

01;09

Дифракция плоской электромагнитной волны на щели в проводящем экране произвольной толщины

© В.М. Сердюк

Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белорусского государственного университета,
220064 Минск, Белоруссия
e-mail: rhlab@bsu.by

(Поступило в Редакцию 4 ноября 2004 г.)

На основе метода частичных областей построена двумерная теоретическая модель дифракции плоской электромагнитной волны на щели в идеально проводящем экране. При решении систем алгебраических уравнений для амплитуд мод щели использована процедура тихоновской регуляризации, что дало возможность расширить область применимости теории на проводящие экраны произвольной толщины, а также позволило значительно повысить точность решения для случаев, когда ширина щели и толщина экрана сравнимы с длиной волны дифрагирующего излучения. Показано, что не существует непрерывного предельного перехода от случая сколь угодно малой, но конечной толщины экрана к случаю бесконечно малой его толщины. Рассмотрены граничные условия для вектора потока энергии, вводится понятие энергетического потенциала, удобное для компьютерных расчетов линий тока энергии двумерных полей дифракции.

Введение

Классическая задача дифракции плоской волны на щели в бесконечном проводящем экране давно привлекает большое внимание исследователей, поскольку в ней рассматривается один из важнейших дифракционных элементов микроволновых, оптических и акустических устройств. Существует строгое решение задачи дифракции на дополнительном экране бесконечно малой толщины в виде плоской металлической ленты [1]. Но оно представляет собой предельный случай более общего решения для эллиптического цилиндра и мало пригодно в практических расчетах. Поэтому неоднократно предпринимались попытки решения указанной задачи на основе приближенных методов (см., например, [2–7]). Из всех таких методов к строгой теории дифракции наиболее близок метод частичных областей, или метод сшивания [8,9]. Как и строгая теория [2,3,10], он использует разбиение всего объема распространения поля на отдельные области, границы которых совпадают с координатными поверхностями. Поля в них строятся в виде суперпозиции простых мод, удовлетворяющих всем условиям, кроме условий на границах областей, а неизвестные амплитуды мод определяются в результате сшивания суммарных полей на данных границах. С помощью такого метода в работе [6] удалось найти решение указанной задачи для экранов конечной толщины, величина которой порядка длины волны дифрагирующего излучения. В настоящей работе на основе метода частичных областей строится решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на щели в идеально проводящем экране произвольной толщины.

1. Постановка задачи и ее решение для H -поляризации

Пусть на экран со щелью (рис. 1) падает плоская волна

$$u_0 = \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} + i\varphi_0) = \exp[i\{\alpha_0(x+d) + \beta_0z\}], \quad (1)$$

где $\varphi_0 = \alpha_0 d$ — начальная фаза, \mathbf{k}_0 — волновой вектор падающей волны, $\alpha_0 = k \cos \theta$, $\beta_0 = k \sin \theta$ — его проекции на координатные оси x и z ($\alpha_0^2 + \beta_0^2 = k^2$), $k = \omega/c$ — волновое число, θ — угол падения.

Требуется определить пространственные компоненты электрического и магнитного векторов стационарного поля, которое устанавливается в результате дифракции волны (1) на данной щелевой структуре. Поэтому предполагается, что поле монохроматическое и его зависимость от времени определяется одним и тем же множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опущен. Разделение всего пространства распространения поля на отдельные области здесь представляется очевидным: в качестве первой следует взять область слева от экрана ($x \leq -d$), в качестве второй — внутренность щели ($-d \leq x \leq d$, $-l \leq z \leq l$) и третьей — область справа от экрана ($x \geq d$) (рис. 1).

Решение поставленной дифракционной задачи будет иметь различный вид в зависимости от поляризации падающей волны. Сначала рассмотрим случай, когда электрический вектор последней поляризован перпендикулярно плоскости распространения (H -поляризация). Для него можно использовать представление различных пространственных компонент электрического и магнит-

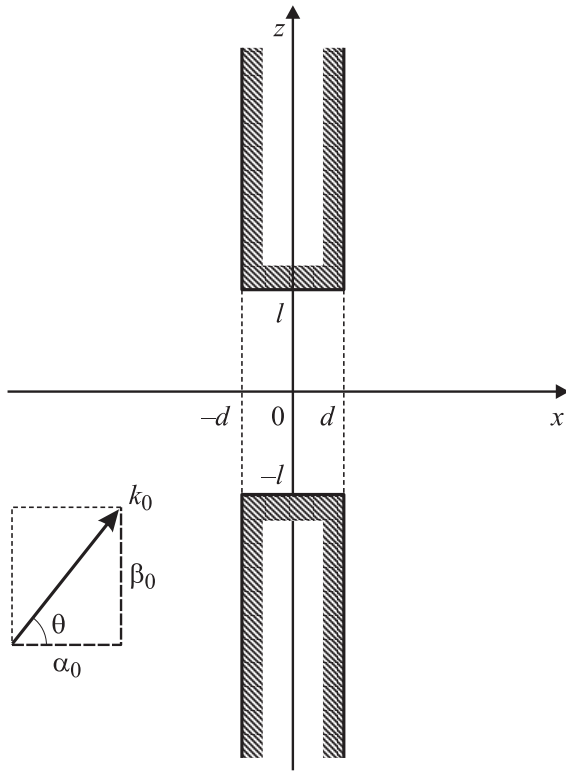


Рис. 1. Схема дифракции плоской волны на проводящем экране со щелью. l — полуширина щели, d — полутолщина экрана, θ — угол падения волны.

ного векторов через одну скалярную функцию u [2,3,10]

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{i}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{i}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

а остальные компоненты оказываются равными нулю. При этом данная функция должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (3)$$

Граничные условия для нее формулируются на основе известных условий для векторов электрического и магнитного полей. На поверхности проводника тангенциальные компоненты электрического поля должны обращаться в нуль, а на границах областей будем требовать непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Тогда, согласно (2), функция u должна удовлетворять следующим условиям:

$$(u)_{x=-d-0} = \begin{cases} 0 & (|z| > l), \\ (u)_{x=-d+0} & (|z| < l), \end{cases} \quad (4a)$$

$$(\partial u / \partial x)_{x=-d-0} = (\partial u / \partial x)_{x=-d+0} \quad (|z| < l), \quad (5a)$$

$$(u)_{x=d+0} = \begin{cases} 0 & (|z| > l), \\ (u)_{x=d-0} & (|z| < l), \end{cases} \quad (4b)$$

$$(\partial u / \partial x)_{x=d+0} = (\partial u / \partial x)_{x=d-0} \quad (|z| < l), \quad (5b)$$

$$u(x, \pm l) = 0 \quad (-d \leq x \leq d),$$

где символ 0 обозначает бесконечно малую положительную величину.

Кроме того, потребуем, чтобы при $x \rightarrow \pm\infty$ и $z \rightarrow \pm\infty$ поле было ограниченным по величине.

В каждой из трех выделенных областей полевую функцию u будем представлять в виде суперпозиции синусоидальных мод (плоских волн), удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (3) и поставленным граничным условиям, за исключением условий на плоскостях $x = \pm d$, разделяющих данные области. Пусть внутри щели (при $-d \leq x \leq d$, $-l \leq z \leq l$)

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ [a_{sn} \exp(i\sigma_{sn}(d+x)) + b_{sn} \exp(i\sigma_{sn}(d-x))] \cos \xi_{sn} z + i [a_{an} \exp(i\sigma_{an}(d+x)) + b_{an} \exp(i\sigma_{an}(d-x))] \sin \xi_{an} z \right\}, \quad (6)$$

где $a_{sn,an}$, $b_{sn,an}$ — амплитуды симметричных (индекс s) и антисимметричных (индекс a) мод по координате z , параметры распространения которых образуют бесконечные дискретные ряды значений $\xi_{sn} = (\pi/l)(n-1/2)$, $\xi_{an} = \pi n/l$. Это обеспечивает равенство нулю поля каждой моды на границах щели $z = \pm l$ и их ортогональность между собой

$$\int_{-l}^{+l} \cos \xi_{sn} z \cos \xi_{sm} z dz = \int_{-l}^{+l} \sin \xi_{an} z \sin \xi_{am} z dz = l \delta_{nm},$$

где символ δ_{nm} — символ Кронекера.

Чтобы уравнения Гельмгольца (3) для мод (6) удовлетворялись, достаточно выполнения условий

$$\sigma_{sn,an} = \sqrt{k^2 - \xi_{sn,an}^2}. \quad (7)$$

В областях слева и справа от экрана нет никаких проводящих поверхностей, ограничивающих распространение поля по оси z , поэтому здесь оно будет определяться не дискретным, а непрерывным спектром мод свободного пространства. Слева от экрана ($x \leq -d$)

$$u = (\cos \beta_0 z + i \sin \beta_0 z) \times \left\{ \exp(i\alpha_0(x+d)) - \exp(-i\alpha_0(x+d)) \right\} + \int_0^{+\infty} [A_s(\beta) \cos \beta z + i A_a(\beta) \sin \beta z] \exp(-i\alpha(x+d)) d\beta, \quad (8)$$

где первое слагаемое в правой части (8) представляет собой явно выделенную сумму падающей (1) и отраженной от экрана плоских волн. Интегральное слагаемое

есть разложение дифракционного поля в интеграл Фурье, у которого по аналогии с (6) проведено разложение каждой моды на симметричную и антисимметричную части с амплитудами $A_s(\beta)$ и $A_a(\beta)$. Для области справа от экрана ($x \geq d$) будем использовать подобное представление

$$u = \int_0^{+\infty} [B_s(\beta) \cos \beta z + iB_a(\beta) \sin \beta z] \exp(i\alpha(x-d)) d\beta. \quad (9)$$

Чтобы поля (8) и (9) имели ограниченную величину при $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow +\infty$, для параметров

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (10)$$

нужно выбирать ветвь корня с неотрицательной мнимой частью ($\text{Im } \alpha \geq 0$), а необходимым условием ограниченности этих полей при $z \rightarrow \pm\infty$ является точное совпадение контура интегрирования с вещественной осью β .

Моды бесконечного пространства у полей (8) и (9) также обладают свойством ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \beta z \cos \tilde{\beta} z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \beta z \sin \tilde{\beta} z dz = \pi \delta(\beta - \tilde{\beta}),$$

где δ — дельта-функция Дирака.

При этом интегралы перекрытия между ними и модами щели (6) будут определяться выражениями

$$\int_{-l}^{+l} \cos \beta z \cos \xi_{sn} z dz = l Q_n^{(s)}(\beta),$$

$$\int_{-l}^{+l} \sin \beta z \sin \xi_{an} z dz = l Q_n^{(a)}(\beta),$$

где использованы обозначения

$$Q_n^{(s)}(\beta) = \text{sinc}((\beta - \xi_{sn})l) + \text{sinc}((\beta + \xi_{sn})l),$$

$$Q_n^{(a)}(\beta) = \text{sinc}((\beta - \xi_{sn})l) - \text{sinc}((\beta + \xi_{sn})l), \quad (11)$$

sinc — стандартное обозначение для функции $\text{sinc } x = \sin x/x$.

Неизвестные амплитуды мод дифракционных полей определяются в результате сшивания этих полей на границах областей $x = \pm d$. Подставим (6), (8) и (9) в граничные условия (4) и разложим полученные уравнения по ортогональной системе функций $\cos \beta z$, $\sin \beta z$ на всей оси z от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получим выражения, определяющие амплитуды дифракционных мод свободного пространства через амплитуды мод щели,

$$A_s(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{sn} + b_{sn} \exp(2i\sigma_{sn}d)) Q_n^{(s)}(\beta),$$

$$A_a(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{an} + b_{an} \exp(2i\sigma_{an}d)) Q_n^{(a)}(\beta),$$

$$B_s(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{sn} \exp(2i\sigma_{sn}d) + b_{sn}) Q_n^{(s)}(\beta),$$

$$B_a(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{an} \exp(2i\sigma_{an}d) + b_{an}) Q_n^{(a)}(\beta). \quad (12)$$

Уравнения для последних выводятся из граничных условий (5), если подставить туда выражения (6), (8), (9), (12) и разложить по системе ортогональных функций $\cos \xi_{sm}z$, $\sin \xi_{am}z$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) на интервале z от $-l$ до l . Складывая и вычитая почленно результирующие уравнения, будем иметь четыре независимые системы линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка, по две для амплитуд симметричных и антисимметричных мод щели. После усечения числа уравнений и неизвестных до конечного значения N они примут вид

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} c_n = f_m, \quad (13)$$

где

$$A_{mn} = W_{nm}^{(s,a)} \Gamma_{sn,an}^{\pm} + \sigma_{sn,an} \Gamma_{sn,an}^{\mp} \delta_{nm},$$

$$c_n = c_{sn,an}^{\pm}, \quad f_m = \alpha_0 Q_m^{(s,a)}(\beta_0),$$

$$W_{nm}^{(s,a)} = \frac{l}{\pi} \int_0^{+\infty} \alpha Q_n^{(s,a)}(\beta) Q_m^{(s,a)}(\beta) d\beta, \quad (14)$$

$$\Gamma_{sn,an}^{\pm} = 1 \pm \exp(2i\sigma_{sn,an}d),$$

$$c_{sn,an}^{\pm} = (a_{sn,an} \pm b_{sn,an})/2. \quad (15)$$

Каждую такую систему можно непосредственно решить одним из стандартных методов [11,12], как это делалось в работе [6]. Но при малой толщине проводящего экрана $2d$ система (13) становится плохо обусловленной [11], т.е. ее определитель оказывается столь малым по величине, что обычные методы не будут давать устойчивых решений. Чтобы получить требуемое решение систем (13), справедливое при любых значениях толщины экрана, воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова [13]. Вместо непосредственного решения исходной системы уравнений будем искать минимум функционала

$$\sum_{m=1}^N \left| \sum_{n=1}^N A_{mn} c_n - f_m \right|^2 + \mu \sum_{m=1}^N |c_m|^2 \xi_m^2 = \min, \quad (16)$$

где μ — параметр регуляризации (малая положительная величина), который специально подбирается из условия минимальности данного параметра при удовлетворительной обусловленности получаемой системы.

Дополнительное слагаемое в левой части (16) отвечает регуляризации искомого решения по второй производной, т.е. использованию критерия выбора решения по минимальной скорости изменения вдоль щели. Дифференцируя условие (16) по всем c_m^* (звездочка

обозначает комплексное сопряжение), получим новую, хорошо обусловленную систему уравнений

$$\sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^N A_{km}^* A_{kn} + \mu \xi_n^2 \delta_{mn} \right) c_n = \sum_{k=1}^N A_{km}^* f_k; \quad m = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (17)$$

Теперь для решения системы (17) можно применить любой стандартный метод [11,12], скажем, метод квадратного корня.

После нахождения решений систем (13) (или, точнее, регуляризованных систем (17)) с помощью (12) можно рассчитать амплитуды мод полей внутри щели, а также слева и справа от экрана

$$a_{sn,an} = c_{sn,an}^+ + c_{sn,an}^-, \quad b_{sn,an} = c_{sn,an}^+ - c_{sn,an}^-,$$

$$A_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^N (c_{sn,an}^+ \Gamma_{sn,an}^+ + c_{sn,an}^- \Gamma_{sn,an}^-) Q_n^{(s,a)}(\beta),$$

$$B_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^N (c_{sn,an}^+ \Gamma_{sn,an}^+ - c_{sn,an}^- \Gamma_{sn,an}^-) Q_n^{(s,a)}(\beta), \quad (18)$$

а затем вычислить пространственные компоненты электрического и магнитного полей во всех трех областях, подставляя (6), (8) и (9) в (2). Для численного вычисления интегралов (8), (9), а также для вычисления интегральных элементов матриц (14) можно ввести дискретную сетку аргумента β и применить приближенные квадратурные формулы [12], использующие значения подынтегральных функций в узлах или междоузлиях сетки. Физически это будет означать, что непрерывный спектр мод полей вне щели (8), (9) аппроксимируется дискретным спектром с соответствующими весовыми множителями. При этом количество учитываемых мод должно быть ограниченным, скажем, не превышающим некоторого целого числа M , что в случае равномерной сетки соответствует приближенной замене в формулах (8), (9) и (14) верхнего бесконечного предела интегрирования на конечное число ΔM , где Δ — шаг сетки. Здесь, как и при ограничении размерности системы (13), критерием правильности выбора числа M и шага Δ может служить проверка точности выполнения граничных условий дифракционной задачи после выполнения всех расчетов. На равномерной сетке аргумента β интегральные элементы матриц (14) целесообразно считать по простой квадратурной формуле средних [12], однако в интегралах полей (8), (9) следует учитывать возможность быстрых осцилляций экспонент при больших значениях координат x и z . Проще всего это сделать, используя при вычислении данных интегралов линейное приближение по аргументу β для показателей экспонент и приближение средних для остальных подынтегральных функций.

2. Решение для E -поляризации

В случае, когда электрический вектор падающей волны поляризован параллельно плоскости ее распространения (E -поляризация), также будем применять представление различных пространственных компонент электрического и магнитного векторов через одну скалярную функцию [2,3,10]

$$E_x = -\frac{i}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad H_y = \bar{u}, \quad (19)$$

где остальные компоненты равны нулю.

Эта функция \bar{u} должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (3). Граничные условия для нее устанавливаются с помощью (19) и сформулированных выше условий для векторов электрического и магнитного полей на границах областей

$$(\partial \bar{u} / \partial x)_{x=-d-0} = \begin{cases} 0 & (|z| > l), \\ (\partial \bar{u} / \partial x)_{x=-d+0} & (|z| < l), \end{cases} \quad (20a)$$

$$(\bar{u})_{x=-d-0} = (\bar{u})_{x=-d+0} \quad (|z| < l), \quad (21a)$$

$$(\partial \bar{u} / \partial x)_{x=d+0} = \begin{cases} 0 & (|z| > l), \\ (\partial \bar{u} / \partial x)_{x=d-0} & (|z| < l), \end{cases} \quad (20b)$$

$$(\bar{u})_{x=d+0} = (\bar{u})_{x=d-0} \quad (|z| < l), \quad (21b)$$

$$(\partial \bar{u} / \partial x)_{z=\pm l} = 0 \quad (-d \leq x \leq d),$$

причем требование ограниченности полей при $x \rightarrow \pm\infty$ и $z \rightarrow \pm\infty$ остается в силе.

По аналогии со случаем H -поляризации в каждой из трех областей будем строить полевую функцию u в виде суперпозиции синусоидальных мод, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (3). Пусть внутри щели (при $-d \leq x \leq d$, $-l \leq z \leq l$)

$$\bar{u} = k \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \bar{\sigma}_{sn}^{-1} [\bar{a}_{sn} \exp(i\bar{\sigma}_{sn}(d+x)) - \bar{b}_{sn} \exp(i\bar{\sigma}_{sn}(d-x))] \cos \bar{\xi}_{sn} z + i\bar{\sigma}_{an}^{-1} [\bar{a}_{an} \exp(i\bar{\sigma}_{an}(d+x)) - \bar{b}_{an} \exp(i\bar{\sigma}_{an}(d-x))] \sin \bar{\xi}_{an} z \right\}, \quad (22)$$

где

$$\bar{\sigma}_{sn,an} = \sqrt{k^2 - \bar{\xi}_{sn,an}^2}, \quad (23)$$

а параметры распространения симметричных и антисимметричных мод образуют бесконечные дискретные ряды значений $\bar{\xi}_{sn} = (\pi/l)(n-1)$, $\bar{\xi}_{an} = (\pi/l)(n-1/2)$, что должно обеспечивать равенство нулю нормальной производной поля каждой моды на границах щели $z = \pm l$ и их ортогональность между собой

$$\int_{-l}^{+l} \cos \bar{\xi}_{sn} z \cos \bar{\xi}_{sm} z dz = l \delta_{nm} (1 + \delta_{n1}),$$

$$\int_{-l}^{+l} \sin \bar{\xi}_{an} z \sin \bar{\xi}_{am} z dz = l \delta_{nm}.$$

Поле слева от экрана ($x \leq -d$) ищем в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} = & (\cos \beta_0 z + i \sin \beta_0 z) \\ & \times [\exp(i\alpha_0(x+d)) + \exp(-i\alpha_0(x+d))] \\ & - k \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} [\bar{A}_s(\beta) \cos \beta z + i \bar{A}_a(\beta) \sin \beta z] \\ & \times \exp(-i\alpha(x+d)) d\beta, \end{aligned} \quad (24)$$

а в области справа от экрана ($x \geq d$)

$$\begin{aligned} \bar{u} = & k \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} [\bar{B}_s(\beta) \cos \beta z + i \bar{B}_a(\beta) \sin \beta z] \\ & \times \exp(i\alpha(x-d)) d\beta, \end{aligned} \quad (25)$$

где для параметра α (10) по-прежнему выбирается ветвь корня с неотрицательной мнимой частью; первое слагаемое в правой части (24) представляет собой явно выделенную сумму падающей (1) и отраженной плоских волн.

Неизвестные амплитуды мод дифракционных полей определяются через параметры падающей волны (1) в результате подстановки выражений (22), (24) и (25) в граничные условия (20). Процедура вывода соответствующих выражений аналогична той, которая была проведена для H -поляризации. Для амплитуд мод свободного пространства получаются выражения, в точности совпадающие по виду с выражениями (12), куда будут входить те же интегралы перекрытия (11). Затем эти выражения подставляются в (24), (25) и граничные условия (21) и разлагаются по ортогональной системе функций $\cos \xi_{sm} z$, $\sin \xi_{am} z$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) на щели. В результате получаются такие же системы линейных уравнений (13) для амплитуд симметричных и антисимметричных мод щели, в которых

$$\begin{aligned} A_{mn} = & \bar{W}_{nm}^{(s,a)} \bar{\Gamma}_{sn,an}^{\pm} + \chi_m \bar{\sigma}_{sn,an}^{-1} \bar{\Gamma}_{sn,an}^{\mp} \delta_{nm}, \\ c_n = & \bar{c}_{sn,an}^{\pm}, \quad f_m = k^{-1} Q_m^{(s,a)}(\beta_0), \end{aligned}$$

$\chi_m = 2$ для симметричной моды с $m = 1$, а в остальных случаях $\chi_m = 1$,

$$\bar{W}_{nm}^{(s,a)} = \frac{l}{\pi} \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} Q_n^{(s,a)}(\beta) Q_m^{(s,a)}(\beta) d\beta, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{sn,an}^{\pm} = & 1 \pm \exp(2i\bar{\sigma}_{sn,an}d), \\ \bar{c}_{sn,an}^{\pm} = & (\bar{a}_{sn,an} \pm \bar{b}_{sn,an})/2. \end{aligned} \quad (27)$$

После процедуры тихоновской регуляризации из этих систем получаются новые системы вида (17), а затем уже с помощью метода квадратного корня ищется их решение. Далее определяются амплитуды мод вне

щели, для вычисления которых можно использовать формулы (18) с заменой величин c и Γ (15) на соответствующие параметры E -поляризации (27). Наконец, проводится подстановка выражений (22), (24), (25) с вычисленными амплитудами мод в (19), в результате которой вычисляются различные компоненты электрического и магнитного полей во всем пространстве. Численный расчет интегралов (24), (25), а также интегральных элементов матриц (26) проводится с помощью дискретной равномерной сетки аргумента β и приближенных квадратурных формул, аналогичных формулам для H -поляризации.

Построенная теоретическая модель может применяться для численного расчета электромагнитных полей, возникающих в результате дифракции плоских волн H - и E -поляризации на идеально проводящих экранах произвольной толщины с различной шириной щели. В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 в одном масштабе приведены результаты таких расчетов на координатной сетке xQz для случая, когда угол падения волны $\theta = 30^\circ$, полуширина щели $l = 1.4k^{-1}$ и полутолщина экрана $d = 0.5l$. При расчетах использовались следующие зна-

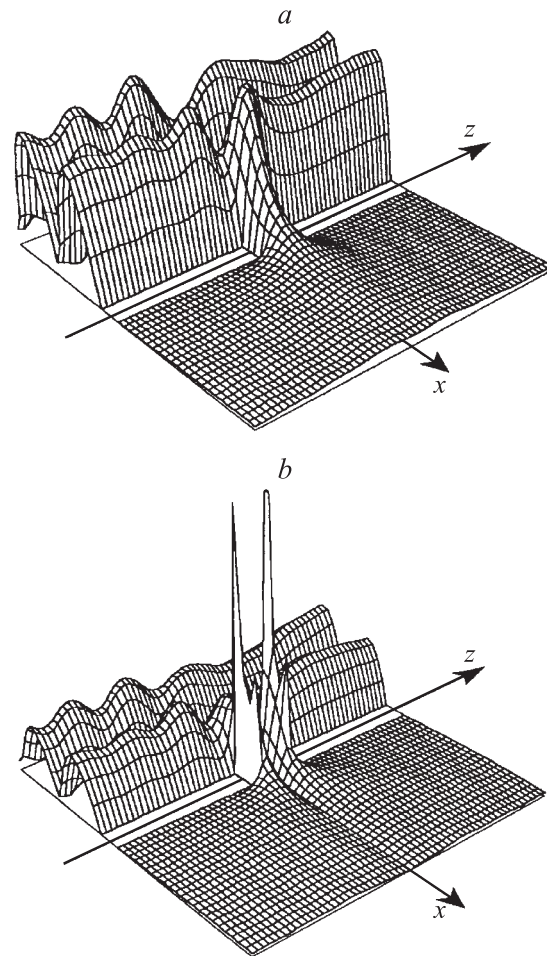


Рис. 2. Распределение величины компонент электрического E_y (a) и магнитного H_x (b) полей в пространстве при дифракции H -поляризованной плоской волны на щели в проводящем экране.

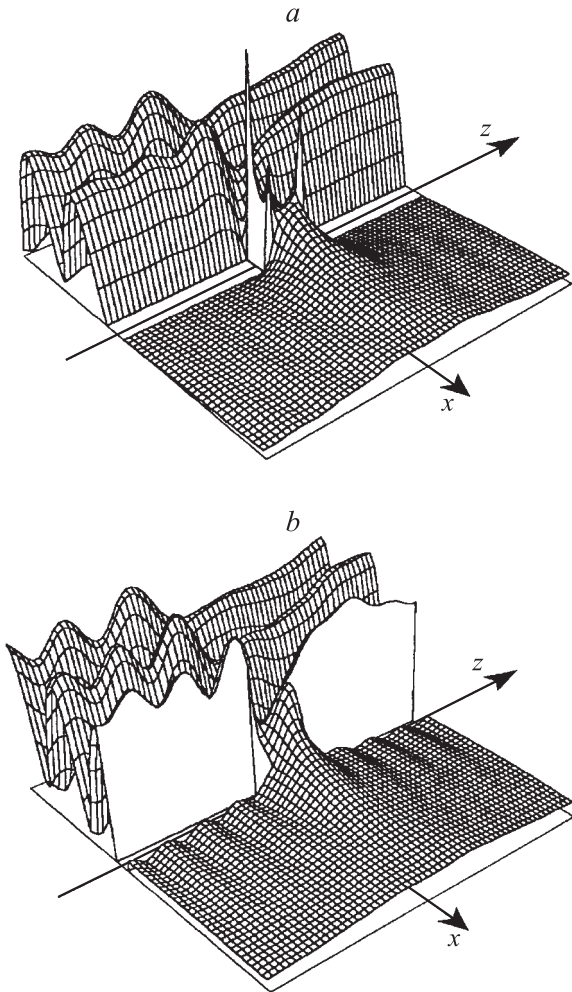


Рис. 3. Распределение величины компонент электрического E_z (a) и магнитного H_y (b) полей в пространстве при дифракции E -поляризованной плоской волны на щели в проводящем экране.

чения параметров модели: шаг равномерной сетки аргумента интегрирования полей вне щели $\Delta = 0.1k$ при $kl \leq 4$ и $\Delta = 0.01k$ при $kl > 4$; параметр регуляризации системы уравнений (17) $\mu = 10^{-5}$; число учитываемых мод щели (6), (22) $N = 19 + [2kl/\pi]$ и число внешелевых мод аппроксимирующего дискретного спектра (8), (9), (24), (25) $M = 600 + N \cdot [\pi/\Delta l]$; квадратные скобки здесь обозначают целую часть вещественного числа.

Как видно из рис. 2, b и 3, a, на краях щели возникает большой разрыв у компонент H_x и E_z (подобный разрыв имеет место также для H_z и E_x). Данное явление объясняется тем, что каждый край щели представляет собой прямоугольный клин, с одной стороны которого каждая из перечисленных компонент поля будет нормальной к проводящей поверхности, а с другой стороны она же оказывается тангенциальной. Эта компонента электрического поля на проводнике обращается в нуль, а нормальная компонента вблизи ребра клина должна вести себя как $\rho^{-1/3}$, где ρ — расстояние до его края [8,14]. Для магнитного поля имеет место обратная ситуация:

нормальная компонента на проводящей поверхности равна нулю, а тангенциальная с приближением к ребру бесконечно возрастает [8,14].

3. Расчет потоков энергии дифракционного поля

Для полноты картины наше рассмотрение следует дополнить расчетом энергетических характеристик поля дифракции. Важнейшей такой характеристикой электромагнитного поля является вектор среднего потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга), определяемый через векторы электрической и магнитной напряженностей в данной точке пространства [14],

$$\mathbf{S} = (c/8\pi)\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (28)$$

В теории он обычно интерпретируется как интенсивность излучения поля [10]. Величину и направление вектора \mathbf{S} в каждой точке можно рассчитать непосредственно по формуле (28), если известны пространственные распределения полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для скалярного поля величин $|\mathbf{S}|$ такой способ не вызывает трудностей, но при построении поля направлений он не совсем удобен. Ниже предлагается другой метод построения поля направлений вектора потока энергии, легко реализуемый при компьютерных расчетах.

Рассмотрим вектор $\mathbf{V} = (\mathbf{S} \times \mathbf{e}_y)$, где \mathbf{e}_y — орт оси y декартовой системы координат. Если поле плоское, т. е. целиком лежит в плоскости xOz , и если среда непоглощающая (отсутствуют токи и свободные заряды), то $(\nabla \mathbf{S}) = 0$ [14]. Тогда $(\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ и поле векторов \mathbf{V} может быть представлено в виде градиента некоторой скалярной функции U , которую назовем энергетическим потенциалом

$$U = U_0 - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V} d\mathbf{r} = U_0 + \frac{c}{8\pi} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \text{Re}(\mathbf{e}_y \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)) d\mathbf{r}, \quad (29)$$

где $U_0 = U(\mathbf{r}_0)$, \mathbf{r}_0 — радиус-вектор фиксированной точки в пространстве, выбор которой достаточно произволен.

Поскольку векторы \mathbf{S} и \mathbf{V} ортогональны, то эквипотенциальные линии скалярного поля U будут линиями тока соленоидального поля \mathbf{S} . Таким образом, для построения поля направлений вектора потока энергии плоского поля в непоглощающей среде достаточно построить линии уровня поля энергетического потенциала (29). При этом величина вектора $\mathbf{V} = -\nabla U$, равная величине потока энергии электромагнитного поля, будет пропорциональной скорости изменения указанного потенциала, тогда эту величину можно локально оценивать по густоте эквипотенциальных линий в данной области поля.

Для H -поляризации плоского поля энергетический потенциал определится выражением

$$U = U_0 - \frac{c}{8\pi} \left(\int_{x_0}^x \text{Re}(E_y H_x^*) dx + \int_{z_0}^z \text{Re}(E_y H_z^*) dz \right), \quad (30)$$

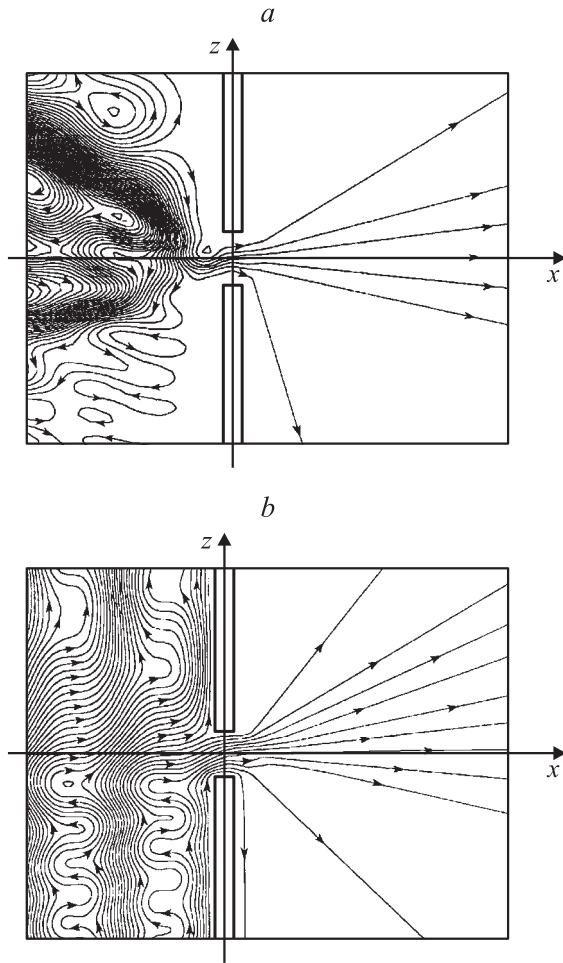


Рис. 4. Линии потока энергии при дифракции H -поляризованной (a) и E -поляризованной (b) плоских волн на щели в проводящем экране.

а для E -поляризации поля будем иметь

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + \frac{c}{8\pi} \left(\int_{x_0}^x \operatorname{Re}(E_x H_y^*) dx + \int_{z_0}^z \operatorname{Re}(E_z H_y^*) dz \right). \quad (31)$$

На рис. 4 показаны линии уровня энергетического потенциала (линии тока энергии), рассчитанные по формулам (30), (31) для электромагнитных полей дифракции плоской волны на щели, представленных на рис. 2 и 3. Видно, что линии тока H -поляризации как бы отталкиваются проводящей поверхностью, а линии E -поляризации будто притягиваются к ней. Такое поведение линий тока энергии обусловлено тем, что с приближением к проводящей поверхности величина вектора потока первой поляризации уменьшается до нуля, а у второй поляризации она, наоборот, возрастает до максимального значения. Данный эффект есть следствие граничных условий для вектора потока энергии (28), которые вытекают из граничных условий для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} (2) и (19). Действительно, у H -поляризации величина этого вектора на поверхности проводника обращается в нуль,

поскольку все компоненты электрического поля, включая тангенциальную компоненту E_y , здесь равны нулю. Для E -поляризации тангенциальная компонента вектора \mathbf{S} (28) пропорциональна $\partial|H_y|^2/\partial\xi$, а нормальная — $\partial|H_y|^2/\partial\eta$, где ξ — тангенциальная координата проводящей поверхности (z или x), η — нормальная координата (x или z). Тангенциальная компонента электрического поля на проводнике равна нулю; $\partial H_y/\partial\eta = 0$, а вслед за ней обращается в нуль нормальная компонента вектора потока энергии $\partial|H_y|^2/\partial\eta = 0$, в результате величина последнего $|\mathbf{S}| = (c/16\pi)(\partial|H_y|^2/\partial\xi)$ оказывается пропорциональной величине $|H_y|^2$, достигающей максимума по аргументу η на проводящей поверхности.

Заключение

Представленную теоретическую модель легко обобщить на случай, когда щель в проводящем экране заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , для чего достаточно в формулах (7) и (23) заменить k^2 на $k^2\varepsilon$. Следует отметить, что данная модель использует только приближения вычислительного характера, а именно сведение бесконечномерных систем к конечномерным и аппроксимацию интегралов по модам свободного пространства квадратурными формулами. Никаких иных приближений здесь не используется, поэтому ее можно считать вполне строгой, тем более что в классической строгой теории [2,3,10] решение для полей определяется в виде интегралов или бесконечных степенных рядов, при вычислении которых приходится пользоваться аналогичными приближениями.

В случае предельно малой толщины экрана ($d \rightarrow 0$) область между его границами $-d \leq x \leq d$ вырождается в апертурную плоскость. При этом наша модель, хотя и дает большую величину для некоторых компонент полей на краях щели (рис. 2, b и 3, a), но не обеспечивает сингулярностей зоммерфельдовского типа $\rho^{-1/2}$ (ρ — расстояние до края), которые должны возникать на краю идеально проводящей полуплоскости [2,3,10]. Такое отличие обусловлено разными математическими подходами к построению поля в апертурной плоскости. В строгой теории, в частности в модели Зоммерфельда [2,3,10], разложение по системе синусоидальных базисных функций (компонентам Фурье) для дифракционного поля берется по всей плоскости апертуры, включая проводник, а в методе частичных областей оно определяется только по области щели, где металл отсутствует и поле отлично от нуля. В результате при любой сколь угодно малой, но конечной толщине экрана характер поведения поля вблизи его краев оказывается иным, чем у экрана нулевой толщины. Поэтому при решении задач дифракции на экранах очень малой толщины большое значение приобретает проблема выбора теоретической модели, в частности вопрос о том, можно ли для таких задач использовать методы и результаты строгой теории дифракции, основанные на представлении о бесконечно тонких экранах. Поскольку реальные проводники всегда

имеют конечную толщину, нам представляется, что в подобных случаях следует отдавать предпочтение методам, учитывающим ее конечное значение, и, в частности, методу частичных областей (см., например, [15]).

Процедура тихоновской регуляризации, использованная при решении систем уравнений для амплитуд мод щели (13), оказывается полезной не только в случае тонкого проводящего экрана. Она дает возможность существенно повысить точность решения дифракционной задачи и для экранов конечной толщины, уменьшая погрешность несовпадения результирующих полей (2), (19) по обе стороны границ щели. С увеличением ширины последней и толщины экрана различие между нерегуляризованным и регуляризованным решениями уменьшается, но при ширине щели порядка длины падающей волны это различие все еще остается заметным. При большой ширине щели, намного превышающей длину волны падающего излучения, данная теоретическая модель также работает, но в этом случае объем вычислений значительно увеличивается. Происходит это за счет увеличения числа учитываемых щелевых мод и узлов координатной сетки, на которой рассчитывается поле, поскольку для получения адекватной картины дифракции предпочтительно использовать сетку с шагом, в несколько раз меньшим длины волны.

Список литературы

- [1] Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе. М.: ИЛ, 1953. С. 430–432.
- [2] Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- [3] Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.
- [4] Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наукова думка, 1984. С. 100–174.
- [5] Kashyap S.C., Hamid M.A. // IEEE Trans. Antennas and Propag. 1971. Vol. AP-19. N 4. P. 499–507.
- [6] Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л., Шестопалов В.П. // РИЭ. 1977. Т. 22. № 3. С. 474–484.
- [7] Анютин А.П., Кюркчан А.Г. // РИЭ. 2004. Т. 49. № 1. С. 15–23.
- [8] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
- [9] Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ: численные методы расчета и проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
- [10] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. С. 513–548.
- [11] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002. 733 с.
- [12] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [13] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. С. 110–127.
- [14] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [15] Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. // РИЭ. 2004. Т. 49. № 5. С. 551–558.