капли. Несложно видеть, что зависимость  $b_2$  от  $h_m$  гораздо более сильная, чем от  $h_2$ , а знаки вкладов в величину  $b_2$  у основной моды и высокой моды различны.



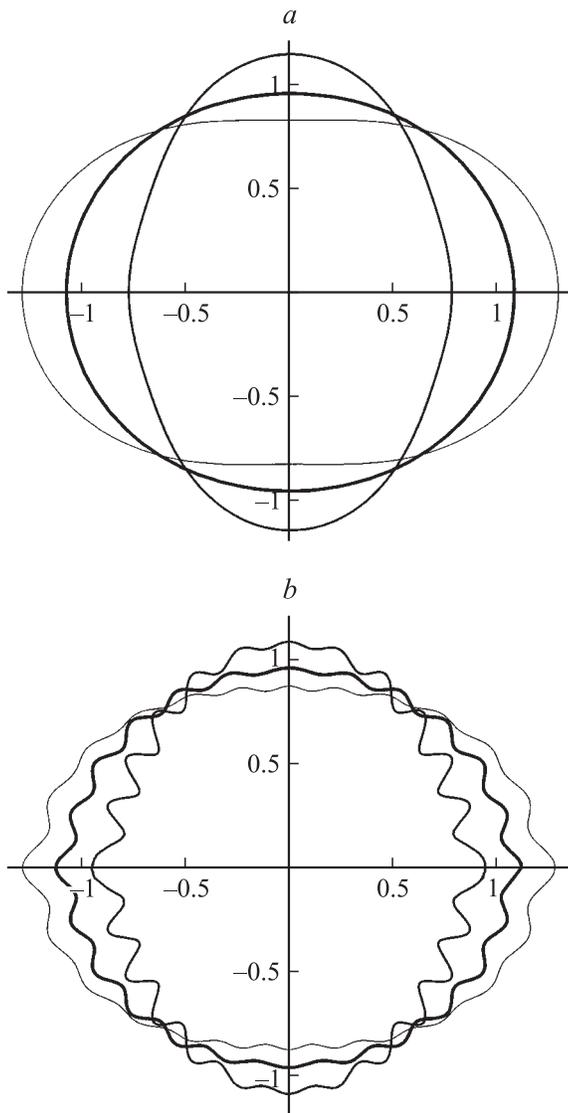
**Рис. 2.** Зависимость величины коэффициента  $b_2$  в поправке к частоте основной моды от парциальных вкладов  $h_2$  и  $h_m$ , с которыми основная ( $n = 2$ ) и двадцатая моды ( $m = 20$ ) формируют начальную деформацию капли, рассчитанная при  $W = 1, \rho = 0.1, \varepsilon = 0.3$ .



**Рис. 3.** Зависимости коэффициента  $b_2 = b_2(W, \rho)$  от параметра Рэлея  $W$  и безразмерной плотности внешней среды  $\rho$ , рассчитанные для трехмодовых начальных деформаций, определенных суперпозицией основной моды с  $h_2 = 0.75$  и парой более высоких мод с номерами  $m, k > 2$ : *a* —  $m = 14, k = 20, h_{14} = 0.15, h_{20} = 0.10$ ; *b* —  $m = 17, k = 34, h_{17} = 0.1, h_{34} = 0.15$ .

На рис. 3, *a, b* приведены результаты расчетов величины коэффициента  $b_2$  в более сложной ситуации, когда начальная деформация капли определена суперпозицией не двух мод, а трех: основной ( $n = 2$ ) и двух более высоких. Парциальный вклад основной моды  $h_2 = 0.75$  такой же, как и на рис. 1, *a–d*. Сумма парциальных вкладов двух более высоких мод дает величину  $h_m + h_k = 0.25$ , т.е. такую же, как и для одной высокой моды на рис. 1. Качественное и количественное сходство данных, приведенных на рис. 1 и рис. 3, очевидно.

Интересно отметить, что, согласно рис. 1, *d* и 3, *b*, для более общего случая нелинейных осцилляций капли во внешней среде с  $\rho \geq 0.1$  возможность рэлеевского распада капли при начальном возбуждении в паре с основной модой одной или нескольких более высоких мод с номерами  $m > 30$  при докритических в смысле



**Рис. 4.** Контур образующей капли, рассчитанный при  $W = 1$  и  $\rho = 0$  для трех моментов времени:  $t = 0$  (тонкая линия),  $0.25T$  (жирная линия),  $0.5T$  (линия средней толщины), где  $T$  — период осцилляций основной моды. *a* — при начальном возбуждении только основной моды с  $\varepsilon = 0.3$ ; *b* — при начальном возбуждении основной моды и двадцать четвертой моды при  $\varepsilon = 0.3$ ,  $h_2 = 0.75$ ,  $h_{24} = 0.25$ .

линейной теории значениях параметра Рэлея вообще сомнительна.

в) Физический смысл обнаруженного феномена повышения устойчивости капли при возбуждении высоких мод осцилляций связан с физическим механизмом реализации неустойчивости сильно заряженной капли, подробно рассмотренным в [14–16]. Согласно [14–16], при достижении параметром Рэлея критического значения теряет устойчивость основная мода капли, в результате чего капля начинает вытягиваться в фигуру, близкую к вытянутому сфероиду. При вытягивании капли заряд перераспределяется по ее поверхности и его концен-

трация на вершинах капли достигает такой величины, что возбуждаются более высокие моды. Это приводит к дальнейшему увеличению кривизны вершин капли и возбуждению еще более высоких мод. В итоге на вершинах капли образуются эмиссионные выступы, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда путем эмиссии весьма мелких сильно заряженных капелек. Если же на поверхность капли с возбужденной основной модой (т.е. на слабосфероидальную поверхность) наложить более высокую моду, то гладкая поверхность сфероида покроется мелкомасштабным рельефом — „морщинами“ (рис. 4), на гребнях которых вследствие их большой кривизны увеличится поверхностная плотность электрического заряда. Это приведет к тому, что на вершинах сфероида в силу неизменности полного заряда капли его средняя концентрация уменьшится, что ухудшит условия нарастания амплитуды основной моды.

Номера мод, определяющих начальную деформацию капли, выбирались из следующих соображений. Во-первых, хорошо известно из данных натурных измерений [17], что для облачных капель характерно возбуждение основной моды с амплитудой порядка десятков процентов от радиуса капли, причиной которого является реальное турбулентное обтекание капли, подвешенной в восходящем потоке. С тем же феноменом мы имеем дело и в экспериментах [8]. В экспериментальных работах [4,6] возбуждение основной моды обеспечивалось переменной компонентой электрического поля подвеса, а в [6] особо подчеркивалось наблюдаемое возбуждение основной моды. Возбуждение высоких мод для крупных (диаметром  $\sim 200 \mu\text{m}$ ) капель грозовых облаков обеспечивается столкновениями с существенно более мелкими капельками (диаметром  $\sim 10 \mu\text{m}$ ), концентрация которых в облаках максимальна [18]. В экспериментах [2–6] возбуждение высоких мод можно объяснить взаимодействием капли с потоком испаряющегося с ее поверхности пара и кластеризованных заряженных молекул, так как во всех случаях [2–6] капли изначально большого радиуса с не очень большим зарядом (по сравнению с критическим по Рэлею) испарялись для достижения критической величины параметра Рэлея.

Подводя итог сказанному, отметим, что величина и знак нелинейной поправки к частоте основной моды существенно определяются спектром мод, ответственных за начальную деформацию капли  $b_n = b_n(\Omega)$ . Вследствие этого нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной капли (к критическому значению параметра Рэлея) также зависят от вида начальной деформации капли  $W_{\text{cr}} = W_{\text{cr}}(\Omega)$ .

4. Выше упоминалось о том, что коэффициенты  $b_n(\Omega)$  имеют резонансный вид. Для анализа этого обстоятельства изменим вид представления нелинейных поправок к частотам, представляя их в виде полиномов по степеням параметра Рэлея  $W$ , как это было сделано в [9].

Рассмотрим свободную заряженную каплю в вакууме ( $\rho = 0$ ), когда начальная деформация формы определена возбуждением одной  $m$ -й моды, т. е. когда  $\Omega = \{m\}$  и при  $t = 0$   $\xi = \xi_0 P_0(\cos \vartheta) + \varepsilon P_m(\cos \vartheta)$ . Так, при начальном возбуждении какой-либо из мод (второй, третьей или четвертой) коэффициент  $b_m$ , характеризующий поправку к частоте соответствующей моды, может быть представлен выражениями

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{4}{245} \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2 (\omega_4^2 - 4\omega_2^2)} \sum_{i=0}^4 A_i^{(2)} W^i, \\ b_3 &= \frac{144}{11011} \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3 \omega_4^2 \omega_6^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2) (\omega_6^2 - 4\omega_3^2)} \sum_{i=0}^6 A_i^{(3)} W^i, \\ b_4 &= -\frac{1244160}{2433431} \\ &\times \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^3 \omega_6^2 \omega_8^2 (\omega_2^2 - 4\omega_4^2) (\omega_6^2 - 4\omega_4^2) (\omega_8^2 - 4\omega_4^2)} \sum_{i=0}^8 A_i^{(4)} W^i, \end{aligned} \quad (3)$$

коэффициенты  $A_i^{(m)}$   $m = 2, 3, 4$  приведены в Приложении Б. Видно, что все коэффициенты содержат в знаменателях выражения, обращающиеся в нуль при  $\omega_m^2 = 2^2 \omega_n^2$ . Таким образом, может иметь место вырожденный резонанс.

В случае начального возбуждения нескольких мод капиллярных колебаний поверхности капли при условии отсутствия окружающей среды величину  $b_m$ , характеризующую нелинейный сдвиг частот, можно также представить в виде полинома по параметру Рэлея, но с другими числовыми коэффициентами. Например, если изначально возбуждаются моды 2 и 3, т. е. когда  $\Omega = \{2, 3\}$  и при  $t = 0$

$$\xi = \xi_0 P_0(\cos \vartheta) + \frac{\varepsilon}{2} (P_2(\cos \vartheta) + P_3(\cos \vartheta)),$$

то величины  $b_m$ , характеризующие поправки к частотам мод 2 и 3, имеют вид

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{8}{2695} \frac{1}{\omega_2^3 \omega_4^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2) (\omega_4^2 - 4\omega_2^2) \times} \\ &\quad \times ((\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_5^2) ((\omega_2 + \omega_3)^2 - \omega_5^2) \\ &\quad \times \sum_{i=0}^7 B_i^{(2)} W^i, \\ b_3 &= -\frac{20736}{11011} \\ &\quad \times \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3 \omega_4^2 \omega_6^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2) (\omega_4^2 - 4\omega_3^2) (\omega_6^2 - 4\omega_3^2)} \\ &\quad \times \frac{1}{((\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_5^2) ((\omega_2 + \omega_3)^2 - \omega_5^2)} \sum_{i=0}^9 B_i^{(3)} W^i, \end{aligned} \quad (4)$$

коэффициенты  $B_i^{(m)}$   $m = 2, 3$  приведены в Приложении Б.

Несложно видеть, что по сравнению с (3) количество резонансных ситуаций увеличилось и кроме вырожденных появляются вторичные комбинационные резонансы. Если один из множителей, стоящих в знаменателе выражений (3) или (4), будет близок к нулю, то поправка к частоте может стать значительной (что в реальности накладывает ограничение на применимость асимптотического разложения (1)).

Выражения (3) и (4) изменяются, если заряженная капля находится во внешней диэлектрической среде. В этом случае поправки к частотам капиллярных колебаний поверхности капли можно представить двойным рядом по параметру Рэлея  $W$  и плотности окружающей среды  $\rho$ .

Например, если изначально возбуждается только одна  $m$  мода, т. е. когда  $\Omega = \{m\}$  и при  $t = 0$

$$\xi = \xi_0 P_0(\cos \vartheta) + \varepsilon P_m(\cos \vartheta),$$

то величину  $b_m$ , характеризующую нелинейный сдвиг частот, для случаев  $m = 2, 3$  или 4 можно представить в виде

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{108}{49(3+2\rho)^5(5+4\rho)^2 \omega_2^3 \omega_4^2 (\omega_4^2 - 4\omega_2^2)} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^4 A_{ij}^{(2)} \rho^i W^j, \\ b_3 &= -\frac{311040}{1573(3+2\rho)^2(4+3\rho)^6(5+4\rho)^2(7+6\rho)^2} \\ &\quad \times \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3 \omega_4^2 \omega_6^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2) (\omega_4^2 - 4\omega_3^2) (\omega_6^2 - 4\omega_3^2)} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^7 A_{ij}^{(3)} \rho^i W^j, \\ b_4 &= \frac{7558272000}{347633(3+2\rho)^2(5+4\rho)^7(7+6\rho)^2(9+8\rho)^2} \\ &\quad \times \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^3 \omega_6^2 \omega_8^2 (\omega_2^2 - 4\omega_4^2) (\omega_6^2 - 4\omega_4^2) (\omega_8^2 - 4\omega_4^2)} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^8 A_{ij}^{(4)} \rho^i W^j, \end{aligned} \quad (5)$$

коэффициенты  $A_{ij}^{(m)}$   $m = 2, 3, 4$  приведены в Приложении Б.

Если же изначально возбуждается несколько мод капиллярных колебаний поверхности капли, находящейся в среде, то поправки к частотам любых изначально возбужденных мод можно представить в виде рядов типа (5), но с другими знаменателями и численными коэффициентами.

Так, если изначально возбуждаются моды 2 и 3 капиллярных колебаний поверхности капли, то величины  $b_m$ , характеризующие поправки к частотам мод 2 и 3, можно представить в виде рядов

$$b_2 = \frac{1944}{539} \frac{1}{(2+\rho)(3+2\rho)^8(4+3\rho)^5(5+4\rho)^2(6+5\rho)^2} \times \frac{1}{\omega_2^3 \omega_4^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2)(\omega_4^2 - 4\omega_2^2) \times ((\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_5^2)((\omega_2 + \omega_3)^2 - \omega_5^2)} \times \sum_{i=0}^{11} \sum_{j=0}^7 B_{ij}^{(2)} \rho^i W^j,$$

$$b_3 = -\frac{559872}{1573} \frac{1}{(2+\rho)(3+2\rho)^5(4+3\rho)^8(5+4\rho)^2(6+5\rho)^2(7+6\rho)^2} \times \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3 \omega_4^2 \omega_6^2 (\omega_2^2 - 4\omega_3^2)(\omega_4^2 - 4\omega_2^2)(\omega_6^2 - 4\omega_3^2)} \times \frac{1}{((\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_5^2)((\omega_2 + \omega_3)^2 - \omega_5^2)} \sum_{i=0}^{11} \sum_{j=0}^9 B_{ij}^{(3)} \rho^i W^j.$$

Коэффициенты  $B_{ij}^{(2)}$  и  $B_{ij}^{(3)}$  не приведены ввиду ограниченности объема статьи.

Поскольку частоты осцилляций зависят от отношения плотностей сред, то по сравнению со случаем капли, осциллирующей в вакууме, количество резонансных ситуаций, т.е. когда выполняется одно из соотношений  $\omega_m^2 = 2^2 \omega_n^2$  или  $\omega_m^2 = \omega_n^2 \pm \omega_k^2$ , существенно увеличивается.

Влияние нелинейных поправок на критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду в окрестности резонансных ситуаций представляет собой предмет отдельного исследования. В настоящем же рассмотрении ограничимся констатацией факта возможного влияния резонансности поправок  $b_n(\Omega)$  на критические условия устойчивости, когда резонансное значение параметра  $W$  близко к критическому  $W_{cr}$ .

## Заключение

Критическое для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значение параметра Рэлея  $W$  зависит от амплитуды осцилляций капли в рамках ограничений, накладываемых на величину нелинейной поправки к  $W$  вкладами каждой из мод, определяющих начальную деформацию капли.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-01-00760) и гранта Президента РФ (№ МК-2946-2004-1).

## Приложение А. Выражения для коэффициентов разложения (1)

$$H_{kmln}^{2(\pm)(\pm)} = \sum_{g=1}^{\infty} (\beta_{kmgln}^{2(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \mu_{kmgln}^{1(\pm)}) + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(\pm)};$$

$$H_{kmln}^{1(\pm)(\mp)} = \sum_{g=1}^{\infty} (\beta_{kmgln}^{1(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \mu_{kmgln}^{1(\mp)}) + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(\mp)};$$

$$\lambda_{mln}^{(\pm)} = (\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}) / (\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2);$$

$$\gamma_{mln} = (n+1)\chi_n K_{mln} (\omega_m^2 (n-m+1 + \rho n) \times (n-m-1)/(n+1) + 2n(l(l+1)-1) + ((l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)nW/2) + (n+1)\chi_n \alpha_{mln} ((1/m - n\rho / ((n+1)(m+1)))\omega_m^2 + nW/2);$$

$$\eta_{mln} = (n+1)\chi_n K_{mln} (n/2 - m + 1 + \rho n(2m+3-n)/(2(n+1))) + (n+1)\chi_n \alpha_{mln} ((1+n/(2l))/m - n\rho(n+2l+3)/(2(m+1)(l+1)(n+1)));$$

$$K_{mln} = (C_{m0l0}^{n0})^2;$$

$$\alpha_{mln} = -C_{m0l0}^{n0} C_{m(-1)l1}^{n0} \sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$\chi_n = (1+n(1+\rho))^{-1};$$

$$\Xi_n^0 = \omega_n^2 + n(n+1)\chi_n(n-1)(4+2n-5W);$$

$$\beta_{kmgln}^{1(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2;$$

$$\Xi_n^1 = ((n+1)(n-1) - 3n\rho)\chi_n;$$

$$\beta_{kmgln}^{2(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2;$$

$$\Xi_n^2 = n(n-1)\chi_n;$$

$$\mu_{kmgln}^{1(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^1 \pm \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k;$$

$$\mu_{kmgln}^{0(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^0 \pm \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k;$$

$$\Lambda_{kmgln}^0 = (n+1)\chi_n \omega_k^2 K_{gln} (\alpha_{kmg}(k-2)/k + (k-1)(n-k+2)K_{kmg}/2) + \rho n \chi_n \omega_k^2 (((g+1-n)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1))((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1))) + ((k+3)\alpha_{kmg}/(k+1) + (k+2)(n-2-k)K_{kmg}/2)K_{gln} + n(n+1)\chi_n (W K_{gln} ((k^3 - 2(m+1)(m+2) - k^2(n-9) - k(2m(m+3) + 3n - 22))K_{kmg} - 2(k+2)\alpha_{kmg})/2 - ((3k(k+1) - 2)K_{kmg} - l(l+1)\alpha_{kmg}/2)K_{gln} + \alpha_{kmg} (l^2 K_{lgn} - \sum_{v=1}^{[l/2]} (2l-4v+1)K_{l-2v,g,n}));$$

$$\Lambda_{kmgln}^1 = n(n+1)\chi_n W k K_{kmg} ((g+1)(l-2-g+n)K_{lgn} + \alpha_{lgn}) + (n+1)\chi_n ((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}) \times (\alpha_{kmg}/m + (1-m)K_{kmg})) \omega_m^2;$$

$$\Gamma_{kmgln}^0 = (n+1)\chi_n ((k-2)(K_{gln}((k-1)K_{kmg}/2 - \alpha_{kmg}/k) + K_{mgn}((k-1)K_{klg}/2 - \alpha_{klg}/k)) - n(k-1)K_{gln} \times (\alpha_{kmg}/(mk) + K_{kmg})) - \rho n \chi_n (((g+2)K_{mgn} - \alpha_{mgn}/(g+1))((k+2)K_{klg} - \alpha_{klg}/(k+1)) + (k+3)K_{mgn}(\alpha_{klg}/(k+1) - (k+2)K_{klg}/2) + ((g+2)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1))((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) + (k+3)K_{gln}(\alpha_{kmg}/(k+1) - (k+2)K_{kmg}/2) - (n+1)((\alpha_{mgn}/((m+1)(g+1)) + K_{mgn})((k+2)K_{klg} - \alpha_{klg}/(k+1)) + K_{gln}((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) - (\alpha_{kmg}/((k+1)(m+1)) + K_{kmg})(k+2)K_{gln});$$

$$\Gamma_{kmgln}^1 = (n+1)\chi_n ((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}) \times ((m-1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m) + ((k+n)\alpha_{kgn}/(gk) + (n+1-g)K_{kgn})((m-1)K_{mlg} - \alpha_{mlg}/m));$$

$$\Pi_{kmmn}^0 = (n+1)\chi_n (nK_{kmm} (2((k-1)(k+2) + m(m+1)) + W(k-1)(n-5-k)) + (\alpha_{kmm}/k + (n+1-k)K_{kmm})\omega_k^2 - \rho n \chi_n \omega_k^2 ((n-1-k)K_{kmm} + \alpha_{kmm}/(k+1)) + n(n+1)\chi_n W((m+1)(k+n-m-2)K_{kmm} + \alpha_{kmm});$$

$$\Pi_{kmmn}^1 = (n+1)\chi_n ((k+m-n-2)K_{kmm} - (n+k+m)\alpha_{kmm}/(mk)) + \rho n \chi_n ((n-k-m-3)K_{kmm} + (k+m+n+3)\alpha_{kmm}/((m+1)(k+1)));$$

$$\Pi_{kmmn}^2 = (n+1)\chi_n ((m-n-1)K_{kmm} - \alpha_{kmm}/m) + \rho n \chi_n ((n-m-1)K_{kmm} + \alpha_{kmm}/(m+1)),$$

$C_{m0l0}^{n0}$  и  $C_{m(-1)l1}^{n0}$  — коэффициенты Клебша–Гордана,  $\delta_{kn}$  — символ Кронекера.

**Приложение Б. Значения численных коэффициентов в поправках к частотам**

Таблица коэффициентов  $A_i^{(m)}$

$i$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
0	6606528	4214241024000	55735591155609600
1	-4961440	-4128178176000	-77949491906388480
2	1419804	1682216124000	45351373912349312
3	-177168	-362825358328	-14555386948486656
4	7945	43303979512	2840187292166640
5	-	-2679419780	-345863703031648
6	-	66094721	25619763735024
7	-	-	-1049270108016
8	-	-	18006768899

Таблица коэффициентов  $B_i^{(m)}$

$i$	$m = 2$	$m = 3$
0	28507064560128	5478617683875840
1	-31524733738560	-7819057467750912
2	15054864474528	4925997961586016
3	-4000146404140	-1794842151186848
4	634385531392	415673928885262
5	-59666243685	-63222887884663
6	3064663192	6287045064547
7	-66028600	-392114665003
8	-	13835223520
9	-	-208973864

Таблица коэффициентов  $A_{ij}^{(2)}$

$j$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	64×4645215	64×7062426	64×5046448	64×1507136
1	-96×2325675	-96×3487186	-96×2616248	-96×819616
2	4×15972795	4×23556618	4×18378864	4×5935648
3	-8×5935648	-8×1414089	-8×1133192	-8×373424
4	357525	464946	374928	124576

Таблица коэффициентов  $A_{ij}^{(3)}$ 

$j$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
0	$960000 \times 629326659584$	$960000 \times 1983408150528$	$960000 \times 2712246080896$
1	$-8000 \times 92856752701440$	$-8000 \times 289533317285888$	$-8000 \times 39603182031120$
2	$400 \times 972791023411200$	$400 \times 2999075394326528$	$400 \times 4100298992386944$
3	$-40 \times 2807631731351552$	$-40 \times 8538676163356672$	$-40 \times 11634727972545728$
4	$2 \times 9605859672657920$	$2 \times 28671363515022336$	$2 \times 38689881616678592$
5	$-3 \times 645378748456960$	$-3 \times 1872016310675456$	$-3 \times 2470970580690368$
6	$32 \times 3297054503680$	$32 \times 9124083418880$	$32 \times 11489572520672$
7	$-4 \times 592208700160$	$-4 \times 1507906405696$	$-4 \times 1707665679216$
	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
0	$960000 \times 2061912758832$	$960000 \times 862494305220$	$960000 \times 153319441275$
1	$-8000 \times 304727092678800$	$-8000 \times 129734419287384$	$-8000 \times 23437700153415$
2	$400 \times 3189974081262768$	$400 \times 1379743042615128$	$400 \times 252718279917453$
3	$-40 \times 9125310799251600$	$-40 \times 3998375748074412$	$-40 \times 740549126229705$
4	$2 \times 30423104453043120$	$2 \times 13451299310165652$	$2 \times 2512567396279269$
5	$-3 \times 1928538595397616$	$-3 \times 855641056887444$	$-3 \times 160764059925333$
6	$32 \times 8719177625952$	$32 \times 3843268025499$	$32 \times 724042258758$
7	$-4 \times 1190325182124$	$-4 \times 506557263330$	$-4 \times 94989141585$

Таблица коэффициентов  $A_{ij}^{(4)}$ 

$j$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
0	$2764800 \times$ $1322934089115625$	$2764800 \times$ $4614839816039500$	$2764800 \times$ $6807052318263600$
1	$-23040 \times$ $222024106178678125$	$-23040 \times$ $757301895008626500$	$-23040 \times$ $1106228391650769200$
2	$384 \times$ $7750478940098759375$	$384 \times$ $25941718371282427500$	$384 \times$ $37652477054961494800$
3	$-512 \times$ $1865619665028196875$	$-512 \times$ $6131134506449743750$	$-512 \times$ $8841970685535035200$
4	$16 \times 11649205690527234375$	$16 \times 37502380729932297500$	$16 \times 53536654328692102800$
5	$-32 \times$ $709290797232871875$	$-32 \times$ $2223032342251267500$	$-32 \times$ $3112803543724853600$
6	$16 \times 105081062194434375$	$16 \times 316698999015302500$	$16 \times 426967575505092800$
7	$-16 \times 4303646927409375$	$-16 \times 12184316425980000$	$-16 \times 15205018812313400$
8	$1181694208996875$	$2999546960427500$	$3126793665757200$
	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
0	$2764800 \times$ $5553451626253376$	$2764800 \times$ $2509695611457536$	$2764800 \times 484147691814912$
1	$-23040 \times$ $903633663255048128$	$-23040 \times$ $410913465860444160$	$-23040 \times$ $79705136823156736$
2	$384 \times$ $30919302553593321280$	$384 \times$ $14202326231749251072$	$384 \times$ $2777978728682921984$
3	$-512 \times$ $7301559137768652960$	$-512 \times$ $3389390045560944128$	$-512 \times$ $668777032767583232$
4	$16 \times 44307163388333263680$	$16 \times 20739614218685581312$	$16 \times 4123401945443536896$
5	$-32 \times$ $2560672383079338560$	$-32 \times$ $1202842747455597824$	$-32 \times$ $240493962612197376$
6	$16 \times 343281924045307200$	$16 \times 160381146213516032$	$16 \times 32163463331921920$
7	$-16 \times 11485079526504640$	$-16 \times 5226886014537856$	$-16 \times 1046883289309184$
8	$1927439719822400$	$779373860226048$	$153211941490688$

## Список литературы

- [1] *Rayleigh Lord (J.V. Strett)* // *Phil. Mag.* 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [2] *Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B.* // *J. Colloid Sci.* 1964. Vol. 19. P. 136–143.
- [3] *Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U.* // *J. Atmosph. Sci.* 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [4] *Schweizer J.W., Hanson D.N.* // *J. Cool. Int. Sci.* 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [5] *Rouilleau M., Desbois M.* // *J. Atmosph. Sci.* 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [6] *Duft D., Lebius H., Huber B.A. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
- [7] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // *J. Aerosol Sci.* 1994. Vol. 25. N 6. P. 1079–1091.
- [8] *Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
- [9] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [10] *Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A.* // *Proc. R. Soc. (London).* 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [11] *Feng Z.C.* // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [12] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [13] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 19–26.
- [14] *Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 1985. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // *ЖТФ.* 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [16] *Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
- [17] *Beard K.V.* // *Radio Sci.* 1984. Vol. 19. N 1. P. 67–74.
- [18] *Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиана, И.М. Имянитова. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.*