

Электрическое поглощение мелкой металлической частицы цилиндрической формы

© Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов

Московский государственный университет леса,
141005 Мытищи, Московская область, Россия
e-mail: yushkanov@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 4 октября 2004 г.)

Вычислено сечение поглощения энергии внешнего электрического поля, ориентированного вдоль оси симметрии цилиндрической частицы из металла. Рассмотрен случай когда радиус частицы во много раз меньше ее длины. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней поверхности частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц могут существенно отличаться от свойств массивных образцов металла [1]. Если линейный размер R образца металла будет порядка Λ — длины свободного пробега электронов или меньше ее $R < \Lambda$, то взаимодействие электронов с границей металлического образца начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Следствием этого и являются особые оптические свойства образца (металлической частицы). Поэтому, когда выполняется условие $R < \Lambda$, одна из основных оптических характеристик — сечение поглощения обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения R/Λ . При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов Λ лежит в следующих характерных пределах: 1–100 nm. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких nm, т. е. ситуация $R < \Lambda$ реализуется.

В качестве аппарата, способного описывать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

Уравнения макроскопической электродинамики применимы лишь в случае „массивных“ образцов $R \gg \Lambda$. Поэтому известная теория Ми, которая описывает взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, непригодна для описания упомянутого размерного эффекта.

В работах [3,4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. Немного ранее в предельном случае $R \ll \Lambda$ на низких частотах (дальний ИК диапазон) результат, совпадающий в [3], получен в работах [5,6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении

кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7,8].

Частицы, которые встречаются в природе и технических приложениях, часто имеют несферическую форму. В связи с этим в последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9–13]. В работе [9] изучалось взаимодействие электромагнитного излучения с эллипсоидальными частицами. Ряд работ [10–13] был посвящен описанию взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей. В работах [3–6,10–13] теоретически описывалось только магнитное дипольное поглощение мелких металлических частиц. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантово-механических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [14,15].

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов проводимости в однородной цилиндрической частице на переменное электрическое поле плоской электромагнитной волны. По найденной функции распределения удастся рассчитать зависимость сечения поглощения от радиуса частицы и частоты. Отдельно рассмотрен важный случай низких частот внешнего поля и частот объемных столкновений электронов внутри частицы.

1. Математическая модель и расчет

Рассматривается цилиндрическая частица из немагнитного металла радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), помещенная в поле плоской электромагнитной волны частоты ω , которая по порядку величины много меньше частоты плазменного резонанса ω_p в металлах ($\omega_p \sim 10^{16} \text{ s}^{-1}$). Частица считается малой, что означает $R \ll 2\pi c/\omega$ (c — скорость света в вакууме). Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что $R < \delta$ — глубины скин-слоя).

Рассмотрим общий случай взаимодействия линейно поляризованного электромагнитного излучения с цилиндрической пластиной, когда ось симметрии частицы ортогональна направлению распространения излучения.

Пусть направление вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля волны составляет угол γ с осью цилиндрической частицы. Тогда величина проекции вектора напряженности электрического поля в направлении оси цилиндра $E_1 = E \cos \gamma$, а величина проекции вектора напряженности электрического поля в направлении, перпендикулярном к оси, $E_n = E \sin \gamma$.

Сечение поглощения частицы можно представить как

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \gamma + \sigma_n \sin^2 \gamma.$$

Величина σ_1 обусловлена проекцией вектора напряженности электрического поля E_1 , а величина σ_n обусловлена проекцией вектора напряженности электрического поля E_n .

В настоящей работе проведено вычисление σ_1 (индекс 1 в дальнейшем мы опускаем). В случае, когда вектор напряженности электрического поля волны \mathbf{E} перпендикулярен оси цилиндра, вектор напряженности магнитного поля волны \mathbf{H} направлен вдоль оси цилиндра. В этом случае доминирующий вклад в сечение поглощения вносит магнитное дипольное поглощение частицы, обусловленное вихревыми токами. Анализ этого поглощения проведен в работах [10–13].

Для достаточно длинного цилиндра электрическое поле волны в большей части объема цилиндра остается неэкранированным. Для оценки параметров, при которых осуществляется этот режим, рассмотрим известное решение для вытянутого эллипсоида в электрическом поле [16]. Мы исходим из того, что достаточно длинный цилиндр можно аппроксимировать вытянутым эллипсоидом. Для этого воспользуемся результатами работы [16], в которой рассчитана напряженность электрического поля внутри вытянутого эллипсоида вращения с полуосями a , b , d ($a > b = d$) (фактически бесконечного цилиндра), помещенного во внешнее однородное электрическое поле, направленное вдоль оси симметрии эллипсоида,

$$E_{\text{int}} = \frac{E_{\text{ext}}}{1 + (\varepsilon_{\text{int}} - 1)n(e)},$$

$$n(e) = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left[\ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - 2e \right],$$

где E_{ext} — напряженность внешнего электрического поля; E_{int} — напряженность электрического поля в эллипсоиде; ε_{int} — диэлектрическая проницаемость эллипсоида; $n(e)$ — коэффициент, являющийся функцией эксцентриситета эллипсоида e ($e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$).

Если отсутствует экранировка, то $E_{\text{int}} \approx E_{\text{ext}}$ и, следовательно, $1 + (\varepsilon_{\text{int}} - 1)n(e) \approx 1$, что возможно при $|\varepsilon_{\text{int}} n(e)| \ll 1$ (единицей, стоящей в скобках, можно пренебречь, так как диэлектрическая проницаемость металлов очень велика).

Далее, воспользовавшись формулами Друде для частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и проводимости металла $\Sigma(\omega)$ [17] (мы считаем, что частота внешнего поля мала по сравнению с частотой объемных столкновений электронов внутри частицы, т.е. $\omega\tau \ll 1$),

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i(4\pi\Sigma(\omega)/\omega), \quad \Sigma(\omega) = \Sigma(0)/(1 - i\omega\tau),$$

$$\Sigma(0) = e^2 n \tau / m,$$

где e и m — заряд и эффективная масса электрона в металле, n — концентрация электронов проводимости, τ — электронное время релаксации, а также определением эксцентриситета (полуоси b и a , если рассматривать вытянутый эллипсоид как бесконечный цилиндр, отождествляются с радиусом и полудлиной цилиндра $b = R$, $a = L/2$; в случае вытянутого цилиндра $e \rightarrow 1$), получаем методом последовательных приближений искомое предельное соотношение между радиусом и длиной частицы ($\Gamma = R/L$)

$$\Gamma \ll \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\Sigma(0)}} / \sqrt{\ln \left(\frac{4\pi\Sigma(0)}{\omega} \right)}.$$

Также в работе используются общепринятые физические допущения: электроны проводимости рассматриваются как вырожденный ферми-газ, и описывается их отклик на внешнее переменное магнитное поле с помощью уравнения Больцмана в приближении времени релаксации. В граничных условиях принято, что отражение электронов от внутренней поверхности частицы носит диффузный характер.

Процесс поглощения энергии электромагнитной волны цилиндрической частицей можно описать следующим образом: однородное периодическое по времени электрическое поле волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы), \mathbf{v} — скорость электрона.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e \left(\frac{m}{h} \right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v, \quad (2)$$

(где h — постоянная Планка), а также к диссипации в объеме частицы энергии. Энергия \bar{Q} , диссипируемая в единицу времени, равна [16]

$$\bar{Q} = \int \overline{(\text{Re } \mathbf{E})(\text{Re } \mathbf{j})} d^3r = \frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3r, \quad (3)$$

здесь чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой — комплексное сопряжение.

В формуле (2) используется стандартная нормировка функции распределения f , при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [17]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon_f = mv_f^2/2$ — энергия Ферми (v_f — скорость Ферми).

Предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной f_0 , возникающего под действием высокочастотного поля (1). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [2,17]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{vE}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (4)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации

$$(df_1/dt)_s = -\frac{f_1}{\tau}.$$

Решая уравнение (4) методом характеристик [18], получаем

$$f_1 = A(\exp(-vt') - 1)/v, \quad t' \geq 0, \quad (5)$$

где

$$v = 1/\tau - i\omega, \quad A = e(\mathbf{vE}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (6)$$

Причем v и A постоянны вдоль траектории (характеристики). Параметр t' в выражении (5) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки \mathbf{r} со скоростью \mathbf{v} .

Для однозначного определения функции f_0 необходимо задать для нее граничное условие на цилиндрической поверхности частицы. В качестве такового принимаем условие диффузного отражения электронов от этой поверхности [2]

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где \mathbf{r}_\perp и \mathbf{v}_\perp — соответственно компоненты радиус-вектора электрона \mathbf{r} и его скорости \mathbf{v} в плоскости, перпендикулярной к оси неоднородного цилиндра.

При отражении электрона от границы частицы параметр t' в выражении (5) определяется как

$$t' = \left\{ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + [(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2)v_\perp^2]^{1/2} \right\} / v_\perp. \quad (8)$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Используя очевидное векторное равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t'$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор электрона в момент отражения от границы частицы, и проектируя его на плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра, имеем $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t'$, где векторы \mathbf{r}_\perp , $\mathbf{r}_{0\perp}$ и \mathbf{v}_\perp являются компонентами исходных векторов в плоскости проекции. Возводя обе части последнего равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно t' , можно получить выражение (8).

Соотношениями (5), (6) и (8) полностью определено решение f_1 уравнения (4) с граничным условием (7), что позволяет рассчитывать ток (2) и диссипируемую мощность (3).

При вычислении интегралов (2), (3) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат (r_\perp, φ, z ; полярная ось — ось Z ; вектор \mathbf{E}_0 параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей (v_\perp, α, v_z ; полярная ось — ось v_z). Ось цилиндра совпадает с осью Z . Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z -компоненту

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z; \quad E_z = E_0 \exp(-i\omega t). \quad (9)$$

Соответственно и ток (2) обладает лишь z -компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси Z)

$$j_z = \frac{3ne^2}{4\pi v_f^3 v} \int v_z^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) (1 - \exp(-vt')) d^3 v. \quad (10)$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в металлах определяется как

$$n = 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \int f_0 d^3 v = 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{4}{3} \pi v_f^3.$$

Сечение поглощения электромагнитного излучения σ находим, разделив среднюю диссипируемую мощность \bar{Q} (см. (3)) на средний поток энергии в волне с $E_0^2/8\pi$,

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cE_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \int j_z E_z^* d^3 r \right\}$$

или, учитывая (10),

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cE_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \int \frac{3ne^2 E_z}{4\pi v_f^3 v} \times \left[\int v_z^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) (1 - \exp(-vt')) d^3 v \right] E_z^* d^3 r \right\}.$$

Воспользовавшись свойствами δ -функции, имеем

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) &= \frac{2}{m} \delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_f^2) = \frac{2}{m} \delta[v_z^2 - (v_f^2 - v_\perp^2)] \\ &= \frac{2}{m} \delta \left[(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \cdot (v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \right] \\ &= \frac{1}{m \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \left[\delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \right. \\ &\quad \left. + \delta(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) \right]. \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, результат удваивается, поэтому

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cE_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \int \frac{3ne^2 E_z}{4\pi v_f^3 v} \left[\frac{2}{m} \times \int \frac{v_z^2 \delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2})}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} (1 - \exp(-vt')) d^3 v \right] E_z^* d^3 r \right\}.$$

Далее, воспользовавшись (9), имеем

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cE_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{3ne^2}{4\pi v_f^3 v} \frac{2}{m} \int E_0 \exp(-\omega t) \times \left[\int \frac{v_z^2 \delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2})}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} (1 - \exp(-vt')) d^3 v \right] \times E_0 \exp(i\omega t) d^3 r \right\}.$$

После несложных преобразований получаем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{6ne^2}{mcv_f^3 v} \int \left[\int \frac{v_z^2 \delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2})}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \times (1 - \exp(-vt')) d^3 v \right] d^3 r \right\}.$$

Подставляя пределы интегрирования во внутреннем интеграле, приходим к выражению

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{6ne^2 \omega^2}{mcv_f^3 v} \int \left[\int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{v_z^2 v_\perp}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \times \delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) (1 - \exp(-vt')) dv_\perp d\alpha dv_z \right] d^3 r \right\}.$$

Проинтегрировав по переменной v_z , а также подставляя пределы интегрирования во внешнем интеграле, имеем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{6ne^2}{mcv_f^3 v} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \times (1 - \exp(-vt')) dv_\perp d\alpha \right] r_\perp dr_\perp d\varphi dz \right\}.$$

Интегралы по переменным φ и z элементарные, поэтому

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{6ne^2}{mcv_f^3 v} 2\pi L \int_0^R r_\perp dr_\perp \times \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-vt')) dv_\perp d\alpha \right\}.$$

Окончательно получаем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{12\pi ne^2 L}{mcv_f^3 v} \int_0^R r_\perp dr_\perp \times \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-vt')) dv_\perp d\alpha \right\}. \quad (11)$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов выражение (11), по которому определяется сечение поглощения энергии внешнего электрического поля, удобно представить в виде

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{24\pi ne^2 L}{mcv_f^3 v} \int_0^R r_\perp dr_\perp \times \int_0^{v_f} \int_0^{2\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-vt')) dv_\perp d\alpha \right\} \quad (12)$$

(движение электронов симметрично относительно любой диаметральной плоскости, в которой лежит точка их положения на траектории, поэтому можно считать, что угол α в пространстве скоростей изменяется от 0 до π , и удваивать результат интегрирования по этой переменной).

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{r_\perp}{R}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{v_f},$$

$$z = v \frac{R}{v_f} = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \frac{R}{v_f} = x - iy$$

и преобразуем выражение (8)

$$t' = \frac{R}{v_\perp} \eta, \quad \eta = \left(\xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha} \right).$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp = r_\perp v_\perp \cos \alpha$ (все электроны на поверхности Ферми внутри частицы движутся со скоростями, равными v_f). Тогда формулу (12) можно представить как

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{24\pi ne^2 R^3 L}{mcv_f} \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^\pi \rho \sqrt{1 - \rho^2} \frac{(1 - \exp(-z\eta/\rho))}{z} d\rho d\alpha \right\}. \quad (13)$$

Сечение поглощения (13) запишем в виде

$$\sigma = \sigma_0 F(x, y), \quad (14)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{24\pi n e^2 R^3 L}{m c v_f},$$

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^\pi \rho \sqrt{1-\rho^2} \frac{(1-\exp(-z\eta/\rho))}{z} d\rho d\alpha \right\}. \quad (15)$$

Произведем во внутреннем интеграле замену переменной интегрирования $\alpha \rightarrow \eta$

$$\cos \alpha = (\eta^2 + \xi^2 - 1)/2\eta\xi,$$

$$\alpha = \arccos((\eta^2 + \xi^2 - 1)/2\eta\xi),$$

$$d\alpha = \left[1 - \frac{(\eta^2 + \xi^2 - 1)^2}{4\eta^2\xi^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\xi^2 - \eta^2 - 1}{2\eta^2\xi} \right] d\eta.$$

Тогда безразмерное сечение поглощения

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 d\rho \int_0^1 \int_0^\pi (\dots) d\xi d\alpha \right\} = \operatorname{Re} \left\{ - \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\xi} \int_{1-\xi}^{1+\xi} (\dots) d\xi d\eta \right\}.$$

Далее, изменяя порядок интегрирования, имеем

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 -d\rho \left[\int_0^1 d\eta \int_{1-\eta}^1 (\dots) d\xi + \int_1^2 d\eta \int_{\eta-1}^1 (\dots) d\xi \right] \right\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \int_{1-\eta}^1 \left[1 - \frac{(\eta^2 + \xi^2 - 1)^2}{4\eta^2\xi^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\xi^2 - \eta^2 - 1}{2\eta^2\xi} \right] \xi d\xi \\ &= \int_{\eta-1}^1 \left[1 - \frac{(\eta^2 + \xi^2 - 1)^2}{4\eta^2\xi^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\xi^2 - \eta^2 - 1}{2\eta^2\xi} \right] \xi d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{4-\eta^2}, \end{aligned}$$

то безразмерное сечение поглощения цилиндрической частицы

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} d\rho \times \int_0^2 \frac{(1-\exp(-z\eta/\rho))}{z} \sqrt{4-\eta^2} d\eta \right\}.$$

Проведя интегрирование по частям во внутреннем интеграле, получаем

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2z} \left[\int_0^1 -\frac{2\rho^2}{z} \sqrt{1-\rho^2} d\rho + \int_0^1 \int_0^2 \rho \sqrt{1-\rho^2} \frac{\eta}{\sqrt{4-\eta^2}} \left[\eta + \frac{\rho}{z} \exp(-z\eta/\rho) \right] d\rho d\eta \right] \right\}.$$

Проинтегрировав это выражение, имеем

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2z} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8z} + \int_0^1 \int_0^2 \frac{\rho^2}{z} \sqrt{1-\rho^2} \frac{\eta}{\sqrt{4-\eta^2}} [\exp(-z\eta/\rho)] d\rho d\eta \right] \right\}. \quad (16)$$

Численный расчет безразмерного сечения поглощения $F(x, y)$ вытянутой цилиндрической частицы представлен на рис. 1, 2.

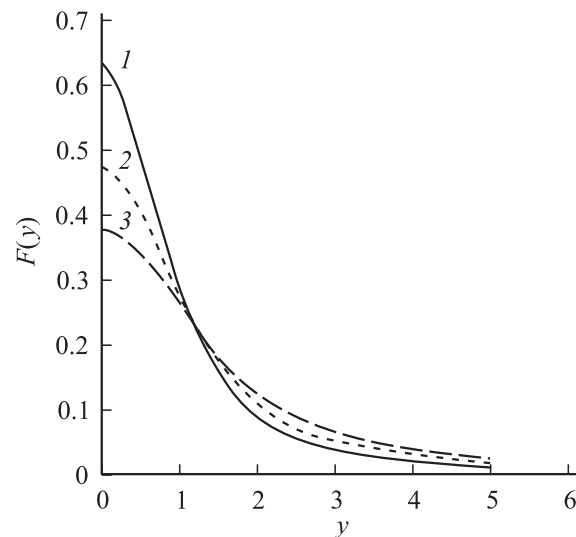


Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты y : $x = 0.3$ (1), 0.6 (2), 0.9 (3).

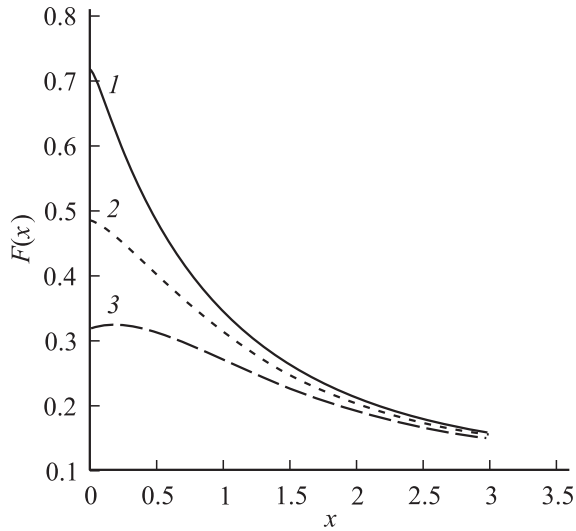


Рис. 2. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x : $y = 0.3$ (1), 0.6 (2), 0.9 (3).

2. Поглощение в низкочастотном и высокочастотном режимах

Подробно остановимся на случае, когда частота внешнего поля ω и частота столкновений электронов в объеме металла ($1/\tau$) низки по сравнению с частотой столкновения электронов с внутренней поверхностью цилиндрической частицы. Другими словами, рассмотрим случай $|z| \ll 1$.

Экспоненту, входящую в выражение (15), можно в этом случае разложить по известной формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами разложения. В результате получаем

$$F(x, y) = \int_0^1 \xi d\xi \times \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{1 - \rho^2} (\xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}) d\rho d\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, сечение поглощения в низкочастотном режиме

$$\sigma = \frac{8\pi^2 n e^2 R^3 L}{m c v_f}. \quad (17)$$

В случае, когда $|z| \gg 1$, существует асимптотика выражения (16). Пренебрегая членом с экспонентой ввиду его быстрого затухания и членом, пропорциональным $1/z^2$, приходим к следующему выражению для безразмерного сечения поглощения $F(z)$:

$$F(z) = \text{Re} \left\{ \frac{\pi}{6} \frac{1}{z(x, y)} \right\}.$$

В результате алгебраических преобразований получаем следующее выражение для сечения поглощения (14) в высокочастотном режиме:

$$\sigma(z) = \sigma_0 \text{Re} \left\{ \frac{\pi}{6} \frac{1}{z(x, y)} \right\} = \sigma_0 \frac{\pi}{6} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Это выражение соответствует классическому результату (формула Друде) для электрического поглощения однородной вытянутой цилиндрической частицы из металла. Анализ этого выражения показывает, что в случае малой длины свободного пробега электронов в частице ($x \gg 1$, $x > y$) сечение поглощения частицы убывает как $1/x$. Если же длина свободного пробега электронов велика ($x \ll 1$), что выполняется для чистых металлических образцов, то сечение поглощения вытянутой цилиндрической частицы пропорционально отношению x/y^2 .

3. Обсуждение полученных результатов

В работе [9] тоже рассматривалось электрическое поглощение вытянутого эллипсоида вращения (фактически бесконечного цилиндра). В случае низкочастотного поверхностного рассеяния электронов, когда ($x \ll 1$, $y \gg 1$) (свободно электронный режим), формула (17) совпадает с результатом

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{8\pi n e^2 R}{m c v_f} V,$$

где V — объем эллипсоида, полученным в этой работе, если рассчитать удельные (на единицу объема) сечения поглощения цилиндра и эллипсоида. Однако если поверхностное рассеяние электронов высокочастотное ($x < 1$, $y \gg 1$, $x \ll y$), то результат, полученный в [9],

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{9}{16} \frac{\pi^2 n e^2 R}{m c v_f y^2} V \quad (18)$$

заметно отличается от результата точного кинетического расчета.

Для сравнения результатов найдем макроскопическую асимптотику безразмерного сечения поглощения бесконечного цилиндра (16). Пренебрегая членом с экспонентой, имеем

$$F(z) = \frac{\pi}{6} \text{Re} \left\{ \left[\frac{1}{z} - \frac{3}{8z^2} \right] \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma_0 \frac{\pi}{6} \text{Re} \left\{ \left[\frac{1}{z} - \frac{3}{8z^2} \right] \right\} \\ &= \sigma_0 \frac{\pi}{6} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3(x^2 - y^2)}{8(x^2 + y^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Найдем отношение удельных (на единицу объема) сечений поглощения (18) и (19) в высокочастотном пределе (при указанных выше условиях в (19) доминирует второй член, пропорциональный $(-1/y^2)$)

$$\frac{\sigma_{el}}{\sigma(z)} = \frac{9}{4} = 2.25.$$

Таким образом, результат, полученный в работе [9], значительно завышен по сравнению с результатом выполненного точного кинетического расчета для электрического поглощения вытянутой цилиндрической частицы.

На рис. 1 представлена зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты внешнего поля y . Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x разная для каждой кривой. Из анализа хода кривых следует, что при малых безразмерных частотах y ($y < 1.3$) безразмерное сечение поглощения F доминирует по величине для частиц с наибольшей длиной свободного пробега электронов (т.е. с наименьшим x), если рассматривать частицы одинакового радиуса. При больших безразмерных частотах внешнего поля ($y > 1.3$) ситуация обратная. Дальнейшее увеличение безразмерной частоты ($y \gg 1$) приводит к уменьшению безразмерного сечения поглощения частицы. Это объясняется тем, что электроны проводимости внутри частицы за период не успевают значительно ускориться под действием внешнего электрического поля.

На рис. 2 приведена зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . Из рисунка видно, что безразмерное сечение поглощения частицы наиболее велико для частиц из чистого металла ($x \ll 1$), причем сечение поглощения максимально для частиц, находящихся в электрическом поле с наименьшей безразмерной частотой. С увеличением безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x все зависимости сливаются, так как имеет место макроскопическая асимптотика.

Список литературы

- [1] Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1984. Гл. 7.
- [2] Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. Гл. 11.
- [3] Лесскис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 1. С. 310–317.
- [4] Лесскис А.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // Поверхность. 1987. № 11. С. 115–121.
- [5] Trodahl H.J. // Phys. Rev. 1979. Vol. 19. P. 1316–1317.
- [6] Trodahl H.J. // J. Phys. C. 1982. Vol. 15. P. 7245–7254.
- [7] Бондарь Е.А. // Опт. и спектр. 1993. Т. 75. Вып. 4. С. 837–840.
- [8] Бондарь Е.А. // Опт. и спектр. 1996. Т. 80. № 1. С. 89–95.
- [9] Томчук П.М., Томчук Б.П. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. Вып. 2 (8). С. 661–678.
- [10] Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 114–118.

- [11] Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // Опт. и спектр. 2002. Т. 92. № 5. С. 851–856.
- [12] Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 16–22.
- [13] Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. № 5. С. 1112–1120.
- [14] Kubo R.J. // Phys. Soc. Jap. 1962. Vol. 17. P. 975.
- [15] Манькин Э.А., Полуэктов П.П., Рубежский Ю.Г. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. Вып. 6. С. 2117–2126.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [17] Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972.
- [18] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. Гл. 2.