01;05

Предельный переход при скин-эффекте в металлах к бесконечной проводимости

© А.И. Спицын

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
433053 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 26 октября 2004 г.)

Рассмотрен предельный переход в металлах при условиях скин-эффекта к бесконечной проводимости. Рассмотрение проведено для случая классического скин-эффекта с учетом и без учета влияния релаксации электронов проводимости, а также с учетом нелокальной связи между электрическим полем и плотностью тока в модели свободных электронов. Рассмотрен как предельно нелокальный, так и реальный предел при неограниченном возрастании длины свободного пробега.

В настоящей статье рассматриваются предельные переходы в металле при различных условиях скин-эффекта, когда его проводимость, увеличиваясь, стремится к бесконечной величине. Металл будем предполагать изотропным, линейным и однородным. Рассмотрим вначале простой случай классического скин-эффекта, который реализуется при комнатных температурах в нормальных (несверхпроводящих) металлах. Положим, что на плоскую поверхность S металла, занимающего полупространство, падает электромагнитное излучение с частотой ω. В дальнейшем будем полагать, что характерное расстояние изменения электромагнитного поля вдоль поверхности всегда намного больше глубины проникновения электромагнитного поля в металл, и, следовательно, поле в данном месте можно считать однородным и зависящим от одной координаты по нормали к поверхности металла.

Введем декартову систему координат с центром на границе металла и осью z, направленной по нормали $\mathbf{n}$ в глубь металла, тогда оси y и x будут расположены в плоскости металла. Не нарушая общности, будем поле считать линейно поляризованным и ось x направим вдоль вектора электрического поля $\mathbf{E}$, а y — по вектору магнитного поля $\mathbf{H}$. В рассматриваемом случае комнатных температур будет справедлива локальная связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ в любой точке внутри металла и электрическим полем $\mathbf{E}$, получившая название закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где σ — проводимость металла. На основе уравнений Максвелла и закона Ома решение при скин-эффекте представляется в виде

$$E = E_x = ZH(0)e^{-z/\delta_{\text{com}}}, \quad H = H_y = H(0)e^{-z/\delta_{\text{com}}},$$

$$Z = i\omega\mu_0\delta_{\text{com}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}}, \quad \delta_{\text{com}} = \sqrt{\frac{1}{i\omega\mu_0\sigma}}, \qquad (1)$$

где величина $Z = E(0)/H(0) = R + iX$ представляет поверхностный импеданс металла, δ_{com} — комплексную глубину проникновения при классическом скин-эффекте [1], R и X — поверхностные сопротивления и реактанс.

Если предполагать, что всегда осуществляется классический скин-эффект и устремить $\sigma \to \infty$, то в пределе из соотношений (1) следует идеальное граничное условие $E_{\text{tg}}\big|_s = 0$, при этом поверхностный импеданс Z обращается в нуль. В рассматриваемом пределе проникновения электромагнитного поля внутрь металла нет, но в процессе предельного перехода при условии $H(0) = \text{const}$ поведение тангенциальных компонент E_{tg} и H_{tg} различное. На рис. 1, a, b приведены зависимости модулей E и $H \sim \exp(-z/\delta_{\text{cl}})$, где $\delta_{\text{cl}} = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ — классическая глубина проникновения, от координаты z для трех значений проводимостей $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$. С возрастанием величины проводимости магнитное поле, оставаясь на границе неизменным по величине (если, к примеру, предположить неизменную амплитуду магнитного поля падающей плоской волны на металл, то магнитное поле на поверхности будет незначительно изменяться и стремиться в пределе к конечному значению), выталкивается из толщи проводника и сосредоточивается в более узком поверхностном слое. Электрическое поле в отличие от магнитного с увеличением σ уменьшается и в пределе $\sigma \to \infty$ обращается в нуль на поверхности металла.

Рассматриваемый предельный переход не учитывает влияние релаксации электронов проводимости. По модели свободных электронов [1] проводимость на постоянном токе $\sigma = ne^2\tau/m$, $\tau = l/V_F$, где n — объемная плотность электронов, e — заряд электрона, m — масса, τ — время релаксации, l — длина свободного пробега, V_F — скорость электронов на поверхности Ферми. Для гармонически изменяющегося во времени электромагнитного поля учет влияния релаксации приводит к тем же соотношениям (1) с заменой σ на величину $\sigma/(1 + i\omega\tau)$, причем стремление проводимости на постоянном токе $\sigma \to \infty$ для определенного металла сводится к стремлению длины свободного пробега l к бесконечности. С учетом этого из (1) следует

$$\delta^2_{\text{com}} = \frac{1 + i\omega\tau}{i\omega\mu_0\sigma} = \frac{m}{\mu_0 ne^2} - \frac{i}{\omega\mu_0\sigma}, \qquad (2)$$

значит, комплексная глубина проникновения при $l \to \infty$ стремится к действительной величине $\delta_0 = \sqrt{m/\mu_0 nl^2}$ —

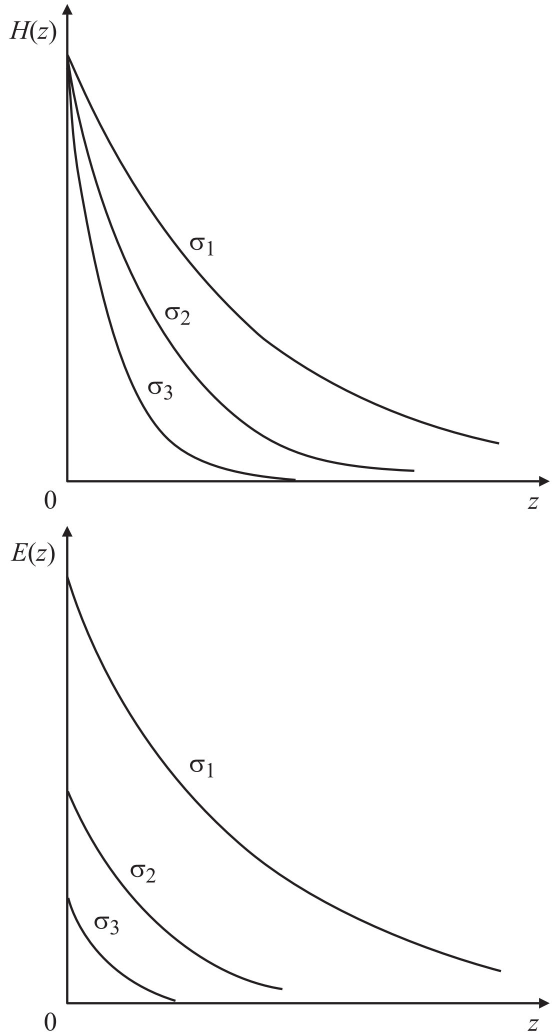

Рис. 1.

плазменной глубине проникновения. В этом случае электромагнитное поле проникает в глубь металла на конечную величину и предельный переход приводит к сверхпроводимости с локальной связью $\mathbf{j} = \mathbf{E}/i\omega\mu_0\delta_0^2$. Поверхностный импеданс на границе металла в этом бесдиссипативном пределе равен чисто мнимой величине $Z = i\omega\mu_0\delta_0$.

В предыдущем рассмотрении предполагалась локальная связь между плотностью тока и электрическим полем, т. е. плотность тока в какой-либо точке металла определялась значением электрического поля в этой же точке. Так как становление плотности тока в точке внутри металла определяется электрическим полем в области размера порядка длины свободного пробега, то выполнение закона Ома предполагает малость длины свободного пробега по сравнению со скиновой глубиной проникновения, на которой поле значительно изменяется. При возрастании l глубина проникновения в металл уменьшается и, следовательно, величина l может сравняться и намного превзойти δ_{sk} (под скиновой глубиной проникновения будем понимать величину $\delta_{\text{sk}} = \operatorname{Re}\delta_{\text{com}}$ [1]). В этом случае локальное соотношение $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ не будет справедливо и при рассмотрении предельного перехода его необходимо заменить на нелокальное, которое реализуется для металлов при низких температурах [2]. Зависимость электрического поля от координаты z в модели свободных электронов тогда можно представить в виде [3,1]

$$E(z) = \frac{2i\omega\mu_0 H(0)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kz\, dk}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}(k)}, \qquad (3)$$

где

$$\tilde{\Omega}(k) = \frac{2\pi c_E \xi}{(k\xi)^3}\left[\left(1 + (k\xi)^2\right)\operatorname{arctg}(k\xi) - k\xi\right],$$

$$\xi = \frac{l}{1 + i\omega\tau}, \quad c_E \frac{3}{4\pi i\omega\mu_0\delta_{\text{com.l}}^2\xi}. \qquad (4)$$

Здесь $\delta_{\text{com.l}} = \left((1 + i\omega\tau)/i\omega\mu_0\sigma\right)^{1/2}$ — комплексная глубина проникновения в предположении выполнения локальной связи в металле $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}/(1 + i\omega\tau)$. В дальнейшем рассмотрение будем проводить для наиболее интересной СВЧ области частот (т. е. максимальную частоту ограничим несколькими сотнями GHz). Тогда при больших l величина $|\xi|$ будет приближаться к V_F/ω, намного большей скиновой губины проникновения δ_{sk}. В этом случае результаты в пределе $|\xi| \to \infty$ будут близки к результатам реального физического предела для $l \to \infty$ (отметим, что при формальном пределе $\xi = l/(1 + i\omega\tau) \to \infty$ необходимо величины l и $a = \omega\tau$ рассматривать как независимые, причем величину l необходимо считать бесконечно большой, более высокого порядка, чем параметр $a = \omega\tau$). В работе [2] исследован случай такого предельного перехода $|\xi| \to \infty$ при значении $a = 0$, $\xi = l$. Этот предел получил название аномального предела.

Найдем соотношение для поверхностного импеданса Z_∞ в аномальном пределе. Из (3) при $z = 0$ находим соотношение для поверхностного импеданса $Z = E(0)/H(0)$

$$Z = \frac{2i\omega\mu_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 + i\omega\mu_0\tilde{\Omega}(k)}. \qquad (5)$$

Переходя в (5) в подынтегральном выражении к пределу $\xi \to \infty$ $\operatorname{Re}\xi > 0$, с учетом того, что $\delta_{\text{com.l}}^2\xi$ не зависит от длины свободного пробега l и является постоянной, а из (4) $i\omega\mu_0\tilde{\Omega}(k)$ стремится к $3\pi/4\delta_{\text{com.l}}^2\xi k$, соотношение (5) приведем к виду

$$Z_\infty = \frac{2i\omega\mu_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{k\, dk}{k^3 + i\beta}, \quad \beta = \frac{3\pi}{2\delta_{\text{cl}}^2 l}. \qquad (6)$$

Интеграл в (6) при замене переменной на k^3 сводится к стандартному [4, № 5, с. 298], следовательно, поверхностный импеданс в аномальном пределе

$$Z_\infty = \frac{2\omega\mu_0}{3\sqrt{3}}\beta^{-1/3}\left(1 + i\sqrt{3}\right). \qquad (7)$$

Аномальный предел $\xi \to \infty$ не является физически обоснованным, так как при $l \to \infty$ ($\sigma \to \infty$) величина a также стремится к бесконечности и ξ в рассматриваемой области частот стремится к большой, но конечной величине $\xi_\infty = -iV_F/\omega$. Для нахождения поверхностного импеданса Z в основном приближении в этом пределе можно воспользоваться следующей методикой. В разложении $\tilde{\Omega}(k)$ при больших ξ учтем следующий член разложения $i\omega\mu_0\tilde{\Omega}(k) = i\beta(1/k - 4/k^2\pi\xi)$, что после взятия интеграла в (5) приводит к следующим основным членам (заметим, что неточность в представлении $\tilde{\Omega}(k)$ при $|\xi k| < 1$ приводит к членам высшего порядка малости)

$$Z = Z_\infty + Z_1 = Z_\infty \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\,\frac{\delta_\infty}{\xi_\infty}\right), \qquad (8)$$

где $\delta_\infty = Z_\infty/i\omega\mu_0$ — комплексная глубина проникновения в аномальном пределе.

Таким образом, в пределе бесконечно большой длины свободного пробега l в рассматриваемой области частот к значению поверхностного импеданса в аномальном пределе появляется малая добавка порядка $|\delta_\infty/\xi_\infty| \ll 1$.

Отметим, что именно случай больших значений l рассмотрен в работе [5] для СВЧ области в связи с рассмотрением поверхностного реактанса $X = \operatorname{Im} Z$. Величина $X_1 = \operatorname{Im} Z_1$ определяется запасением энергии как в магнитном поле, так и в кинетическом движении носителей тока и определяет добавку к полевой индуктивности в аномальном пределе $L_\infty = X_\infty/\omega$ и небольшую кинетическую индуктивность.

Предыдущее рассмотрение относилось к СВЧ области частот, где результаты близки к результатам в аномальном пределе. Если увеличивать частоту, то величина $\omega\tau$, увеличиваясь, может сравняться с единицей и значительно превзойти ее. В этом случае, хотя длина свободного пробега может делаться сколь угодно большой, величина $|\xi|$ будет возрастать незначительно. В этих случаях будет реализовываться конечное значение ξ_∞ и результаты будут не соответствовать аномальному пределу. Для больших $\omega\tau$ при комнатных температурах результаты в пределе $l \to \infty$ будут близки к результатам в локальном случае $|\xi| \ll \delta_{\text{sk}}$, рассмотренному ранее (2).

Рассмотрим вопрос о потерях в аномальном пределе. Для этого воспользуемся методикой вывода плотности тока, используемой в [1], и введем локальную сферическую систему координат в произвольной точке z внутри металла. Проводя выкладки, аналогичные выкладкам в [1], для части плотности тока j_1, обусловленной электронами, движущимися через рассматриваемую точку в телесном угле между направлениями Θ_0 и $\pi - \Theta_0$ ($\Theta_0 < \pi/2$), найдем соотношение $j_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(z - z')E(z')dz'$ с интегральным ядром

$$\Omega_1(z - z') = \pi c_E \int\limits_{1/\cos\Theta_0}^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right) \exp(-|z - z'|u/\xi)\,du, \qquad (9)$$

которое совпадает с объемным ядром при $\Theta_0 = 0$.

Далее, находя соотношение для рассматриваемой части плотности тока j_1 с использованием (3) и переходя в нем к пределу при $\xi \to \infty$, аналогично тому, как это было продемонстрировано при выводе Z_∞, для любого угла Θ_0 получим в пределе то же соотношение, что и для полной плотности тока ($\Theta_0 = 0$). Таким образом, в аномальном пределе для любой точки внутри металла в плотность тока, а следовательно и в потери, вносят электроны, двигающиеся параллельно плоской границе металла. Это находится в соответствии с концепцией неэффективности Пиппарда [1].

Рассмотрим распределение локальных потерь в аномальном пределе. Из соотношения (3) и соотношения для плотности тока, получающегося из (3) внесением под знак интеграла множителя $\tilde{\Omega}(k)$, переходом к пределу $\xi \to \infty$ аналогично процедуре, проделанной для поверхностного импеданса Z_∞, получим соотношение для распределения электрического поля и плотности тока в аномальном пределе

$$E(z) = \frac{2i\omega\mu_0 H(0)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{k\cos kz}{k^3 + i\beta}\,dk,$$

$$j(z) = \frac{2i\beta H(0)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos kz}{k^3 + i\beta}\,dk. \qquad (10)$$

Соответствующие соотношения для E и j через специальные функции можно нйти по методике, примененной в [6] для аномального предела в сверхпроводниках. Если связь между j и E в случае гармонически изменяющихся полей в точке z представить в виде $j(z) = \sigma(z)E(z)$, где за $\sigma(z) = \sigma_R(z) + i\sigma_x(z)$ принята локальная комплексная проводимость, то объемная плотность активной мощности, потребляемой током (отдаваемой электронам или, наоборот, передаваемой электромагнитному полю), будет

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}(j^*E) = \frac{1}{2}\sigma_R(z)|E|^2.$$

На рис. 2 приведена зависимость безразмерной величины $\tilde{\sigma}_R = \omega\mu_0\beta^{-2/3}\operatorname{Re}\sigma(\tilde{z})$ от безразмерной координаты $\tilde{z} = z\beta^{1/3}$, рассчитанная по соотношениями (10). Из рисунка следует, что зависимость $\sigma_R(z)$ немонотонная. При движении электронов они из-за взаимодействия с электрическим полем забирают энергию от одних областей металла и переносят ее в другие области [1]. В процессе движения из-за столкновений с ионами металла импульсы электронов уменьшаются, что приводит к диссипации энергии (это остается верным и в пределе $\xi \to \infty$). С учетом этих факторов происходит формирование плотности тока и электромагнитного поля внутри металла.

Из зависимости $\sigma_R(z)$ следует существование областей внутри металла с $\sigma_R < 0$. Это связано с тем, что в самосогласованном поле в определенных участках металла реализуется ситуация, при которой в среднем

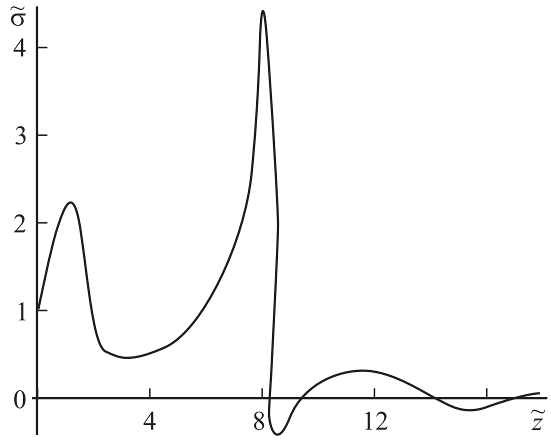

Рис. 2.

за период энергия передается полю (происходит „генерация“ электромагнитного поля в точках с $\sigma_R < 0$). Если выделить такую область с $\sigma_R < 0$, то из этой области будет переходить средний поток электромагнитной энергии в другие части металла посредством излучения через границу области. Суммарная же мощность, передаваемая току $\int_0^\infty \sigma_R |E|^2 dz/2$, будет равна полной мощности потерь $R_\infty |H(0)|^2/2$ $(R_\infty = \operatorname{Re} Z_\infty)$ внутри металла, идущей на тепло.

В заключение обратимся к вопросу о распределении поля в случае больших, но конечных значений $|\xi| \gg \delta_{\text{sk}}$. Для аномального предела $\xi \to \infty$, как следует из дифференцирования по частям соотношения для $E(z)$ (10), справедлива основная асимптотика при $z \gg \delta_{\text{sk}}$

$$E(z) = -\frac{81\sqrt{3}}{32\pi} \frac{E(0)}{(z/\delta_\infty)^2}. \qquad (11)$$

В случае $|\xi| \gg \delta_{\text{sk}}$ структура поля до знчений $z \le |\xi|$ будет мало отличаться от поля в аномальном пределе и вдали от поверхности будет соответствовать соотношению (11). При $z \gg |\xi|$ электромагнитное поле уже не будет описываться соотношениями (10). Между этими областями будет существовать промежуточная переходная область. В работе [2] найдена основная асимптотика при $z \gg l$ для случая $a = \omega\tau = 0$. Приведем соотношение для основной асимптотики в общем случае при $\omega\tau \ne 0$ и конечном ξ.

В соотношении для $E(z)$ (3) возьмем пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$, а $\cos kz$ заменим на $\exp(ikz)/2$. Беря отрезок на действительной оси в пределах от $-R_0$ до $+R_0$ и замыкая его окружностью радиуса R_0 в врехней полуплоскости с разрезом в логарифмической точке ветвления по лучу от i/ξ до $\infty i/\xi$, на основе теоремы вычетов найдем соотношение для $E(z)$ через вычеты в полюсах и интегралы по берегам разреза. При аномальных условиях при больших z вклад от интегралов по разрезу будет основным. Сделав замену переменной на $\xi k/i$ и проделав преобразования, аналогичные проделанным в [2], найдем соотношение для $E(z)$ при $z \gg |\xi|$ в виде

$$E(z) = -AE(0)\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\delta_{\text{com.l}}^2}{\xi^2}\right)\frac{\delta_\infty}{\delta_{\text{com}}}\frac{e^{-z/\xi}}{(z/\delta_\infty)^2},$$

$$A = \frac{81\sqrt{3}\pi}{64}. \qquad (12)$$

В пределе больших $|\xi| \gg |\delta_{\text{com.l}}|$ комплексная глубина проникновения $\delta_{\text{com}} \approx \delta_\infty$. В этом случае соотношение сводится к $E(z) = -AE(0)\exp(-z/\xi)/(z/\delta_\infty)^2$. В пределе $l \to \infty$ $\xi \to \xi_\infty$.

Список литературы

[1] *Менде Ф.Ф., Спицын А.И.* Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев: Наукова думка, 1985. 240 с.

[2] *Reuter G.E.H., Sondheimer E.H.* // Proc. Roy. Soc. A. 1948. Vol. 195. N 1042. P. 336–364.

[3] *Спицын А.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 128–130.

[4] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 729 с.

[5] *Спицын А.И.* // РиЭ. 1993. Т. 38. № 11. С. 2152–2155.

[6] *Спицын А.И.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 4. С. 68–78.