01;03

Суррогатная модель Навье–Стокса–Бюргерса для метода моделирования большими вихрями неоднородной турбулентности

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет,
197002 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonalex@yahoo.co.uk

(Поступило в Редакцию 16 ноября 2004 г.)

Предложена модель параллельных в спектральном пространстве невзаимодействующих каскадов для турбулентного течения несжимаемой жидкости при произвольных градиентах крупномасштабной скорости. Линейная часть модельных уравнений для двух поляризационных компонент скорости выводится из уравнений Навье–Стокса, а нелинейная часть соответствует одномерной модели Бюргерса. В рамках модели получены явные выражения для подсеточных напряжений Рейнольдса без эмпирических параметров.

Мотивация постановки задачи

Известно, что даже упрощенные нелинейные уравнения для мелкомасштабных компонент скорости не удается решить аналитически для произвольного вида градиентов крупномасштабной скорости. В последние годы осознание этого факта привело к созданию синтетических, или суррогатных, моделей турбулентности, в которых динамика мелкомасштабных вихрей моделируется некоторым процессом, который строго не следует из уравнений для мелкомасштабной скорости, однако воспроизводит спектры напряжений Рейнольдса, близкие к тем, которые наблюдают в эксперименте (см., например, [1]).

Уравнения модели

Точные уравнения для модифицированных поляризационных компонент мелкомасштабной скорости [2], полученные при приведении линейной части системы к диагональному виду, предлагается заменить следующей упрощенной системой (1+1) интегродифференциальных уравнений

$$(\partial_t + \nu k^2)v^1 = \lambda_1(\theta, \eta)v^1 - ik\Sigma_p v^1(p)v^1(k-p), \qquad (1)$$

$$(\partial_t + \nu k^2)v^2 = \lambda_2(\theta, \eta)v^1 - ik\Sigma_p v^2(p)v^2(k-p), \qquad (2)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ — это обычные поляризационые компоненты, а матрица $\mathbf{B}$ определяется градиентами крупномасштабной скорости.

Отметим, что такой выбор нелинейности сохраняет инвариантность системы относительно собственных преобразований Галилея (случай чистого вращения $\Omega \neq 0$, $S = 0$ соответствует чисто мнимым $\lambda_{1,2}$; согласно [3], в этом случае энергия запирается на больших масштабах, каскада энергии не происходит и возможен только вязкий распад турбулентности, что согласуется с нашей моделью, в которой отсутствуют подсеточные напряжения Рейнольдса). Также эта нелинейность сохраняет энергию турбулентности. Вышенаписанная система состоит из двух (1+1) интегродифференциальных уравнений, не связанных друг с другом. Углы θ и η являются параметрами уравнений, которые пробегают часть своей области определения, дающей положительные значения величинам λ_1 и λ_2. Эти уравнения по существу являются оригинальными уравнениями Бюргерса [4] (это название заимствовано мною из [5]), которые имеют конечное число аналитических стационарных решений [4] при произвольных сеточных числах Рейнольдса (в нашем подходе). Это число увеличивается пропорционально квадратному корню из сеточного числа Рейнольдса. Вид этих решений существенно упрощается в пределе очень больших сеточных чисел Рейнольдса, что было отмечено еще Бюргерсом [4]. Под сеточным числом Рейнольдса здесь понимается величина $\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} = \lambda L^2/\nu$, а $\lambda = \lambda_1$ либо $\lambda = \lambda_2$, L — длина ребра кубической ячейки, разделяющей мелкомасштабное и крупномасштабное движение. Источник-сток в вышенаписанных уравнениях, а также остальные члены уравнения, за исключением нелинейных, получены из несжимаемых уравнений Навье–Стокса, что позволяет говорить о суррогатной модели Навье–Стокса–Бюргерса. В целом сложный процесс передачи энергии по спектру заменяется совокупностью одномерных каскадных моделей с пренебрежением взаимодействий двух компонент поляризационной скорости v^1 и v^2 друг с другом, а также их спектральных компонент, по-разному ориентированных в спектральном пространстве.

По-видимому, все стационарные решения оригинального уравнения Бюргерса устойчивы как в линейном, так и в общем нелинейном случае. Некоторые соображения об устойчивости этих уравнений содержатся в [5]. Поскольку именно решения с наибольшей амплитудой дают наибольший вклад в подсеточные напряжения Рейнольдса, именно такие решения можно выбрать из решений, даваемых Бюргерсом при $\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} \to \infty$,

$$v_B = \frac{\lambda L}{2}\left(\frac{2\xi}{L} - 1 + \tanh\left[\lambda L(L - 2\xi)/(8\nu)\right]\right). \qquad (3)$$

Здесь $\xi \in [0, L]$. Это решение (антисимметричное относительно середины промежутка) строилось так, чтобы удовлетворить требованиям, накладываемым на пульсации скорости $L^{-1}\int\limits_0^L v_B d\xi = 0$ — среднее по пространству равно нулю. Это решение линейно меняется по всей области определения, за исключением маленьких участков вблизи середины промежутка, где оно меняется очень сильно, образуя два ударных слоя. Отметим, что более строго, чем это сделал Бюргерс в [4] и более ранних своих работах, этот результат следует из метода сращивания асимптотических разложений [6]. Далее, чтобы воспользоваться этим решением для построения трехмерных спектров напряжений Рейнольдса и энергии, нам необходимо найти фурье-компоненты этого решения. Следуя Бюргерсу, разложим вышеприведенное стационарное решение в ряд Фурье

$$v_B(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(\pi n\xi/L), \tag{4}$$

где

$$v_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L v_B \sin(\pi n\xi/L) d\xi$$

или в явном виде

$$v_n = \lambda \int\limits_0^L d\xi \left\{2\xi/L - 1 + \tanh[\lambda L(L-2\xi)/(8\nu)]\right\} \sin(\pi n\xi/L).$$

Сделаем замену переменной $z = 2\xi/L$, тогда

$$v_n = \frac{\lambda L}{2}\int\limits_0^2 dz\left[z - 1 + \tanh\bigl(\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}(1-z)/16\bigr)\right]\sin(\pi n z/2), \tag{5}$$

где $\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} = \lambda L^2/\nu$.

Разбивая область интегрирования пополам, получим

$$v_n = \lambda L\int\limits_0^1 dy\left\{y - 1 + \tanh[\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}(y-1)/16]\right\}\sin(\pi n y/2). \tag{6}$$

Интеграл, входящий в это выражение, отличается от нуля только для четных $n = 2p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, которые будут рассматриваться далее. Для дальнейшего упрощения интеграл проинтегрируем по частям, представив sin как производную от cos с соответствующими коэффициентами. Учитывая, что $\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, в результате получим

$$v_p = \lambda L \mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}/(8\pi p)\int\limits_0^1 dy \cos(\pi p y)\frac{1}{\cosh^2[\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}(y-1)/16]}.$$

Осуществляя замену переменных $z = 1 - y$ и проводя тривиальные упрощения, получим в результате

$$v_p = \lambda L \mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}(-1)^p/(8\pi p)\int\limits_0^1 \frac{dz\cos(\pi p z)}{\cosh^2(\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} z/16)}. \tag{7}$$

При больших значениях $\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}$ (а это уже предполагалось ранее) квадрат гиперболического косинуса быстро возрастает, что позволяет заменить единицу на верхнем пределе интеграла бесконечностью

$$v_p = \lambda L \mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}(-1)^p/(8\pi p)\int\limits_0^\infty \frac{dz\cos(\pi p z)}{\cosh^2(\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} z/16)}. \tag{8}$$

Полученный интеграл уже является табличным (берется с использованием теории вычетов) [7]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{\cosh^2 \alpha x}dx = \frac{\pi m}{2\alpha^2 \sinh\frac{\pi m}{2\alpha}}. \tag{9}$$

В нашем случае имеем

$$v(p) = \frac{16\pi\lambda L \mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}^{-1}(-1)^p}{\sinh\frac{8\pi^2 p}{\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}}}. \tag{10}$$

Отметим, что схожая формула уже приведена у Бюргерса [4].

Спектры напряжений Рейнольдса и энергии турбулентности

Согласно [8], напряжения Рейнольдса $\langle u_i u_j\rangle$ определяются следующим образом через свои спектры Φ_{ij}:

$$\langle u_i u_j\rangle = \int \Phi_{ij} d\mathbf{k}, \tag{11}$$

где

$$\bigl\langle u_i(\mathbf{k})u_j(-\mathbf{k})\bigr\rangle = \bigl\langle u_i(\mathbf{k})u_j^*(\mathbf{k})\bigr\rangle = \Phi_{ij}(-\mathbf{k}) = \Phi_{ij}^*(\mathbf{k}).$$

Энергия турбулентности

$$E_T = \frac{1}{2}\langle u_i u_i\rangle = \frac{1}{2}\int \Phi_{ii} d\mathbf{k}.$$

Из связи поляризационных спектральных компонент с обычными следует выражение для спектрального тензора

$$\Phi_{ij} = \bigl\langle \varepsilon_i^\mu u^\mu \varepsilon_j^\gamma u^{*\gamma}\bigr\rangle. \tag{12}$$

В частности,

$$\Phi_{ii} = \bigl\langle u^\mu u^{*\mu}\bigr\rangle, \tag{13}$$

откуда $E_T = \frac{1}{2}\int\langle u^\mu u^{*\mu}\rangle d\mathbf{k}$.

Согласно Ли [9], переход от дискретных фурье-гармоник к непрерывным и сумм — к интегралам в трехмерном пространстве должен сопровождаться следующими заменами:

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \Sigma \to \int d^3\mathbf{k}. \tag{14}$$

Обозначим нормирующий множитель буквой N

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3. \tag{15}$$

Одномерный спектр энергии $E(k)$ равен, согласно Ли [9],

$$E(k) = Nk^2 \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta \cos\eta \left(u^1 u^{1*} + u^2 u^{2*}\right). \qquad (16)$$

Напомним, что в сферической системе координат, использованной Ли, элемент телесного угла равен $d\Omega = \cos\theta d\theta d\eta$. В предлагаемом подходе одномерный спектр энергии для неоднородной турбулентности можно считать по той же формуле с учетом

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v},$$

где матрица $\mathbf{B}$ определятся градиентами крупномасштабной скорости [2], а модифицированный поляризационный вектор $\mathbf{v}$ следует положить равным нулю для тех ориентаций в спектральном пространстве, которые отвечают неположительным собственным значениям λ (нет источника энергии для одномерного каскада).

Спектры энергии и напряжений Рейнольдса для случая однородного сдвига

Обратимся опять к случаю простого сдвига, при котором единственная компонента $\partial_2 U_1 = S$ тензора градиента крупномасштабной скорости отлична от нуля. В этом случае

$$\lambda_1 = 0.5 S \sin(2\theta) \cos^2(\eta), \qquad (17)$$

$$\lambda_2 = 0. \qquad (18)$$

Решения, отвечающие данной ситуации согласно нашей суррогатной модели, $v = (v_B, 0)$.

Вторая компонента равна нулю, поскольку для всех ориентаций в спектральном пространстве $\lambda_2 = 0$. Здесь v_B — коэффициент разложения выбранного нами решения оригинального уравнения Бюргерса. Коэффициенты матрицы $\mathbf{B}$ перехода от модифицированных к обычным поляризационным компонентам равны

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = \sin\eta \tan\theta, \quad b_{21} = \sin\eta \cos\theta, \quad b_{22} = 1.$$

Область D угловых переменных, дающих $\lambda_1 > 0$, определяется следующим образом:

$$\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2], \qquad \eta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

В результате спектр энергии определяется следующим явным выражением:

$$E(k) = Nk^2 \int\limits_D d\theta d\eta \cos\eta [1 + \sin^2(\eta)\cos^2(\theta)] v_B^2(k, \theta, \eta), \qquad (19)$$

где связь непрерывного модуля волнового числа k и целого номера p ряда Фурье по синусам определяется соотношением $k = 2\pi p/L$.

Будем рассматривать случай однородного сдвига, когда $\partial_1 u_2 = S$, а остальные компоненты тензора градиента крупномасштабной скорости равны нулю. Напомним, связь поляризационных компонент v и u

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}.$$

Для рассматриваемого случая

$$u^1 = v_B,$$

$$u^2 = v_B \sin\eta \cos\theta.$$

Трехмерный спектр энергии турбулентности определяется

$$E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}) = \frac{N}{2}[1 + \sin^2(\eta)\cos^2(\theta)] v_B^2.$$

Одномерные спектры, получающиеся после интегрирования по поверхности сферы радиуса k, равны по определению (см., например, [8])

$$\phi_{ij} = k^2 \iint \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d\Omega, \qquad (20)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Напомним основные соотношения, важные для последующего изложения: $n = 2p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $k = \pi n/L$, где L — масштаб, разделяющий крупномасштабные поля скорости и мелкомасштабные. Фурье-гармоника решения оригинального уравнения Бюргерса

$$v_B = v(p) = \frac{16\pi\lambda L(-1)^p}{\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} \sinh(8\pi^2 p/\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}})},$$

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} = \lambda_1 L^2/\nu,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} S \sin(2\theta) \cos^2(\eta).$$

Эти формулы будут использоваться далее в анализе.

Асимптотики одномерных спектров Рейнольдса в области очень больших волновых чисел

Будем считать

$$p \gg \mathrm{Re}_{\mathrm{loc\,max}}.$$

В этом случае гиперболический синус можно заменить на растущую экспоненту. В итоге квадрат фурье-компоненты решения Бюргерса можно записать в следующем виде

$$v^2(p) = 4(16\pi\lambda_1 L/\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}})^2 \exp(-16\pi^2 p/\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}), \qquad (24)$$

где λ_1 и $\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}}$ зависят известным образом от угловых переменных.

Задача определения одномерных спектров напряжений Рейнольдса состоит в вычислении двукратных интегралов по угловым переменным вида

$$\phi = \iint g_{ij}(\theta, \eta) \exp(hp) \cos\eta d\theta d\eta,$$

где

$$h = -16\pi^2/\mathrm{Re}_{\mathrm{loc}} = -\frac{64\pi^2\nu}{L^2 S\sin(2\theta)(1+\cos 2\eta)},$$

а функции g_{ij} определяются как

$$g_{ij} = k^2\Phi_{ij}\exp(-hp).$$

Следуя методу Лапласа [8], вычисления асимптотик интегралов дают следующие выражения для спектров напряжений Рейнольдса:

$$\phi_{11} = \frac{2L^2 k\nu S}{\pi}\exp(ph_{\max}), \quad (22)$$

$$\phi_{22} = \frac{2L^2 k\nu S}{\pi}\exp(ph_{\max}), \quad (23)$$

$$\phi_{12} = -\frac{2L^2 k\nu S}{\pi}\exp(ph_{\max}), \quad (24)$$

$$\phi_{33} = \frac{L^3 S^2}{8\pi^2}\exp(ph_{\max}), \quad (25)$$

$$\phi_{13} = -\frac{L^{5/2}k^{1/2}\nu^{1/2}S^{3/2}}{4\pi^2}\exp(ph_{\max}), \quad (26)$$

$$\phi_{23} = -\frac{L^{5/2}k^{1/2}\nu^{1/2}S^{3/2}}{8\pi^2}\exp(ph_{\max}), \quad (27)$$

$$E(k) = \frac{1}{2}(\phi_{11}+\phi_{22}+\phi_{33}) \approx \frac{2L^2 k\nu S}{\pi}\exp(ph_{\max}), \quad (28)$$

где

$$\exp(ph_{\max}) = \exp\left(-\frac{15\pi k\nu}{SL^2}\right).$$

Как известно, эксперименты и модели турбулентности показывают резкое убывание спектров турбулентности в области очень больших волновых чисел, что и отражает полученные спектры. Можно показать, что при промежуточных волновых числах одномерные спектры обратно пропорциональны квадрату волнового числа p, что так же хорошо согласуется с экспериментальными данными, как и закон $-5/3$ Колмогорова [10]. Детали этих вычислений и расчет спектров во всем диапазоне волновых чисел будут даны в отдельной работе.

Заключение

Хотя в модели полностью игнорируется взаимодействие между двумя поляризационными компонентами, ведущее к изотропизации турбулентности, падающий характер спектров и сохранение анизотропии [11] даже при очень высоких числах Рейнольдса дают предложенной модели право на существование.

Список литературы

[1] *McDonough D.M.* // J. Turbulence. 2003. N 31. P. 1–20. http:jot.iop.org
[2] *Балонишников А.М.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 10. С. 36–39.
[3] *Cambon C., Scott J.* // An. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 1–21.
[4] *Burgers J.M.* // Adv. Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–199.
[5] *Eden A.* // Nonlinearity. 1990. Vol. 3. P. 557–566.
[6] *Найфе А.* Введение в методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 535 с. (Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1981.)
[7] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
[8] *Матье Ж., Жандель Д.* // Методы расчета турбулентных течений. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. С. 35. (Mathieu J., Jeandel D. // Prediction Methods for Turbulent Flows / Ed. W. Kollmann. New York: Henisphere publishing corp., 1980. P. 35.)
[9] *Lee J.* // J. Math. Phys. 1975. Vol. 16. N 7. P. 537–563.
[10] *Hunt J.C.R., Carlotti P.* // Flow. Turbulence and Combustion. 2001. Vol. 66. P. 453–475.
[11] *Shen X., Warhaft Z.* // Phys. Fluids. 2000. Vol. 12. N 1. P. 2976–2989.