01;03

О некоторых свойствах разложений по производным от полиномов Лежандра, проявляющихся при исследовании нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 30 декабря 2004 г.)

Приведен вывод аналитических выражений для коэффициентов разложений произведений полиномов Лежандра на их производные по полярному углу первого и второго порядков и произведений производных между собой в ряды по полиномам Лежандра и производным первого порядка. Получены аналитические выражения для коэффициентов этих разложений. Найдена связь коэффициентов разложений друг с другом и с коэффициентами Клебша–Гордана. Показано, что при аналитическом исследовании осесимметричных нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости тороидальную компоненту поля скоростей можно не принимать во внимание, что существенно сокращает весьма громоздкие расчеты.

1. С заряженной каплей приходится сталкиваться в многочисленных академических, технических и технологических проблемах. В связи с этим ее теоретическому и экспериментальному изучению в линейном приближении по амплитуде осцилляций в прошедшем столетии было посвящено несколько сотен исследований [1–4]. С конца прошлого века началось теоретическое и экспериментальное исследование ее свойств, связанных с реальной нелинейностью капли как гидродинамического объекта (см., например, [5–7] и указанную там литературу). В отличие от линейного приближения, в котором с успехом решались задачи, сформулированные как для идеальной, так и для вязкой жидкости, в нелинейном рассмотрении все проведенные к настоящему времени исследования выполнены лишь для идеальной жидкости. Причиной такого положения дел является математическая сложность и крайняя громоздкость расчетов, которые необходимо провести для отыскания решения. Рассмотрению некоторых локальных математических проблем, появляющихся на пути теоретического асимптотического исследования нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости, имеющих также и самостоятельную ценность, посвящена данная работа.

2. Как известно [8–11], в линейном по амплитуде возмущения равновесной свободной поверхности капли поле скоростей течения вязкой жидкости в ней в наиболее общей ситуации можно представить в виде суперпозиции трех полей: потенцального, вихревого тороидального и вихревого полоидального. В виде разложения по трем взаимно перпендикулярным векторным операторам $\mathbf{N}_1 \equiv \nabla$, $\mathbf{N}_2 \equiv \mathbf{N}_1 \times \mathbf{r} \equiv \nabla \times \mathbf{r}$, $\mathbf{N}_3 \equiv \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r})$ в рамках метода скаляризации поле скоростей течения вязкой жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде [12–13]

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Psi_1(\mathbf{r}, t) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r})\Psi_3(\mathbf{r}, t) + (\nabla \times \mathbf{r})\Psi_2(\mathbf{r}, t), \qquad (1)$$

где $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ — неизвестные скалярные функции, подлежащие определению в конкретной линеаризованной системе гидродинамических уравнений и граничных условий к ним.

В (1) первое слагаемое дает потенциальную часть поля скоростей, второе — вихревую полоидальную, третье — вихревую тороидальную. В наиболее часто решаемой задаче исследования осесимметричных осцилляций капли потенциальная и полоидальная компоненты поля скоростей имеют проекции на орты $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\vartheta$, а тороидальная — только на орт $\mathbf{e}_\varphi$ сферической системы координат с началом в центре масс капли.

Как показано еще в [8–11], гидродинамическая задача определения тороидальной компоненты поля скоростей не связана с задачами определения потенциальной и полоидальной его частей и тороидальная компонента поля скоростей никак не сказывается на деформации в результате движения жидкости формы поверхности капли. Справедливо и обратное утверждение: осесимметричные осцилляции свободной поверхности капли вязкой жидкости генерируют в капле потенциальные и вихревые полоидальные течения жидкости, но не вызывают появления тороидальных вихревых течений. Все расчеты осцилляций капли вязкой жидкости [8–12] в линейном по амплитуде приближении выполнены с учетом этого обстоятельства: рассчитывались только потенциальная и вихревая полоидальная компоненты поля скоростей, и на их основе находилось дисперсионное уравнение задачи, отыскание и исследование решений которого является основным результатом теоретического анализа линейного приближения. При расчетах нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости вопрос о необходимости учета вихревой тороидальной компоненты поля необходимо рассмотреть отдельно, поскольку a priori не ясно, не проявится ли влияние вихревой тороидальной компоненты через нелинейное конвективное слагаемое уравнения Навье-Стокса.

В [13,14] задача об отыскании в линейном приближении вихревой тороидальной компоненты поля скоростей выделена в явном виде и показано, что характеристики этой компоненты поля определяются видом начальных условий. В частности, в [13,14] отмечено, что задание в начальный момент времени осесимметричной начальной деформации с отсутствующей тороидальной компонентой поля скоростей ($\Psi_2(\mathbf{r}, t) \equiv 0$) позволяет утверждать, что без ограничения общности во все последующие моменты времени тороидальную компоненту поля скоростей можно считать тождественно равной нулю. Как известно, при решении нелинейных задач регулярными асимптотическими методами на основе разложений по малому параметру исходная нелинейная задача заменяется системой линейных неоднородных задач (связанных между собой через функции неоднородности) для отыскания компонент решения различных порядков малости, которые в совокупности дают асимптотическое приближение искомого решения нелинейной задачи. При решении задачи о нелинейных осесимметричных осцилляциях капли вязкой жидкости отсутствие вихревых тороидальных движений жидкости в расчетах первого порядка малости позволяет утверждать, что они не появятся и в решениях более высоких порядков малости, поскольку функции неоднородности в задачах высоких порядков определяются через решения задач низших порядков, которые, согласно сказанному выше, не будут содержать тороидальных компонент поля скоростей.

В связи со сказанным поле скоростей течения жидкости в капле вязкой жидкости, совершающей осесимметричные осцилляции, в линейном по амплитуде осцилляций приближении естественно представлять через скалярные функции $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ $(i = 1, 3)$ в виде проекций на орты осей сферической системы координат [12–15]

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega \Psi_3\right]\mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{1}{r}\Psi_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi_3)\right]\mathbf{e}_\vartheta;$$

$$\Delta_\Omega \equiv \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right). \qquad (2)$$

Как известно [12–15], скалярные функции $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ должны удовлетворять уравнениям Лапласа в сферической системе координат внутри объема ограниченного свободной поверхностью капли, близкой к сферической, и, следовательно, представимы в виде разложения по сферическим функциям $Y_m^l(\vartheta, \varphi)$

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=2}^{\infty} A_{ml}^{(i)}(r, t) \cdot Y_m^l(\vartheta, \varphi), \quad i = 1, 3. \qquad (3)$$

Принимая во внимание осесимметричность осцилляций капли (в (3) в сферических функциях $l = 0$), разложения по сферическим функциям целесообразно заменить разложениями по полиномам Лежандра, так как $Y_m^0(\vartheta, \varphi) \equiv P_m(\cos\vartheta)$.

С учетом сказанного из (2), (3) видно, что радиальная часть поля скоростей течения вязкой жидкости в капле будет представлена рядом по набору полиномов Лежандра $P_m(\cos\vartheta)$, образующих полную ортогональную систему, а вихревая полоидальная — в виде ряда по первым производным от полиномов Лежандра по полярному углу ϑ. Таким образом, первые производные от полиномов Лежандра по полярному углу ϑ в силу (2), (3), так же как и полиномы Лежандра, должны образовывать полную ортогональную систему для функций рассматриваемого класса. И это понятно, так как первые производные от полиномов Лежандра выражаются через присоединенные полиномы Лежандра с равным единице верхним индексом

$$\frac{d}{d\vartheta}P_m(\cos\vartheta) = P_m^1(\cos\vartheta).$$

Присоединенные же полиномы Лежандра с фиксированным значением верхнего индекса образуют на интервале $-1 \le \cos\vartheta \le 1$ полную ортогональную систему собственных функций, по которым любая непрерывная, дважды дифференцируемая функция полярного угла ϑ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд [16, с. 612–613]. Таким образом, при решении задачи об аналитическом расчете нелинейных осесимметричных осцилляций капли вязкой жидкости появляется необходимость и имеется возможность проводить разложения искомых функций и по полиномам Лежандра, и по их первым производным. Норма первых производных по полярному углу от полиномов Лежандра определится выражением

$$\int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta) \cdot \partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2\delta_{km}}{2m+1}m(m+1).$$

3. Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных осесимметричных осцилляций сферической капли радиуса r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющей электрический заряд Q, уравнение свободной поверхности которой в любой момент времени t в сферической системе координат r, ϑ, φ с началом в центре масс капли имеет вид

$$F(r, \vartheta, t) = r - r_0 - \xi(\vartheta, t),$$

записывается в форме

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu\Delta\mathbf{U};$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{U} = 0; \qquad \Delta\phi = 0;$$

$$t = 0: \qquad \mathbf{U} = 0; \;\; \xi = \varepsilon\sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\mu); \;\; \mu \equiv \cos(\vartheta);$$

$$r \to 0: \quad \mathbf{U} < \infty; \qquad r \to +\infty: \quad \boldsymbol{\nabla}\phi \to 0;$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t); \;\; \int_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\, dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + \xi; 0 \le \vartheta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi\};$$

$$\int_V r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \le r \le r_0 + \xi; 0 \le \vartheta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi\};$$

$$\int_V \mathbf{r} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 0;$$

$$\partial_t F + (\mathbf{U} \cdot \nabla) F = 0; \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0;$$

$$-p + 2\rho\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \frac{1}{8\pi}(\nabla\phi)^2 + \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (4)$$

ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_m — константы, учитывающие парциальный вклад m-й моды в формирование начальной формы капли, такие что $\sum_{m\in\Omega} h_m = 1$; символ ∂_t означает частную производную по переменной t; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и касательный векторы к поверхности капли единичной длины; $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$ — поле скоростей течения жидкости в капле; $p(r, \vartheta, t)$ — поле давлений; $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$ — потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности соответственно.

Аналитическое решение выписанной нелинейной системы уравнений будем искать асимптотическим методом прямого разложения. Для этого в соответствии с общей идеологией метода разложения по малому параметру все искомые величины задачи представим в виде рядов по ε

$$\xi(\vartheta, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\vartheta, t) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \varepsilon U_r^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon^2 U_r^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_r + \varepsilon U_\vartheta^{(1)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + \varepsilon^2 U_\vartheta^{(2)}(r, \vartheta, t)\mathbf{e}_\vartheta + O(\varepsilon^3);$$

$$p(r, \vartheta, t) = p^{(0)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon p^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \varepsilon\phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + \varepsilon^2\phi^{(2)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\phi_S(t) = \phi_S^{(0)}(t) + \varepsilon\phi_S^{(1)}(t) + \varepsilon^2\phi_S^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3). \quad (5)$$

Вид функций $\xi^{(j)}(\vartheta, t)$, $U_r^{(j)}(r, \vartheta, t)$, $U_\vartheta^{(j)}(r, \vartheta, t)$, $p^{(j)}(r, \vartheta, t)$, $\phi^{(j)}(r, \vartheta, t)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ в соответствии с вышесказанным ищется в виде рядов по полиномам Лежандра либо по первым производным от них

$$\xi^{(j)}(\vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} \xi_n^{(j)}(t) \cdot P_n(\mu);$$

$$U_r^{(j)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} U_{rn}^{(j)}(r, t) \cdot P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(j)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} U_{\vartheta n}^{(j)}(r, t) \cdot \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p^{(j)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} p_n^{(j)}(r, t) \cdot P_n(\mu);$$

$$\phi^{(j)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} \phi_n^{(j)}(r, t) \cdot P_n(\mu);$$

$$\phi_S^{(j)}(r, \vartheta, t) = \sum_{n\in\Omega} \phi_{nS}^{(j)}(r, t) \cdot P_n(\mu). \quad (6)$$

Подставим (5) в систему (4). Приравнивая коэффициенты при различных степенях малого параметра, можно получить последовательность систем уравнений для отыскания решений различных порядков малости. При этом в нулевом и первом порядках получатся системы однородных уравнений, а в более высоких порядках малости, чем первый, будем иметь системы неоднородных уравнений, где функции неоднородности определятся нелинейными компонентами уравнений через решения систем низших порядков малости. В частности, во втором порядке малости получим

$$\partial_t U_r^{(2)} + \frac{1}{\rho}\partial_r p^{(2)} - \nu\left(\frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}U_r^{(2)} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\partial_\vartheta U_r^{(2)} - \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_\vartheta^{(2)} - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r}\partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)} - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}U_\vartheta^{(2)}\right)$$

$$= -U_r^{(1)}\partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_r^{(1)} + \frac{1}{r}(U_\vartheta^{(1)})^2;$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(2)} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\partial_\vartheta p^{(2)} - \nu\left(\partial_{rr}U_\vartheta^{(2)} + \frac{2}{r}\partial_r U_\vartheta^{(2)} - \frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_r^{(2)}\right)$$

$$= -U_r^{(1)}\partial_r U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{r}U_r^{(1)}U_\vartheta^{(1)};$$

$$\partial_r U_r^{(2)} + \frac{2}{r}U_r^{(2)} + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r}U_\vartheta^{(2)} = 0, \quad \Delta\phi^{(2)} = 0;$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} = 0; \quad \xi^{(2)} = -\frac{1}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{h_m^2}{2m+1}P_0(\mu) - \frac{9}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)}P_1(\mu);$$

$$r \to 0: \quad \mathbf{U}^{(2)} < \infty; \qquad r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(2)} \to 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} - \phi_S^{(2)}(t) = -\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(0)} - \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)};$$

$$\int_{-1}^{1}\Big[r_0^2\partial_r\phi^{(2)} + r_0\xi^{(1)}(r_0\partial_{rr}\phi^{(1)} + 2\partial_r\phi^{(1)}) + r_0\xi^{(2)}(r_0\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}) + (\xi^{(1)})^2\left(\frac{1}{2}r_0^2\partial_{rrr}\phi^{(0)} + 2r_0\partial_{rr}\phi^{(0)}) + \partial_r\phi^{(0)}\right) - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big]d\mu = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(r_0\xi^{(2)}+(\xi^{(1)})^2\right)d\mu=0;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2r_0\xi^{(2)}+3(\xi^{(1)})^2\right)P_1(\mu)d\mu=0;$$

$$-\partial_t\xi^{(2)}(\vartheta,t)+U_r^{(2)}=-\,\partial_tU_r^{(1)}\xi^{(1)}(\vartheta,t)$$
$$+\frac{1}{r_0}U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t).$$

$$\frac{1}{r_0}\partial_\vartheta U_r^{(2)}+\partial_rU_\vartheta^{(2)}-\frac{1}{r_0}U_\vartheta^{(2)}=-\Bigg(\frac{1}{r_0}\partial_{r\vartheta}U_r^{(1)}-\frac{1}{r_0^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)}$$
$$+\partial_{rr}U_\vartheta^{(1)}-\frac{1}{r_0}\partial_rU_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r_0^2}U_\vartheta^{(1)}\Bigg)\xi^{(1)}(\vartheta,t)$$
$$+2\left(\frac{1}{r_0^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r_0^2}U_r^{(1)}-\frac{1}{r_0}\partial_rU_r^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t);$$

$$-p^{(2)}-\frac{\sigma}{r_0^2}(2+\Delta_\Omega)\xi^{(2)}+\frac{2\sigma}{r_0^3}\xi^{(1)}(1+\Delta_\Omega)\xi^{(1)}$$
$$-\frac{1}{8\pi}\Bigg[2\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}+(\xi^{(1)})^2\left((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2\right.$$
$$\left.+\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\right)+\frac{1}{r_0^2}(\partial_\vartheta\phi^{(1)})^2+(\partial_r\phi^{(1)})^2$$
$$+2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}+2\xi^{(1)}(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)}+\partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)})\Bigg]$$
$$+2\rho\nu\partial_rU_r^{(2)}-(\partial_rp^{(1)}-2\rho\nu\partial_{rr}U_r^{(1)})\xi^{(1)}(\vartheta,t)$$
$$-2\rho\nu\left(\frac{1}{r_0^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)}+\frac{1}{r_0}\partial_rU_\vartheta^{(1)}-\frac{1}{r_0^2}U_\vartheta^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}(\vartheta,t)=0. \tag{7}$$

Подставляя в (7) разложения (5), (6), получим в функциях неоднородностей комбинации полиномов Лежандра и их производных вида $P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)$; $\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$; $P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$; $\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)$. Поскольку левые части уравнений будут при этом представлены рядами по полиномам Лежандра или по их первым производным, то в виде таких же рядов необходимо представить указанные произведения, а именно:

$$P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{kmn}P_n(\cos\vartheta);$$
$$\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{kmn}P_n(\cos\vartheta);$$
$$P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_{kmn}\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta);$$
$$\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda_{kmn}\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta). \tag{8}$$

По какому набору собственных функций, по полиномам Лежандра или по их производным, необходимо проводить разложение того либо иного из указанных произведений, определяется видом разложения, стоящего в левой части конкретного неоднородного уравнения.

Для удобства дальнейшего использования соотношений (8) необходимо найти явный вид коэффициентов $K_{kmn}, \alpha_{kmn}, \Gamma_{kmn}, \Lambda_{kmn}$.

4a. Как известно, для полиномов Лежандра, определяющихся формулой Родрига

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{(-1)^n}{2^nn!}\frac{d^n}{d(\cos\vartheta)^n}\sin^{2n}\vartheta,\quad n\geq 0, \tag{9}$$

справедливо условие ортогональности

$$\int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)P_m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{2\delta_{km}}{2m+1};\quad k,m\geq 0, \tag{10}$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Разложим произведение $P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)$ в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$, для этого соотношение

$$P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}K_{kmn}\cdot P_n(\cos\vartheta)$$

умножим на $Pg(\cos\vartheta)\sin\vartheta$ $(g\geq 0)$ и проинтегрируем по ϑ в пределах от 0 до π. Используя (10), найдем

$$K_{kmn}=\frac{2n+1^\pi}{2}\int_0 P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)\cdot P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{11}$$

Как видно из (9)–(11), коэффициенты K_{kmn} обладают следующими свойствами: они симметричны по двум первым индексам; при $n=0$ имеет место соотношение $K_{km0}=\delta_{km}/(2m+1)$; при нулевом первом или втором индексе $K_{0mn}=\delta_{mn}$, $K_{k0n}=\delta_{kn}$; при любых значениях индексов $k,m,n\geq 0$

$$K_{kmn}=(C_{k0m0}^{n0})^2, \tag{12}$$

где C_{k0m0}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана [17].

При $n=1$ из (11) с учетом (9) найдем

$$K_{km1}=\frac{3}{2}\int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)\cos\vartheta\cdot P_m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Используя в последнем выражении рекуррентную формулу

$$\cos\vartheta\cdot P_m(\cos\vartheta)=\frac{m+1}{2m+1}P_{m+1}(\cos\vartheta)+\frac{mn}{2m+1}P_{m-1}(\cos\vartheta)$$

и условие ортогональности (10), несложно найти выражение для коэффициентов K_{km1}

$$K_{km1}=\frac{3m\delta_{k,m-1}}{(2m-1)(2m+1)}+\frac{3(m+1)\delta_{k,m+1}}{(2m+1)(2m+3)}.$$

Отметим, что аналогично можно получить явное выражение для коэффициентов K_{1mn}, K_{k1n}, которые будут иметь вид

$$K_{1mn} = \frac{m}{2m+1}\delta_{m-1,n} + \frac{m+1}{2m+1}\delta_{m+1,n},$$

$$K_{k1n} = \frac{k}{2k+1}\delta_{k-1,n} + \frac{k+1}{2k+1}\delta_{k+1,n}.$$

4б. Для того чтобы разложить произведение $\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$ по полиномам Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$, запишем соотношение

$$\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{kmn}\cdot P_n(\cos\vartheta). \quad (13)$$

Умножая (13) на $P_g(\cos\vartheta)\sin\vartheta$ $(s \geq 0)$, интегрируя по ϑ в пределах от 0 до π и учитывая (10), найдем

$$\alpha_{kmn} = \frac{2n+1}{2}$$

$$\times\int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\cdot P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (14)$$

Для коэффициента α_{km0}, используя (9) и формулу интегрирования по частям, найдем

$$\alpha_{km0} = \frac{1}{2}\int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)\cdot\big(\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)$$

$$+\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\big)\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (15)$$

Как известно, полином Лежандра удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$$

$$+ m(m+1)\cdot P_m(\cos\vartheta) = 0. \quad (16)$$

Выражая из (16) комбинацию $\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$, подставляя ее в (15) и используя условие ортогональности (10), получим коэффициенты α_{km0} в виде

$$\alpha_{km0} = \frac{m(m+1)}{2m+1}\delta_{km}. \quad (17)$$

Отметим также, что коэффициенты α_{kmn}, как это видно из (14), симметричны по двум первым индексам, равны нулю при условии равенства нулю первого или второго индексов $\alpha_{0mn} = \alpha_{k0n} = 0$ и выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана [17]

$$\alpha_{kmn} = -C^{n0}_{k0m0}\cdot C^{n0}_{k(-1)m1}\sqrt{k(k+1)m(m+1)}. \quad (18)$$

При $n = 1$ из (14) учетом (9) найдем

$$\alpha_{km1} = \frac{3}{2}\int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\cos\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Используя в последнем выражении рекуррентное соотношение

$$\cos\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta) = \frac{m}{2m+1}\partial_\vartheta P_{m+1}(\cos\vartheta)$$

$$+\frac{m+1}{2m+1}\partial_\vartheta P_{m-1}(\cos\vartheta),$$

а также (10), (13) и (17), нетрудно найти выражение для α_{km1} в виде

$$\alpha_{km1} = \frac{3m(m-1)(m+1)}{(2m-1)(2m+1)}\delta_{k,m-1} + \frac{3m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)}\delta_{k,m+1}.$$

4в. Разложим произведение $P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)$ по производным от полинома Лежандра $\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)$

$$P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Gamma_{kmn}\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta). \quad (19)$$

Если (19) умножить на $\partial_\vartheta P_g(\cos\vartheta)\sin\vartheta$ (где $g \geq 1$), проинтегрировать по ϑ пределах от 0 до π и учесть соотношения (10), (13) и (17), то несложно найти

$$\Gamma_{kmn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

$$\times\int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (20)$$

Подставляя в (20) разложение (13) и используя (10), получим

$$\Gamma_{kmn} = \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{\alpha_{nmk}}{2k+1} \quad (21)$$

или с учетом (18)

$$\Gamma_{kmn} = \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{\alpha_{nmk}}{2k+1}$$

$$\equiv -\frac{(2n+1)}{(2k+1)}\sqrt{\frac{m(m+1)}{n(n+1)}}C^{k0}_{n0m0}\cdot C^{k0}_{n(-1)m1}. \quad (21a)$$

На основе (20) можно записать

$$\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

$$\times\int_0^\pi \partial_\vartheta\big(P_k(\cos\vartheta)P_m(\cos\vartheta)\big)\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (22)$$

Применяя к интегралу (22) формулу интегрирования по частям, найдем

$$\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)$$

$$\times\big(\partial_{\vartheta\vartheta}P_n(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\big)\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (23)$$

Выражая из (16) комбинацию $\partial_{\vartheta\vartheta}P_n(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\,\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)$ и подставляя ее в (23), найдем

$$\Gamma_{kmn} + \Gamma_{mkn} = \frac{2n+1}{2} \times \int_0^\pi P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = K_{kmn}. \tag{24}$$

4г. Разложим произведение $\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)$ по производным от полинома Лежандра $\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)$

$$\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda_{kmn}\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta). \tag{25}$$

Тождество (25) умножим на $\partial_\vartheta P_g(\cos\vartheta)\cdot\sin\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ в пределах от 0 до π, используя при этом (10), (13), (17),

$$\Lambda_{mkn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \times \int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{26}$$

Выразим из (16) производную $\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)$ и учтем рекуррентное соотношение

$$-\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_m(\mu) = \partial_\mu P_{m-1}(\mu) + mP_m(\mu); \quad \mu\equiv\cos\vartheta.$$

В итоге получим

$$\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\mu) = \partial_\mu P_{m-1}(\mu) - m^2P_m(\mu). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26) и учитывая разложение

$$\partial_\mu P_{m-1}(\mu) = \sum_{j=1}^{[m/2]}(2m-4j+1)P_{m-2j}(\mu),$$

(квадратные скобки в верхнем пределе суммы означают выделение целой части числа), найдем

$$\Lambda_{kmn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)}\sum_{j=1}^{[m/2]}(2m-4j+1) \times \int_0^\pi \partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)P_{m-2j}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta - \frac{(2n+1)m^2}{2n(n+1)} \times \int_0^\pi \partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot P_m(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

С учетом (14) последнее соотношение перепишем в виде

$$\Lambda_{kmn} \equiv \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(-\frac{m^2}{2m+1}\alpha_{nkm} + \sum_{j=1}^{[m/2]}\alpha_{n,k,m-2j}\right) \tag{28}$$

или с учетом (18)

$$\Lambda_{kmn} \equiv (2n+1)\sqrt{\frac{k(k+1)}{n(n+1)}} \times \left(\frac{m^2}{2m+1}C^{m0}_{n0k0}\cdot C^{m0}_{n(-1)k1} - \sum_{j=1}^{[m/2]}C^{(m-2j)0}_{n0k0}\cdot C^{(m-2j)0}_{n(-1)k1}\right). \tag{28a}$$

Используя (26), запишем сумму

$$\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \times \int_0^\pi \partial_\vartheta\big(\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\big)\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Интегрируя это соотношение по частям, найдем

$$\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta) \times \big(\partial_{\vartheta\vartheta}P_n(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)\big)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Выражая из (16) комбинацию $\partial_{\vartheta\vartheta}P_n(\cos\vartheta) + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)$ и подставляя ее в последнее выражение, получим

$$\Lambda_{kmn} + \Lambda_{mkn} = \frac{2n+1}{2} \times \int_0^\pi \partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\cdot P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \alpha_{kmn}. \tag{29}$$

Таким образом, в (8) коэффициенты разложений по производным от полиномов Лежандра Γ_{kmn}, согласно (21) и (24), выражаются через коэффициенты разложений по самим полиномам Лежандра α_{kmn} и K_{kmn}, так же как коэффициенты Λ_{kmn} — согласно (28) и (29). Поскольку же K_{kmn} и α_{kmn}, согласно (12) и (18), выражаются через произведения коэффициентов Клебша–Гордана, то и коэффициенты Γ_{kmn} и Λ_{kmn} также выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана, согласно (21a) и (28a). Найденная связь между коэффициентами позволяет при решении задачи о нелинейных осцилляциях капли вязкой жидкости существенно снизить громоздкость выкладок за счет свертывания коэффициентов.

5. Соотношения (24) и (29) можно получить и из других соображений, отталкиваясь непосредственно от разложений (8).

а) Продифференцируем первое из разложений (8) по полярному углу

$$P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)+P_m(\cos\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}K_{kmn}\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta).$$

К выражениям, стоящим в левой части, применим третье из разложений (8) и, собирая все слагаемые под одним знаком суммы, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma_{kmn}+\Gamma_{mkn}-K_{kmn})\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)=0. \qquad (30)$$

Поскольку равенство нулю выписанного разложения по бесконечному ортоганальному набору первых производных от полиномов Лежандра может иметь место только в ситуации, когда все коэффициенты (30) нулевые, то отсюда сразу следует соотношение (24).

б) Продифференцируем по полярному углу второе из разложений (8)

$$\partial_\vartheta P_k(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_m(\cos\vartheta)+\partial_\vartheta P_m(\cos\vartheta)\cdot\partial_{\vartheta\vartheta}P_k(\cos\vartheta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{kmn}\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta).$$

К выражениям, стоящим в левой части, применим четвертое из разложений (8) и, собирая все слагаемые под одним знаком суммы, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_{kmn}+\Lambda_{mkn}-\alpha_{kmn})\cdot\partial_\vartheta P_n(\cos\vartheta)=0.$$

Отсюда в соответствии с вышесказанным следует соотношение (29).

6. Найденная выше связь между коэффициентами разложений (8) и коэффициентами Клебша–Гордана позволяет установить новые, ранее неизвестные, соотношения между квадратичными произведениями коэффициентов Клебша–Гордана, которые не выводятся преобразованиями известных (см., например, [17]) соотношений. Так, подставляя (18) и (28) в (29), можно найти соотношение

$$\sum_{j=1}^{[m/2]}\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}C^{(m-2j)0}_{n0,k0}\cdot C^{(m-2j)0}_{n(-1),k1}$$

$$+\sum_{j=1}^{[k/2]}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}C^{(k-2j)0}_{n0,m0}\cdot C^{(k-2j)0}_{n(-1),m1}=\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\times\frac{[n(n+1)-(k-m)^2][n-(k+m)](1-n+m+k)}{[n(n+1)-k(k+1)-m(m+1)]}$$

$$\times C^{n0}_{k0,m0}\cdot C^{n0}_{k(-1),m1}.$$

Из (24) с учетом (12) и (21) также получается некоторая связь между квадратичными произведениями коэффициентов Клебша–Гордана, которая, однако, может быть также выведена из соотношений для коэффициентов Клебша–Гордана, приведенных в [17], потому здесь не приводится.

Заключение

Проведенные рассуждения позволяют привести задачу (7) об отыскании квадратичных по амплитуде компонент решения в расчете нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости к вполне решаемому виду. Во всяком случае функции неоднородности, стоящие в правых частях задачи (7), с учетом сказанного выше раскладываются в одинарные ряды по полиномам Лежандра или по их первым производным того же типа, что и искомые величины задачи, стоящие в левых частях уравнений (7). Найденные соотношения (21), (24), (28), (29) между коэффициентами $\Gamma_{kmn}, \Lambda_{kmn}, K_{kmn}, \alpha_{kmn}$ разложений (8) позволяют существенно сократить громоздкость выкладок и аналитической записи окончательного результата.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант № МК-2946-2004-1) и РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Григорьев А.И.* // ЭОМ. 1990. № 6. С. 23–32.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–27.
[4] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 22–28.
[5] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
[6] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
[7] *Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
[8] *Chandrasekhar S.* // Proc. London Math. Soc. 1959. Vol. 3. N 9. P. 141–149.
[9] *Miller C.A., Scriven L.E.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 32. Pt 3. P. 417–435.
[10] *Saville D.A.* // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17. N 1. P. 54–60.
[11] *Hasse R.W.* // Annals Phys. 1975. Vol. 93. P. 68–87.
[12] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12–19.
[13] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Препринт ИМ РАН. Ярославль, 1994. № 27. 127 с.
[14] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Препринт ИМ РАН. Ярославль, 2001. № 31. 87 с.
[15] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 22–31.
[16] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. 660 с.
[17] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.