01;09

К теории томсоновских автоколебательных систем

© Л.М. Лифшиц

e-mail: l-m-lifshits@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 26 октября 2004 г.)

Выявлен нелинейный механизм влияния широкополосных флуктуаций на колебания в томсоновском автогенераторе. Впервые получена корреляционная функция колебаний, учитывающая все существенные эффекты второго приближения. Разработан новый метод анализа стационарных синхронных колебаний в генераторе, входящем в систему фазовой синхронизации, и впервые получены линеаризованные уравнения стационарных синхронных колебаний, учитывающие влияние широкополосного шума. Дан пример расчета сложной системы фазовой синхронизации, иллюстрирующий возможность синтеза высокоэффективных систем с помощью предложенных методов анализа. Получены оценки коэффициентов диффузии фазы.

Введение

Колебания в томсоновском генераторе можно определить следующим уравнением [1–6]:

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u) + n(t) + \mu q(t), \tag{1}$$

где $u(t)$ — нормированный колебательный процесс; ε и μ — малые параметры, $\varepsilon \ll 1$, $\mu \ll \varepsilon$ (характерное значение $\varepsilon \ll 0, 1$); $f(u)$ — нелинейная функция; $q(t)$ — внешнее стационарное воздействие; $n(t)$ — широкополосный шум (тепловой, дробовой, технический), за исключением участков существенных выбросов $n(\sim)\varepsilon$; знаки соотношений в круглых скобках — символ соотношений „почти всюду“; среднее значение $\langle n \rangle = 0$; эффективная полоса спектра шума $\omega_n \in (1 - \Delta_n, 1 + \Delta_n)$, $\Delta_n \gg \varepsilon$.

Предполагается, что в системе (1) реализуется мягкий режим возбуждения и устанавливается стационарный режим автоколебаний. Учет воздействия шума существенно меняет характер колебаний томсоновского генератора, увеличивая число степеней свободы системы. В частности, в системе (1) может установиться такой вид стационарных колебаний, когда процесс, развивающийся во времени почти периодически, случайным образом сменяется относительно короткими случайными „вспышками“ (в теории случайных процессов это связывают с выбросами процесса, в теории нелинейных динамических систем похожее явление принято называть перемежаемостью). Известно [1–6], что многие эффекты, оказывающие качественно важное влияние на процесс колебаний, могут быть исследованы только в рамках второго приближения по ε. Близость системы (1) к линейному одномерному осциллятору и затрудненность достоверного измерения многих эффектов второго приближения требуют прежде всего оценки адекватности математической и физической моделей колебательной системы на каждом этапе теоретического исследования. Применяемые обычно асимптотические методы анализа хорошо математически обоснованы [1,2,7], однако дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения уравнения (1), не обеспечивают физически реализуемой однозначности определения параметров колебания. Когда $n(t) \neq 0$, подобные методы анализа могут приводить (во втором приближении по ε) к сомнительным с физической точки зрения результатам. Кроме того, операции с нелинейными функциями всегда нелинейны и в общем случае неперестановочны с другими операциями. Например, Ван-дер-Поль при выводе дифференциального уравнения автономного генератора принял модель кубической нелинейности $f(x) = (x^3/3)$, что, строго говоря, приводит к уравнению:

$$\ddot{x} + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + x = 0$$

(разумеется, в случае автономного генератора это несущественно).

Корректность исследования уравнения (1) можно обеспечить комбинацией методов статистической и гармонической линеаризации, полагая, что гармоническая линеаризация — частный случай статистической [3–5]. Подобный подход позволяет не только уточнить механизм колебаний в томсоновском автогенераторе с учетом эффектов второго приближения, но и получить новые результаты.

Анализ колебательных процессов в обобщенном генераторе Ван-дер-Поля

Если нелинейность кубическая, то уравнение колебаний томсоновского генератора при $q(t) = 0$ можно представить так:

$$\ddot{u} + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}u^3 - u\right) + u = n_g, \tag{2}$$

где шум $n_g(\sim)\varepsilon$, $\langle n_g \rangle = 0$.

Пусть спектральная плотность шума (в полосе спектра $2\Delta_g$) равна

$$S_g = 2N, \quad N \ll \varepsilon^2, \quad \omega_g \in (1 - \Delta_g, 1 + \Delta_g),$$

дисперсия шума $\sigma_g^2 = (2N\Delta_g/\pi)$.

Очевидно, что шум, являясь одним из источников энергии колебательного процесса, может быть согласован с нагрузкой только в ограниченной полосе частот спектра, поэтому энергетическая полоса шума, участвующего в формировании колебания, конечна; предполагается, что $\Delta_g \le \Delta_n$. В случае стационарного возмущающего воздействия малой интенсивности возможность стационарного режима автоколебаний определяется, как известно [1–7], структурной устойчивостью томсоновского генератора („грубостью" по А.А. Андронову). Для корректной статистической линеаризации нелинейности в уравнении (2) необходимо выполнение (в режиме стационарных колебаний) следующих очевидных условий [3–5]:

$$\langle u\rangle = 0, \quad \langle u^2\rangle = \sigma_u^2 = \text{const}, \tag{3}$$

где σ_u^2 — дисперсия стационарного колебания $u(t)$.

Для критерия минимального среднего значения квадрата разности процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентеного линейного элемента, как известно [3–5], получим следующее соотношение:

$$\frac{4}{3}u^3 = 2\sigma_u^2 u. \tag{4}$$

Из (2) и (4) имеем

$$\ddot u + \varepsilon(2\sigma_u^2 - 1)\dot u + u = n_g(t).$$

Полагая $p = d/dt$, $p(=)i\omega$, $i^2 = -1$, где ω — частота спектра, определим дисперсию колебания по известной формуле [3]

$$\sigma_u^2 = \frac{N}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left|(i\omega)^2 + \varepsilon(2\sigma_u^2 - 1)i\omega + 1\right|^2}.$$

Здесь учтено, что $\varepsilon(2\sigma_u^2 - 1) \ll \Delta_g$, поэтому при определении σ_u^2 можно считать шум белым. Данный интеграл табличный [3] и его вычисление приводит к алгебраической формуле

$$2\sigma_u^2(2\sigma_u^2 - 1) - \frac{N}{\varepsilon} = 0,$$

откуда

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2). \tag{5}$$

Из (2)–(5) получим статистически линеаризованное уравнение колебаний

$$\ddot u + N\dot u + u = n_g. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно считать уравнением начального приближения для обобщенного генератора Ван-дер-Поля, определяемого уравнением (2).

С физической точки зрения динамическая устойчивость автоколебаний (термин А.А. Харкевича) определяется восстанавливающей (возвращающей) силой для амплитуды стационарных колебаний [1]. Поэтому для учета динамики процессов в окрестности режима стационарных колебаний произведем замену переменных в уравнении (6), приняв $u = aX$, где a — амплитуда колебаний. Будем считать, что в значении амплитуды учтено влияние высших гармоник колебания и амплитуда не зависит от нормированного колебания X во втором приближении по ε. Качественный анализ уравнения (2) показывает, что

$$aX(=)ax + O(\varepsilon), \quad \sigma_u^2 = \sigma_{u_1}^2 + O(\varepsilon^2), \quad u_1 = ax,$$

где x — нормированное по амплитуде колебание первой гармоники.

Учитывая малую интенсивность шума, параметры колебания можно считать медленными почти всюду [1,2,4–6]

$$\begin{cases} u = aX, \quad \dot a(\sim)\varepsilon, \quad \langle\dot a\rangle = \langle\ddot a\rangle = 0, \\ \big(\langle(\dot a)^2\rangle\big) = \sigma_{a'}^2 \gg \sigma_{a''}^2 \sim \varepsilon^3, \quad x(=)\cos\varphi, \\ X(=)\cos\varphi + O(\varepsilon), \quad \dot\varphi = \Omega, \quad \ddot\varphi(\sim)\varepsilon^2, \end{cases} \tag{7}$$

где φ — фаза, Ω — частота колебания.

По-видимому, условия стационарности (3) следует дополнить аналогичными условиями для параметров стационарного колебания

$$\langle a^2\rangle = \sigma_a^2 = \text{const}, \quad \langle X\rangle = 0, \quad \langle X^2\rangle = \sigma_X^2 = \text{const},$$

$$\langle x\rangle = 0, \quad \langle x^2\rangle = \sigma_x^2 = \text{const}, \quad \langle\Omega\rangle = \text{const}. \tag{3a}$$

Из физических соображений ясно, что условия (3) и (3a) можно считать достаточными. Из (6), (7) имеем

$$\ddot X + V_x\dot X + \left[1 + \frac{\ddot a}{a} + O(\varepsilon^2)\right]X = \frac{n_g}{a},$$

где $V_x = N + 2\dot a/a$, $\langle V_x\rangle = N$, $\Delta_g \gg N \ll \varepsilon^2$.

Далее примем [1–5], что $n_g \simeq n_{gk}X + n_{gi}\dot X$, где $\sigma_g^2 = \sigma_{gk}^2 = \sigma_{gi}^2$, $\langle n_g/a\rangle = 0$. Тогда дисперсию амплитуды стационарных колебаний несложно определить из условий энергетического баланса и нормировки стационарных колебаний [4,5]

$$aV_x = n_{gi}, \quad \sigma_a^2 = 1 + O(\varepsilon^3),$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_X^2 + O(\varepsilon^3) = \sigma_x^2 + O(\varepsilon^2),$$

$$2\sigma_u^2 - \sigma_a^2 = 2\sigma_{fm}^2 + O(\varepsilon^2), \quad 2\sigma_{fm}^2 = N/\varepsilon, \tag{8}$$

где σ_{fm}^2 — дисперсия нелинейной частотной модуляции шумом [4].

Так как по определению амплитуда колебаний не зависит от других параметров колебания (это согласуется и с формулами (8)), уравнение для амплитуды несложно получить из (2) методами гармонической линеаризации, полагая, что

$$n_g = n_{gk}\cos\varphi - n_{gi}\sin\varphi, \quad \omega_{gi} \in (0, \Delta_g),$$

$$\sigma_a^2 = 1 + O(\varepsilon^3) \ [1,2,4],$$

$$2\dot a + \varepsilon a(a^2 - 1) = n_{gi}, \quad 2\ddot a + 2\varepsilon\dot a \simeq \dot n_{gi}. \tag{9}$$

В окрестности стационарного режима колебаний примем [1,4,5]

$$a^2 = 1 + 2\eta, \quad \langle\eta\rangle = 0, \quad \eta(\sim)\varepsilon,$$

$$\sigma_a^2 = (\langle a\rangle)^2 + \sigma_\eta^2,$$

$$a \simeq 1 + \eta - \eta^2/2, \quad [\langle\eta^2\rangle] = \sigma_\eta^2 < \varepsilon. \tag{10}$$

Из (9), (10) несложно получить уравнение Рытова для флуктуаций амплитуды [1]

$$2\dot{\eta} + 2\varepsilon\eta = n_{gi}. \tag{11}$$

Очевидно, что корреляционная функция амплитуды с учетом формул (9)–(11) имеет следующий вид:

$$K_a(\tau) = 1 - \frac{N}{2\varepsilon} + \frac{N}{2\varepsilon}\exp(-\varepsilon\tau), \tag{12}$$

где τ — сдвиг во времени.

Методами гармонической линеаризации нетрудно показать [1,2,4], что в первом приближении решение уравнения (2) при выполнении условий (7) можно представить следующим образом:

$$u = u_1 - \frac{\varepsilon a^3}{8\Omega}\sin 3\varphi + O(\varepsilon^2), \quad u_1(=)a\cos\varphi. \tag{13}$$

Выражение для нелинейной составляющей в уравнении (2) с учетом (13) имеет следующий вид [4]:

$$\frac{4}{3}\varepsilon\frac{du^3}{dt} = \frac{4}{3}\varepsilon\frac{du_1^3}{dt} - \frac{\varepsilon^2 a^4}{8}u_1 + \varepsilon^2 u_j + O(\varepsilon^3). \tag{14}$$

Ограничимся далее анализом первой гармоники колебания, приняв

$$(4u_1^3/3) = 2a^3\sigma_x^2 x.$$

Тогда из уравнения (2) с учетом соотношений (5), (7), (8), (14) получим

$$\begin{cases} \ddot{x} + \tilde{V}\dot{x} + \tilde{\Omega}^2 x = \dfrac{n_g}{a}, \ \tilde{V} = \dfrac{2\dot{a}}{a} + \varepsilon(a^2 - 1) + N, \\ \langle\tilde{V}\rangle = V = N, \\ \tilde{\Omega}^2 = 1 - \dfrac{\varepsilon^2 a^4}{8} + \dfrac{\ddot{a}}{a} + \varepsilon\dfrac{\dot{a}}{a}(3a^2 - 1). \end{cases} \tag{15}$$

Значение $D_V = \langle[\tilde{V}^2]\rangle$ можно определить непосредственно из второй формулы (15) с учетом (7) и (9) [1,4,5].

Кроме того, значения V и D_V несложно получить из условий нормировки и баланса средних мощностей. В результате имеем:

$$\langle(n_{gi}/a)\rangle = V = N, \quad \langle(\tilde{V}^2)\rangle = D_V = \sigma_g^2 = 2N\Delta g/\pi,$$

$$n_g(=)n_{gk}\cos\varphi - n_{gi}\sin\varphi, \quad \langle(n_g/a)\rangle = 0.$$

Параметр $\tilde{V}$ в окрестности стационарного режима колебаний мал почти всюду, флуктуации частоты также почти всюду малы. Поэтому, учитывая структурную устойчивость (грубость) томсоновского автогенератора, при определении из (15) корреляционной функции нормированного процесса $x(t)$ применим метод замораживания параметров, а затем усредним результат [3–7]

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2\exp(-N\tau/2)\cos\Omega_c\tau, \tag{16}$$

где $\langle(\tilde{\Omega}_c^2)\rangle = \Omega_c^2$, $\Omega_c = 1 - D_{\Omega_n} - \varepsilon^2/16$, $D_{\Omega_n} = \sigma_g^2/8$.

Из сопоставления формулы (16) с известными результатами [1,3,4] ясно, что D_{Ω_n} — коэффициент диффузии фазы колебания; дисперсия диффузии фазы $D_\Phi(\tau) = D_{\Omega_n}\tau$. Как следует из (16), шум в данном случае играет роль тормозящей силы [3,4]. Формулу, определяющую $D_\Phi(\tau)$, можно получить и методами гармонической линеаризации. Полагая в (2) $u = ax$, $x = \cos\varphi$, $\dot{\varphi} = 1 + \dot{\Phi} + O(\varepsilon^2)$, $\langle\dot{\Phi}\rangle = 0$, несложно по формуле Рытова [1] для шумовых флуктуаций частоты колебаний определить дисперсию нестационарных фазовых флуктуаций (дисперсию диффузии фазы)

$$D_\Phi(\tau) = \sigma_\Phi^2(\tau) = \frac{N}{8\pi}\int\limits_0^\tau d\chi\int\limits_0^\chi \frac{\sin\Delta_g\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta \simeq \frac{N}{16}\tau,$$

$$\chi\Delta_g \geq 1/\varepsilon. \tag{17}$$

Приравняв значения коэффициентов диффузии фазы, определенные разными методами, получим оценку энергетической полосы шума, участвующего в формировании колебания $u(t)$,

$$\Delta_g \simeq \pi/4, \quad \omega_u \in \left(\Omega_c - \frac{\pi}{4}, \Omega_c + \frac{\pi}{4}\right). \tag{18}$$

Из уравнения (15) для нормированного колебательного процесса и формулы (18) ясно, что томсоновский генератор можно считать высокоселективной системой только для усредненных параметров колебания. Процесс стационарных колебаний близок к периодическому почти всюду, за исключением интервалов относительно коротких выбросов. Корреляционная функция первой гармоники колебания, очевидно, равна

$$K_{u_1} = K_a(\tau)K_x(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{2\varepsilon} - \frac{N}{2\varepsilon}\exp(-\varepsilon\tau)\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{N}{\varepsilon}\right)\exp(-N\tau/2)\cos\Omega_c\tau, \tag{19}$$

где

$$\Omega_c = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{N}{16}.$$

Результаты (15) и (19) получены, по-видимому, впервые. Оценки эффективной полосы шума, близкие к значению в формуле (18), известны более 20 лет [4], однако они не раскрывали физическую сущность этого явления.

Диффузия фазы в томсоновском автогенераторе с синхронизацией

Колебания в томсоновском генераторе определим следующим уравнением:

$$\ddot{u} + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}u^3 - u\right) + u = u_f + n_f, \qquad (20)$$

где u_f — периодическое синхронизирующее колебание, $u_f = -b\sin\varphi_f$, $b \ll \varepsilon$; $\dot{\varphi}_f = \Omega_f = 1 + \upsilon_f$, $\upsilon_f = \text{const}$, $\upsilon_f \ll \varepsilon$, $\upsilon_f^2 \sim \varepsilon^3$; спектральная плотность колебания u_f равна $S_{u_f} = [\pi b^2/2]\,\delta\big(\omega - (1+\upsilon_f)\big)$, $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака, ω — частота спектра [1–3,7]; n_f — стационарный шум с финитным спектром, спектральная плотность шума $S_{n_f} = 2N$, $2N < b$, полоса спектра шума $\omega_{n_f} \in (\Omega_f - \Delta_n, \Omega_f + \Delta_n)$, $\Delta_n \approx 1$, $(1 - \Delta_n) > 0$, $n_f = n_{f_k}\cos\varphi_f + n_{f_i}\sin\varphi_f$, $\langle n_f\rangle = 0$ (отметим, что здесь рассматривается случай слабой синхронизации, или, что то же, синхронизации очень слабым, почти всюду внешним воздействием [1,2,8]), остальные характеристики системы заданы в уравнениях (1), (2).

Будем считать, что в системе (20) выполняются условия стационарности и реализуется, почти всюду, режим синхронных колебаний. Очевидно [1–3,8], что при $b \ll \varepsilon$ скорость установления амплитуды существенно больше, чем скорость установления фазы, а дисперсия амплитуды мало отличается от значения, определенного второй формулой (8). Поэтому в данной задаче допустимо в основном ограничиться учетом эффектов первого приближения и считать, что в системе отсчета, связанной с генератором,

$$u(\simeq)\cos\varphi, \quad \dot{\varphi} = 1 + \dot{\Phi}, \quad \dot{\Phi}(\sim)\varepsilon, \quad \ddot{\Phi}(\sim)\varepsilon^2,$$

кроме того, в системе отсчета генератора фазу колебаний будем считать приведенной к интервалу $-\pi, \pi$. В этом случае условия стационарности можно сформулировать так:

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = \langle u^2\rangle = \text{const}; & \langle u\rangle = 0, \\ \langle\dot{\varphi}\rangle = \dot{\varphi}_f = \text{const}; & \varphi \in (-\pi, \pi). \end{cases} \qquad (21)$$

С учетом условий (21) и формулы (4) из уравнения (20) имеем

$$\ddot{u} + C\dot{u} + u = u_f + n_f, \quad C = \varepsilon(2\sigma_u^2 - 1). \qquad (22)$$

Для внешней системы отсчета стационарные колебания генератора можно представить в виде $u(t) = u_s(t) + u_g(t)$, где u_s — синхронное гармоническое колебание, u_g — стационарный квазигармонический (случайный) процесс. Тогда перескоки фазы, вызывающие диффузию фазы, будут определяться взаимодействием гармонического и случайного процессов [1,4,6–9]. В системе отсчета генератора перескоки фазы могут отождествляться (для очень слабого, почти всюду внешнего воздействия и достаточно большого отношения сигнал/шум) с кратковременными в масштабе времени (bt) потерями управляемости, не влияющими заметно на характеристики колебательного процесса. Линеаризованное уравнение (22) можно в рамках первого приближения по ε упростить („укоротить“) [1–5,7]. Представим колебание $u(t)$ в окрестности стационарного синхронного режима следующим образом:

$$u = U\cos t - R\sin t, \; U(=)\cos\Phi_U, \; R(=)\sin\Phi_R, \; \ddot{U}(\sim)\varepsilon^2,$$

$$\dot{\Phi}_U = \dot{\Phi}_R = \dot{\Phi}, \quad \dot{\Phi}(\sim)\varepsilon, \quad \ddot{\Phi}(\sim)\varepsilon^2,$$

$$u(\simeq)\cos\varphi, \quad \dot{\varphi} = 1 + \dot{\Phi}, \quad \sigma_u^2 = \sigma_U^2 = \sigma_R^2. \qquad (23)$$

Тогда из (22), (23) несложно получить следующее уравнение:

$$2\dot{U} + CU = U_f + n_F, \qquad (24)$$

где $U_f = b\cos\Phi_f$, $\dot{\Phi}_f = \upsilon_f$, спектральная плотность процесса $U_f(t)$ равна $S_{U_f}(\omega) = \pi b^2\delta(\omega - \upsilon_f)/2$, шум $n_F = n_{F_i} + n_{F_k}$, $n_{F_i} = n_{f_i}\sin\Phi_f$, $n_{F_k} = n_{f_k}\cos\Phi_f$, спектральная плотность шума $S_{n_F} = 2N$, $\omega_{n_F} \in (\upsilon_f - \Delta_n, \upsilon_f + \Delta_n)$.

Для более корректной постановки задачи представим колебание U в виде суммы гармонической и квазигармонической составляющих

$$U(t) = U_s(t) + U_g(t).$$

Применив операцию сдвига спектра [3,7], окончательно получим

$$(2p + C)U_s = U_f, \quad \big(2(p - i\upsilon_f) + C\big)U_g = n_F, \qquad (25)$$

где $p = d/dt$, $p(=)i\omega$, $i^2 = -1$, ω — частота спектра.

Из уравнения (25) определяется корреляционная функция колебания:

$$K_U(\tau) = K_{U_s}(\tau) + K_{U_g}(\tau),$$

$$K_{U_s}(\tau) = \frac{A_s^2}{2}\cos\upsilon_f\tau = \frac{b^2\cos\upsilon_f\tau}{2(b^2\gamma^2 + C^2)}, \quad \gamma = \frac{2\upsilon_f}{b},$$

$$K_{U_g}(\tau) = K_{U_{g0}}(\tau)\cos\upsilon_f\tau = \frac{N}{2C}\left[\exp\left(-\frac{C\tau}{2}\right)\right]\cos\upsilon_f\tau, \qquad (26)$$

где $U_{g0}(t) = U_g(t)$ при $\upsilon_f = 0$.

Учитывая, что $2\sigma_U^2 \approx 1$, из (26) несложно получить уравнение, определяющее значение параметра C,

$$C^3 - NC^2 - b^2(1 - \gamma^2)C - Nb^2\gamma^2 = 0. \qquad (27)$$

Из правила знаков Декарта [7] следует, что положительный корень уравнения (27) только один, если $\gamma^2 < 1$. Тогда

$$C = b(1 - \gamma^2)^{1/2} + \frac{N}{2(1 - \gamma^2)}, \quad b > 2N, \quad \gamma^2 < 0.5.$$

При $\sigma_{u_s}^2 \gg \sigma_{u_g}^2$ случайно появляются небольшие интервалы времени, когда огибающая процесса u_g больше, чем амплитуда процесса u_s, а фазы этих процессов противоположны, что вызывает очень быстрые (в масштабе времени bt) изменения фазы суммарного процесса; в результате наблюдается диффузия фазы колебаний, причем дисперсия нестационарных фазовых флуктуаций линейно нарастает за время наблюдения [1,6,9, с. 176].

Коэффициент диффузии фазы D определяется с учетом (22), (25)−(27) следующей формулой [9, с. 176]:

$$D = \frac{\sqrt{\pi}}{A_s}\,\sigma_{\dot U_{g0}} \exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_{U_g}^2}\right), \qquad (28)$$

где $\sigma_{U_g}^2 = \sigma_{U_{g0}}^2 = \sigma_{u_g}^2$ — дисперсия процесса $u_g(t)$, $\sigma_{\dot U_{g0}}$ — среднее квадратическое отклонение процесса $\dot U_{g0}(t)$, $b\sqrt{(1-\gamma^2)} > 2N$, A_s — амплитуда процессов $u_s(t)$, $U_s(t)$.

Таким образом, коэффициент диффузии фазы в генераторе с синхронизацией с учетом (22), (25)−(28) равен

$$D \cong \left(\sqrt{N/2}\right) \exp\left(-\frac{b\sqrt{1-\gamma^2}}{N}\right),$$

$$\gamma^2 < 1/2, \quad b\sqrt{1-\gamma^2} > 2N.$$

Оценим статистически усредненную длительность переходного процесса в генераторе, вызванного скачком фазы (в момент времени $t = t_0$) синхронизующего колебания (сигнала), при $b \gg 2N$, $\gamma^2 < 1/2$, предполагая, что в генераторе уже установились стационарные синхронные колебания, причем процессы в окрестности стационарного режима обладают свойствами эргодичности [1–3,6,8,10]. В этом случае без потери общности можно считать $t_0 = 0$. Тогда имеем

$$U(\cong)U_0(t)\exp\big(i\Phi_f(t)\big), \quad U_0(0) = U_{e_0}(=)\exp(i\varphi_{e_\gamma}),$$

$$U_f = bU_\Phi \exp\big(i\Phi_f(t)\big), \quad U_\Phi = \exp(i\Phi_{0f} + i\varphi_{e_\gamma}),$$

где φ_{e_γ} — стационарная фазовая ошибка, $\varphi_{e_\gamma} \cong \cong \gamma = \text{const}$ [8], Φ_{0f} — начальная фаза сигнала.

Так как в уравнениях (20), (24) случайность начальной фазы сигнала учтена, то скачок фазы не меняет характеристик статистической линеаризации. Таким образом, из уравнения (24) получим

$$U_0 \cong U_\Phi\big(1 - \exp(-Ct/2)\big) + U_{e_0}\exp(-Ct/2).$$

Окончательно имеем следующую оценку длительности переходного процесса:

$$T_s \approx k_s T_1, \quad T_1 = 2/C, \qquad (29)$$

где T_s — расчетная длительность переходного процесса, k_s — коэффициент пропорциональности.

Переходный процесс можно считать законченным, когда значение фазы синхронизуемого генератора в момент времени T_s отклоняется от своего установившегося значения не более чем на 10^{-2}; в этом случае $k_s = 2\ln 10$. Заметим, что оценка (29) практически совпадает с известными оценками [8].

Условия статистической эквивалентности уравнений синхронизуемого генератора и генератора, входящего в систему фазовой синхронизации (СФС)

Колебания в томсоновском генераторе, входящем в систему фазовой синхронизации (СФС), могут быть определены следующими уравнениями [1–3,8]:

$$\ddot u + \varepsilon\,\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}u^3 - u\right) + (1 + 2\dot\Phi)u + O(\varepsilon^2) = 0, \qquad (30)$$

$$2\dot\Phi = b\sin\varphi_e + n_{f_i}\sin\varphi_e + n_{f_k}\cos\varphi_e, \qquad (31)$$

где $\varphi_e = \Phi_f - \Phi$, $\dot\Phi = \upsilon_f - \dot\varphi_e$, а остальные параметры колебания заданы в (20), (21). Уравнение (31) определяет, как известно [1–3,8], баланс частот в СФС первого порядка (СФС-1). Если стационарное колебание томсоновского генератора в СФС в первом приближении не зависит почти всюду от флуктуаций амплитуды, то для уравнения (30) справедливы следующие соотношения:

$$u(=)\cos\varphi, \quad \varphi = t + \Phi, \quad \dot U = -(\sin\Phi)\dot\Phi, \qquad (32)$$

где U — стационарное синхронное колебание томсоновского генератора, сдвинутое по частоте.

Тогда из (30)−(32) с учетом (21)−(23) имеем

$$2\dot U + UC_\nu = U_f + n_{f_i}\cos\Phi_f - n_{f_k}\sin\Phi_f,$$

$$C_\nu = b\cos\varphi_e + n_{f_i}\cos\varphi_e - n_{f_k}\sin\varphi_e. \qquad (33)$$

Очевидно, что при выполнении физически обоснованных условий

$$\langle C_\nu\rangle = C \ll \varepsilon, \quad C > 0, \quad C^2 \sim \varepsilon^3 \qquad (34)$$

уравнение (33) в первом приближнии статистически эквивалентно уравнениям (24), (25). Следует подчеркнуть, что условия (34) вводят только энергетические ограничения, обеспечивающие динамическую устойчивость стационарных колебаний; значение C определяется исходя из условий энергетического баланса для устойчивых стационарных синхронных колебаний (для уравнения (25), очевидно, это формула (27)), и поэтому условия (34) можно считать общими.

Сложные системы фазовой синхронизации (СФС) с повышенной динамической устойчивостью

В сложных СФС параметр $\dot\Phi$, входящий в уравнение (30), определяется из следующего уравнения [1–3,8]:

$$2\dot\Phi = F(p)b\sin\varphi_e + F(p)\big((\sin\varphi_e)n_{f_i} + (\cos\varphi_e)n_{f_k}\big), \qquad (35)$$

где $F(p)$ — передаточная функция фильтра нижних частот, $F(p=0) = 1$, $b|F(p=i\omega)| \ll \varepsilon$, $i^2 = -1$, $\omega \in (0,\infty)$, p — оператор дифференцирования.

Остальные параметры заданы в (30), (31); переменные, входящие в уравнение (35), допускают многократное дифференцирование. Предполагается, что уравнение (35) устойчиво в малом; допустимая начальная расстройка — полоса захвата γ_m также считается известной [1–3,7,8]. Далее, из (32), (35) по аналогии с (33) получим

$$2\dot{U} + UC_\nu = -(\sin\Phi)F(p)\big((b+n_{f_i})\sin\varphi_e + n_{f_k}\cos\varphi_e\big)$$
$$+ (\cos\Phi)F(p)\big((b+n_{f_i})\cos\varphi_e - n_{f_k}\sin\varphi_e\big). \qquad (36)$$

Предположим, что условия (34) выполняются в окрестности стационарного синхронного режима колебаний. По-видимому, возможность представления колебательного процесса (36) в виде суммы процессов, аналогичной (25), налагает дополнительные ограничения на величину флуктуаций и скорость изменения функций фазовой ошибки в окрестности стационарного режима колебаний

$$b\big|F(p)\cos\varphi_e - \langle F(p)\cos\varphi_e\rangle\big|(\sim)\varepsilon^2, \quad b \ll \varepsilon,$$
$$|\cos\varphi_e - \langle\cos\varphi_e\rangle|(\sim)b,$$
$$|p(\langle F(p)\sin\varphi_e\rangle)| = o(\varepsilon^2). \qquad (37)$$

При преобразованиях почти квазистатических функций, для которых выполняются условия (37), можно в правой части уравнения (36) применить метод замороженных реакций [3,4,7]. Тогда, очевидно, окончательно имеем

$$(2p + C)U_s = F(p)U_f,$$
$$\big(2(p - i\upsilon_f) + C\big)U_g$$
$$= -(\sin\Phi_f)F(p)n_{f_k} + (\cos\Phi_f)F(p)n_{f_i}. \qquad (38)$$

Корреляционная функция колебаний, определяемая из (30), (38), очевидно, равна [1–7]

$$K_u(\tau) = \frac{A_s^2}{2}\cos(1+\upsilon_f)\tau + K_{U_{g0}}(\tau)\cos(1+\upsilon_f)\tau, \quad (39)$$

где

$$A_s^2 = \frac{b^2F(i\gamma)F(i\gamma)}{\gamma^2b^2 + C^2}, \quad \gamma = \frac{2\upsilon_f}{b}, \quad \sigma^2_{u_s} \gg \sigma^2_{u_g},$$

$$K_{U_{g0}}(\tau) = \frac{2N}{\pi}\int\limits_0^{\Delta_n}\frac{F(i\omega)F(-i\omega)\cos\omega\tau\,d\omega}{4\omega^2 + C^2}.$$

Асимптотическое значение полосы удержания синхронизма γ_s может быть определено из неравенства, следующего из (39),

$$C^2 > b^2\big(F(i\gamma_s)F(-i\gamma_s) - \gamma_s^2\big) = 0, \quad \gamma_s^2 > \gamma^2, \qquad (40)$$

где $C > 0$, C — единственный действительный корень уравнения (39) при $\tau = 0$.

Несложно убедиться, что для системы (38) параметр $|\gamma_0| = 1$ (обычно называемый относительной полосой удержания [8]) характеризует только статические свойства полосы синхронизма.

Ясно, что переход от уравнений (36) к уравнениям (38) нетривиален, так как условия (37), изменяя в конечном итоге характеристики энергетического баланса, ужесточают требования к параметрам сложной СФС и фактически выделяют класс систем фазовой синхронизации с повышенной динамической устойчивостью режима синхронных колебаний. Для СФС, определяемых уравнениями (25), (38), характерны кратковременные в масштабе времени bt выбросы колебательного процесса.

Предварительные теоретические исследования СФС, определяемых уравнениями (38), с различными типами фильтров показали, что преимущества таких систем проявляются при использовании фильтров второго и более высоких порядков. В качестве примера приведем некоторые результаты анализа СФС-3 с фильтром нижних частот, определяемым соотношением

$$F(p) = F_0\,\frac{p^2 + bp + F_0(b^2/4)}{(p + F_0b)(p + F_0b/4)},$$

где $0.1 < F_0 < 0.3$.

Можно показать, что в данном случае полоса захвата γ_m [3,7,8] и полоса удержания синхронизма γ_s (формула (40)) соответственно равны $\gamma_m^2 \approx 3F_0 - 2F_0^2$, $\gamma_s^2 \approx 2F_0 - 2F_0^2 + F_0^3$, $\gamma_m^2 > \gamma_s^2$. Параметр $|\gamma_s|$ меньше полосы захвата $|\gamma_m|$, что характерно для систем синхронизации, определяемых уравнением (38). Несложно убедиться, что

$$C^2 \approx b^2\Big(1 - \gamma^2\big(1 + 1/(\gamma^2 + 4F_0^2)\big)\Big), \quad \gamma = 2\upsilon_f/b,$$
$$C^2 > 2Nb, \quad 0.1 < F_0 < 0.3, \quad 2\gamma^2 < \gamma_s^2.$$

Коэффициент диффузии фазы, определяемый из (28), (39), равен

$$D \approx \big(\sqrt{N/2}\big)\exp\left(-\frac{C^2(1+2F_0)}{2F_0Nb}\right).$$

Так как в уравнении (30) учтены далеко не все эффекты второго приближения и в ходе анализа мы ограничивались в основном первым приближением, то оценки диффузии фазы в системе синхронизации достоверны, пока $D > N$. Статистически усредненную длительность переходного процесса можно при $b \cong C \gg 2N$ оценить с учетом результатов (29) из уравнения, следующего из (38),

$$\left(p + \frac{C}{2}\right)U_0 \cong \frac{bF(p)U_\Phi}{2p} + U_{e_0}.$$

Несложно убедиться, что в данном случае длительность переходного процесса $T_s \approx k_sT_F$, $k_s = 2\ln 10$, $T_F \approx (T_1/2F_0) = (1/F_0C)$.

Следует отметить, что приведен сравнительно простой пример системы и не рассматривались проблемы оптимизации СФС.

Заключение

В данной работе проведено полное теоретическое исследование стационарных колебаний в свободном томсоновском автогенераторе с учетом эффектов второго приближения (основные результаты исследования влияния фликкерного шума, проведенного аналогичными методами, даны в [5]). Впервые выявлен нелинейный механизм влияния широкополосных флуктуаций на колебания в томсоновском генераторе. Показано, что томсоновский генератор можно считать высокоселективной системой только для усредненных параметров колебания. Процесс стационарных колебаний близок к периодическому почти всюду, однако на интервалах существенных выбросов процесс случайным образом сменяется относительно короткими случайными „вспышками“.

Разработан новый метод анализа стационарных колебаний в генераторе, входящем в систему фазовой синхронизации (СФС), и впервые получены линеаризованные уравнения стационарных колебаний в системе синхронизации с повышенной динамической устойчивостью при учете влияния шума. Дан пример расчета сложной СФС, иллюстрирующий возможность синтеза эффективных систем с фильтрами высокого порядка в цепи управления.

Список литературы

[1] *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976.

[2] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

[3] *Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г.* Основы статистической теории автоматических систем. М.: Машиностроение, 1974.

[4] *Лифшиц Л.М.* // РЭ. 1988. Т. 33. № 9. С. 1899.

[5] *Лифшиц Л.М.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 10. С. 1905.

[6] *Cramer H., Leadbetter M.* Stationary and Related Stochastic Processes. New York: Wiley, 1967. Крамер Г. Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. Пер. с англ. М.: Мир, 1969.

[7] *Korn G., Korn T.* Mathematical Handbook. New York: McGraw Hill, 1961. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Пер. с англ. М.: Наука, 1970.

[8] Фазовая синхронизация / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Связь, 1975.

[9] *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.

[10] *Короновский А.А., Храмов А.Е., Хромова И.А.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 6. С. 79–86.