

01;03

Нелинейные капиллярно-гравитационные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости конечной глубины

© А.В. Климов, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 февраля 2005 г.)

В асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости конечной глубины найдено аналитическое выражение для временной зависимости профиля нелинейной волны. Выяснилось, что вид зависимости от вязкости жидкости и толщины ее слоя нелинейной поправки к линейному решению при переходе от толстых слоев жидкости к тонким качественно изменяется.

1. Исследование нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волновых движений жидкости представляет как академический, так и практический интерес в связи с широким распространением такого физического объекта. В этой связи за последние полтора столетия обсуждаемой проблеме посвящено множество работ. Учет таких факторов, как вязкость жидкости, наличие поверхностного заряда, конечность, но не малость толщины слоя жидкости, существенно усложняет и без того непростую проблему. В последние годы выполнено несколько детальных исследований нелинейных периодических волн на заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости [1–4] на заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости [5,6]. Большая часть нелинейных исследований волновых движений жидкости на заряженной поверхности слоев вязкой жидкости выполнена в приближении „мелкой воды“, когда малым параметром задачи является отношение длины волны к толщине жидкой пленки (см., например, [7–10]). Подобное упрощение не всегда обосновано [11], к тому же большинство работ сводится просто к выводу нелинейных уравнений, имеющих именно солитонные решения [7–9].

Целью настоящей работы являются исследование нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на поверхности слоя вязкой электропроводной жидкости конечной глубины, отыскание аналитического решения, пригодного при произвольных толщинах слоев жидкости, допускающего экстраполяцию к тонким слоям жидкости, а также анализ одновременного влияния вязкости жидкости и ее глубины на закономерности реализации нелинейного волнового движения.

2. Пусть несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ бесконечный в плоскости XOY слой $-d \leq z \leq 0$ в декартовой системе координат x, y, z с началом на невозмущенной свободной поверхности жидкости (\mathbf{n}_z — орт оси z). Идеально электропроводная жидкость находится в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 , вектор которого направлен вниз. По

поверхности жидкости в положительном направлении оси Ox распространяется волна амплитуды α , которая принимается меньшей длины волны с волновым числом k и много меньшей капиллярной постоянной жидкости $a \equiv \sqrt{\gamma/\rho g}$. Отношение α к a определяет малый параметр задачи ε . Физические величины $\rho, \nu, \gamma, g, d, E_0, \alpha, k$ считаются постоянными. Кроме того, принимается, что все переменные в пространстве величины не зависят от координаты y .

С учетом вышесказанного математическая модель нелинейного периодического капиллярно-волнового движения на однородно заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости записывается в виде

$$\begin{aligned}
 -d \leq z \leq \xi: \quad & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U} \\
 & = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} U^2 + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \\
 z \geq \xi: \quad & \Delta \Phi = 0; \quad z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi = -E_0 \cdot \mathbf{n}_z; \\
 z = \xi: \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = w; \\
 & \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \\
 & p - 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} \\
 & = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0; \\
 z = -d: \quad & u = 0; \quad w = 0, \tag{1}
 \end{aligned}$$

где $\xi = \xi(x, t)$ — отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной плоской формы $z = 0$, вызванное волновым движением; $\mathbf{U} = (u, 0, w)$ — поле скоростей жидкости; $p(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическое давление внутри жидкости; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости.

Начальные условия, как это принято в задачах расчета нелинейного периодического волнового движения [3–6], подбираются таким образом, чтобы получаемое в итоге решение имело как можно более простой вид. В качестве такого условия можно положить, что возмущение свободной поверхности в первом приближении по малой амплитуде волны α имеет вид бегущей вдоль оси абсцисс гармонической волны

$$\xi(x, t) = 2\alpha \exp(St - ikx) + \text{с.с.} + o(\alpha), \quad (1a)$$

где S — комплексная частота волны, с.с. — комплексно-сопряженное слагаемое.

Ввиду крайней громоздкости решаемой задачи ограничим свои цели выводом аналитического выражения для профиля нелинейных волн на поверхности жидкости. Все остальные искомые величины (поля скоростей течения жидкости в слое, распределение давления в жидкости и электрического потенциала над ее поверхностью) будут определяться в процессе вычислений, но их явные конечные аналитические выражения выписывать не станем из-за ограниченности объема статьи.

3. В нулевом приближении свободная поверхность жидкости является невозмущенной $\xi_0(x, t) = 0$. Величины полей скоростей и давления в жидкости, а также электрического потенциала в пространстве над жидкостью определяются из соотношений (1)

$$u_0 = w_0 = 0; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g z; \quad \Phi_0 = -E_0 z.$$

Решение задачи (1) будем искать в виде разложения неизвестных компонент профиля свободной поверхности жидкости ξ , поля скоростей $(u, 0, w)$, давления p , электрического потенциала Φ по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + O(\varepsilon^3); & u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3); \\ w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + O(\varepsilon^3); \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3); \\ \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим в (1) выражения (2) и разобьем задачу по порядкам малости.

4а. В первом порядке малости получим

$$\begin{aligned} -d \leq z \leq 0: & \quad \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_1 \right) \\ & \quad - \nu \Delta \mathbf{U}_1 = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_1 = 0; \\ z \geq 0: & \quad \Delta \Phi_1 = 0; \\ z \rightarrow \infty: & \quad |\nabla \Phi_1| \rightarrow 0; \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \\ z = 0: & \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - w_1 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} &= 0; \\ z = -d: & \quad u_1 = 0; \quad w_1 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{U}_1 — векторное поле $(u_1, 0, w_1)$.

4б. Нетрудно убедиться в том, что уравнения неразрывности и Навье–Стокса, а также поле давлений могут быть записаны через потенциал поля скоростей φ_1 и функцию тока ψ_1 в виде

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \nu \Delta \psi_1 = 0; \quad u_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}; \\ w_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \quad p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3a)$$

Выражение для формы свободной поверхности ξ_1 в комплексной форме представляется бегущей волной

$$\xi_1(x, t) = \xi \exp(St - ikx), \quad (4)$$

где амплитудный множитель ξ выражается через амплитуду начальной волны α .

В итоге решение задачи первого порядка малости сводится к нахождению неизвестных величин φ_1 , ψ_1 , Φ_1 и комплексной частоты S .

Выражения для потенциала скорости φ_1 , функции тока ψ_1 , электрического потенциала Φ_1 будем искать в виде, аналогичном виду ξ_1 ,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z, t) &= B(z) \cdot \exp(St - ikx); \\ \psi_1(x, z, t) &= C(z) \cdot \exp(St - ikx); \\ \Phi_1(x, z, t) &= A(z) \cdot \exp(St - ikx); \end{aligned} \quad (5)$$

где A , B , C — амплитуды, подлежащие дальнейшему определению.

После подстановки выражений (4), (5) в (3), (3a) можно найти искомые величины электрического потенциала Φ_1 , давления p_1 и компонент поля скоростей u_1 и w_1

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= E_0 \cdot \xi \exp(St - ikx - kz); \\ p_1 &= -\frac{i\rho S}{k} \xi (\sigma_2 \cdot q \operatorname{ch}(k(z+d)) \\ & \quad + \sigma_1 \operatorname{sh}(k(z+d))) \exp(St - ikx); \\ u_1 &= \xi (\sigma_2 \cdot q \operatorname{ch}(k(z+d)) \\ & \quad + \sigma_1 \cdot k \operatorname{sh}(k(z+d)) - \sigma_2 \cdot q \operatorname{ch}(q(z+d)) \\ & \quad - \sigma_1 \cdot q \operatorname{sh}(q(z+d))) \cdot \exp(St - ikx); \\ w_1 &= i\xi (\sigma_1 \cdot k \operatorname{ch}(k(z+d)) \\ & \quad + \sigma_2 \cdot q \operatorname{sh}(k(z+d)) - \sigma_1 \cdot k \operatorname{ch}(q(z+d)) \\ & \quad - \sigma_2 \cdot k \operatorname{sh}(q(z+d))) \exp(St - ikx); \\ q &= \sqrt{k^2 + S/\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

где частота S определяется из дисперсионного уравнения [12]

$$\text{Det } M = 0; \quad \omega_0^2 = gk \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 - \frac{E_0^2}{4\pi\rho g} k \right); \quad \beta \equiv kd; \quad \xi \equiv qd;$$

$$M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\text{sh}(\beta) & -\text{ch}(\beta) & \text{ch}(\xi) & \text{sh}(\xi) & S \\ (k^2 + q^2) \text{ch}(\beta) & (k^2 + q^2) \text{sh}(\beta) & -2kq \text{sh}(\xi) & -2kq \text{ch}(\xi) & v^{-1}\omega_0^2 \\ -2k^2 \text{sh}(\beta) & -2k^2 \text{ch}(\beta) & (k^2 + q^2) \text{ch}(\xi) & (k^2 + q^2) \text{sh}(\xi) & 0 \end{pmatrix},$$

а постоянные σ_1, σ_2 имеют вид

$$\sigma_1 \equiv -\frac{iv(2\xi \text{sh}(\beta) - (k^2 + q^2) \text{sh}(\xi))}{q \text{ch}(\xi) \text{sh}(\beta) - k \text{ch}(\beta) \text{sh}(\xi)};$$

$$\sigma_2 \equiv \frac{iv(2k^2 \text{ch}(\beta) - (k^2 + q^2) \text{ch}(\xi))}{q \text{ch}(\xi) \text{sh}(\beta) - k \text{ch}(\beta) \text{sh}(\xi)}.$$

Важно отметить, что мы получили решение задачи первого порядка малости в комплексном виде с начальным условием (4). Чтобы решение задачи было действительным вида (1а), найденные величины (6) необходимо дополнить комплексно-сопряженными частями и положить $\xi = 2\alpha$.

5. Во втором порядке малости получим задачу

$$-d \leq z \leq 0: \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_2 = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_2 \right) - v \Delta \mathbf{U}_2 = -\frac{1}{2} \nabla (U_1^2) - (\nabla \times \mathbf{U}_1) \times \mathbf{U}_1; \quad (8)$$

$$z \geq 0: \quad \Delta \Phi_2 = 0; \quad (9)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - w_2 = \xi_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \quad (10)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}; \quad (11)$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho v \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = 2\rho v \xi_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - 2\rho v \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} - 2\rho v \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \quad (13)$$

$$z = -d: \quad u_2 = 0; \quad w_2 = 0; \quad (14)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_2| \rightarrow 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_2 = (u_2, 0, w_2)$.

5а. Полученная во втором порядке малости задача представляет собой систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Согласно принятому в методах возмущений правилу, при решении задач методом малого параметра определяется общее решение задачи первого приближения, а затем частное решение задачи второго порядка малости. Известно, что частное решение системы дифференциальных уравнений определяется в виде, аналогичном виду ее правых частей (неоднородностей). Поэтому сначала необходимо вычислить правые части соотношений (7), (8) и (10)–(13). Это делается подстановкой выражений (8) в данные соотношения. При этом необходимо принимать во внимание наличие у величин Φ_1, p_1, u_1, w_1 и ξ_1 комплексно-сопряженных слагаемых.

Неоднородную систему уравнений (7), (8) удобно записать в матричной форме, где вектор-функция неоднородности будет иметь вид

$$F_j = \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) \sum_{i=1}^5 (A_{ji} \text{ch}(Q_i(d+z)) + H_{ji} \text{sh}(Q_i(d+z))) + \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) \times \left(V_{j0} + \sum_{i=1}^2 (Z_{ji} \text{ch}(Q_i(d+z)) + C_{ji} \text{sh}(Q_i(d+z))) \right) + \text{c.c.};$$

$$Q_1 = k + q, \quad Q_2 = k - q, \quad Q_3 = q + \bar{q},$$

$$Q_4 = q - \bar{q}, \quad Q_5 = 2k, \quad (16)$$

где $A_{ji}, H_{ji}, V_{ji}, C_{ji}$ — некоторые матрицы размером 3×5 с коэффициентами не зависящими от времени и пространственных координат.

Формулы для них не приведены ввиду их чрезмерной громоздкости, но их явный вид легко может быть восстановлен подстановкой в правую часть системы (7), (8) решений первого порядка малости (6).

Вектор-функция неоднородности системы (10)–(13) имеет вид

$$G_j = \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) (N_{j0} + N_{j1} \text{ch}(dk) + U_{j1} \text{sh}(dk) + N_{j2} \text{ch}(dq) + U_{j2} \text{sh}(dq)) + \alpha^2 (\exp(2St - 2ikx) (M_{j0} + M_{j1} \text{ch}(dk) + T_{j1} \text{sh}(dk) + M_{j2} \text{ch}(dq) + T_{j2} \text{sh}(dq))) + \text{c.c.}, \quad (17)$$

где $N_{ji}, U_{ji}, M_{ji}, T_{ji}$ — некоторые матрицы размерности 4×3 .

Формулы для них не приведены ввиду их чрезмерной громоздкости, но их явный вид легко может быть восстановлен подстановкой в правую часть системы (10)–(13) решений первого порядка малости (6).

56. Решением задачи второго порядка малости являются аналитические выражения для неизвестных Φ_2 , p_2 , u_2 , w_2 и ξ_2 . Дальнейшие рассуждения основаны на представлении величин u_2 , w_2 , p_2 в виде суммы

$$(u_2, v_2, p_2) = (u_2^+, w_2^+, p_2^+) + (u_2^*, w_2^*, p_2^*), \quad (18)$$

где первое слагаемое этой суммы (u_2^+, w_2^+, p_2^+) , имеющее в дальнейшем негибкую часть решения, представляет собой частное решение системы уравнений (7), (8), а второе слагаемое (u_2^*, w_2^*, p_2^*) вместе с величинами Φ_2 и ξ_2 составляет так называемую гибкую часть решения. Гибкая часть решения формируется на основе решения соответствующей (7), (8) однородной системы и содержит две произвольных константы, значения которых выбираются таким образом, чтобы вся сумма (18) удовлетворяла граничным условиям (10)–(15).

Сначала определим негибкую часть решения. Искать ее в соответствии с видом функций неоднородности F_{ji} необходимо в виде

$$\begin{aligned} (u_2^+, w_2^+, p_2^+) &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) \\ &\times \sum_{i=1}^5 (a_{ji} \operatorname{ch}(Q_i(d+z)) + h_{ji} \operatorname{sh}(Q_i(d+z))) \\ &+ \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) \left(g_{j0} + \sum_{i=1}^2 (g_{ji} \operatorname{ch}(Q_i(d+z))) \right. \\ &\left. + c_{ji} \operatorname{sh}(Q_i(d+z)) \right) + \text{с.с.}, \quad (19) \end{aligned}$$

где a_{ji} , h_{ji} , g_{ji} , c_{ji} — неизвестные матрицы размером 3×5 с коэффициентами, не зависящими от времени и пространственных координат.

Чтобы их определить, необходимо подставить (19) в систему уравнений (7), (8), правая часть которых имеет вид (16). Затем в этой системе надо приравнять нулю коэффициенты при одинаковых выражениях вида

$$\begin{aligned} &\exp(\Omega t - iKx) \operatorname{ch}(Q(d+z)); \\ &\exp(\Omega t - iKx) \operatorname{sh}(Q(d+z)). \end{aligned}$$

При этом (7), (8) распадается на некоторое количество простых систем алгебраических уравнений, из которых затем нетрудно выразить компоненты неизвестных коэффициентов a_{ji} , h_{ji} , g_{ji} , c_{ji} .

На языке линейных преобразований данные неизвестные матрицы получаются из матриц A_{ji} , H_{ji} , V_{ji} , C_{ji} действием линейного оператора, который задан матрицами,

зависящими от параметров

$$\begin{aligned} L_1(K, Q, \Omega) &= \frac{1}{(K^2 - Q^2)(v(K^2 - Q^2) + \Omega)} \\ &\times \begin{pmatrix} -Q^2 & 0 & iK(v(K^2 - Q^2) + \Omega) \\ 0 & K^2 & 0 \\ i\rho K(v(K^2 - Q^2) + \Omega) & 0 & \rho(v(K^2 - Q^2) + \Omega^2) \end{pmatrix}; \\ L_2(K, Q, \Omega) &= \frac{Q}{(K^2 - Q^2)(v(K^2 - Q^2) + \Omega)} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & iK & 0 \\ iK & 0 & v(K^2 - Q^2) + \Omega \\ 0 & \rho(v(K^2 - Q^2) + \Omega) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Указанное линейное преобразование действует следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ji} &= L_1(0, Q_i, S + \bar{S})A_{ji} + L_2(0, Q_i, S + \bar{S})H_{ji}; \\ h_{ji} &= L_1(0, Q_i, S + \bar{S})H_{ji} + L_2(0, Q_i, S + \bar{S})A_{ji}; \\ g_{ji} &= L_1(2k, Q_i, 2S)V_{ji} + L_2(2k, Q_i, 2S)C_{ji}; \\ c_{ji} &= L_1(2k, Q_i, 2S)C_{ji} + L_2(2k, Q_i, 2S)V_{ji}. \end{aligned}$$

Данные выражения необходимо подставить в (19), что позволит найти окончательный вид выражений u_2^+ , w_2^+ и p_2^+ .

Гибкая часть решения задачи второго порядка малости является решением системы (7), (8) с нулевой правой частью. Данные уравнения эквивалентны следующей системе уравнений относительно потенциалов и функций тока:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_2^* &= 0; \quad \frac{\partial \psi_2^*}{\partial t} - v \Delta \psi_2^* = 0; \quad u_2^* = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2^*}{\partial z}; \\ w_2^* &= \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x}; \quad p_2^* = -\rho \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t}. \quad (20) \end{aligned}$$

Поскольку неоднородности уравнений (7), (8), определяемые равенством (16), являются линейными комбинациями множителей $\exp((S + \bar{S})t)$ и $\exp(2St - 2ikx)$, то искать гибкую часть решения задачи следует в виде

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t)Z_0 + \alpha^2 \exp(2St - 2ikx)Z_1 + \text{с.с.}; \\ (\varphi_2^*, \psi_2^*, \Phi_2) &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t)A_0(z) \\ &+ \alpha^2 \exp(2St - 2ikx)A_1(z) + \text{с.с.}, \quad (21) \end{aligned}$$

где Z_i — неизвестные постоянные, $A_i(z)$ — трехэлементные столбцы неизвестных постоянных.

Подстановка выражений (21) в соотношения (7), (9), (15), (20) позволяет уточнить вид функций A_i и выразить u_2^* , w_2^* и p_2^*

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \alpha^2 a_0 \exp((S + \bar{S})t) \\ &+ \alpha^2 a_1 \exp(2St - 2ikx - 2kz) + \text{c.c.}; \\ (u_2^*, w_2^*, p_2^*)^T &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) (b_{00} \cdot f_0 + b_{10} \cdot j_0 \\ &+ b_{10} \cdot f_0 \cdot (d + z) + c_{00} \cdot p_0 \cdot \text{sh}(w_0(d + z)) \\ &+ c_{10} \cdot p_0 \text{ch}(w_0(d + z))) + \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) \\ &\times (b_{01}(f_1 \text{ch}(2k(d + z)) + h_1 \text{sh}(2k(d + z))) \\ &+ b_{11}(h_1 \text{ch}(2k(d + z)) + f_1 \cdot h(2k(d + z))) \\ &+ c_{01}(n_1 \text{ch}(w_1(d + z)) + p_1 \cdot \text{sh}(w_1(d + z))) \\ &+ c_{11}(p_1 \text{ch}(w_1(d + z)) + n_1 \cdot \text{sh}(w_1(d + z))) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $a_0, a_1, b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}, c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$ — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (10)–(15),

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{\frac{S + \bar{S}}{\nu}}, \quad w_1 = \sqrt{4k^2 + \frac{2S}{\nu}}, \\ f_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho(S + \bar{S}) \end{pmatrix}, \quad j_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_0 &= \begin{pmatrix} -w_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} -2ik \\ 0 \\ -2\rho S \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}, \\ n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2ik \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} -w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5в. Для большей компактности и наглядности дальнейших выводов представим граничные условия 2-й задачи второго порядка при $z = 0$ (10)–(15) в матричной форме

$$\begin{aligned} B(u_2, w_2, p_2, \Phi_2) + \Xi \xi_2 &= G_j, \\ B(u, w, p, \Phi) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho\nu \frac{\partial}{\partial z} & 1 & \frac{-E_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ w \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} \right)_{z=0}; \\ \Xi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\rho g + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -E_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь B — линейный оператор, Ξ — оператор умножения вектора на скаляр, G_j задано выражением (17).

Оператор Ξ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \Xi \xi_2 &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) Z_0 Y_0 \\ &+ \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) Z_1 Y_1 + \text{c.c.}; \\ Y_0 &= (S + \bar{S}, -\rho g, 0, -E_0)^T; \\ Y_1 &= (2S, -\rho g - 4\gamma k^2, 0, -E_0)^T, \end{aligned} \quad (23)$$

где T — символ транспонирования матрицы.

Действие оператора B на выражения вида

$$\begin{aligned} (u, w, p)^T &= \exp(\Omega t - iKx) \\ &\times (A_j \text{ch}(Q(d + z)) + H_j \text{sh}(Q(d + z))); \\ \Phi &= \varphi \exp(\Omega t - iK(x - z)), \end{aligned}$$

где Ω, K, Q — постоянные, A_j и H_j — трехэлементные столбцы, имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} B(u, w, p, \Phi) &= \exp(\Omega t - iKx) \left((B_1(K)A_j + B_2(Q)H_j) \right. \\ &\times \text{ch } dQ + (B_1(K)H_j + B_2(Q)A_j) \text{sh } dQ + \varphi \cdot E(K) \left. \right); \\ B_1(K) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -iK & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\nu\rho Q & 0 \\ Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ E(K) &= \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 K \\ \frac{4\pi}{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу равенства (18) будем иметь

$$B(u_2^*, w_2^*, p_2^*, \Phi_2) + \Xi \xi_2 = G_j - B(u_2^+, w_2^+, p_2^+, 0). \quad (24)$$

Согласно известным выражениям для величин гибкой части решения (21), (22), а также (23), левая часть (24) имеет вид

$$\begin{aligned} B(u_2^*, w_2^*, p_2^*, \Phi_2) + \Xi \xi_2 &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) (B_1(0)((b_{00} + b_{10}d)f_0 + b_{10}j_0) \\ &+ b_{10}B_2(1)f_0 + (c_{10}B_1(0) + c_{00}B_2(w_0))p_0 \text{ch}(dw_0) \\ &+ (c_{00}B_1(0) + c_{10}B_2(w_0))p_0 \text{sh}(dw_0) + a_0 E(0) \\ &+ Z_0 Y_0) + \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) ((B_1(2k)(b_{01}f_1 + b_{11}h_1) \\ &+ B_2(2k)(b_{01}h_1 + b_{11}f_1)) \text{ch}(2dk) + (B_1(2k)(b_{01}h_1 \\ &+ b_{11}f_1) + B_2(2k)(b_{01}f_1 + b_{11}h_1)) \text{sh}(2dk) \\ &+ (B_1(2k)(c_{01}n_1 + c_{11}p_1) + B_2(w_1)(c_{01}p_1 + c_{11}n_1)) \\ &\times \text{ch}(dw_1) + (B_1(2k)(c_{01}p_1 + c_{11}n_1) + B_2(w_1) \\ &\times (c_{01}n_1 + c_{11}p_1)) \text{sh}(dw_1) + a_1 E(2k) + Z_1 Y_1) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя в правую часть выражения (24) величины (17) и (19), получим

$$\begin{aligned}
 G_j - B(u^+, w^+, p^+, 0) &= \alpha^2 \exp((S + \bar{S})t) (N_{j0} + N_{j1} \operatorname{ch}(dk) + U_{j1} \operatorname{sh}(dk) \\
 &+ N_{j2} \operatorname{ch}(dq) + U_{j2} \operatorname{sh}(dq) - \sum_{i=1}^5 ((B_1(0)a_{ji} \\
 &+ B_2(Q_i)h_{ji}) \operatorname{ch}(dQ_i) + (B_1(0)h_{ji} + B_2(Q_i)a_{ji}) \\
 &\times \operatorname{sh}(dQ_i)) + \alpha^2 \exp(2St - 2ikx) (M_{j0} + M_{j1} \\
 &\times \operatorname{ch}(dk) + T_{j1} \operatorname{sh}(dk) + M_{j2} \operatorname{ch}(dq) + T_{j2} \operatorname{sh}(dq) \\
 &- B_1(2k)g_{j0} - \sum_{i=1}^2 ((B_1(2k)g_{ji} + B_2(Q_i)c_{ji}) \\
 &\times \operatorname{ch}(dQ_i) + (B_1(2k)c_{ji} + B_2(Q_i)g_{ji}) \operatorname{sh}(dQ_i)) + \text{с.с.} \dots
 \end{aligned} \tag{26}$$

5г. Подставив (25) и (26) в (24), а затем собрав коэффициенты при $\exp((S + \bar{S})t)$ и $\exp(2St - 2ikx)$ и приравняв их нулю, получим уравнения для определения неизвестных постоянных a_m, b_{mn}, c_{mn}, Z_m . Если к этим уравнениям добавить те, что получаются подстановкой (18) в граничные условия (14), то получим систему линейных алгебраических уравнений, из которых постоянные a_m, b_{mn}, c_{mn}, Z_m определяются единственным образом. Решая эту систему методом Гаусса, получим следующие выражения для Z_0 и Z_1 :

$$\begin{aligned}
 Z_0 = 0; \quad Z_1 = &(2\pi k v \rho w_1 (8k(S + 4k^2 v) R_{11} \\
 &+ i(S + 8k^2 v) R_{13}) + 8\pi k^2 v \rho w_1 S R_{22} \operatorname{ch}(2dk) \\
 &+ 8\pi i k^2 v \rho w_1 S R_{21} \operatorname{sh}(2dk) - 2\pi \rho w_1 S (S + 4k^2 v) \\
 &\times R_{22} \operatorname{ch}(dw_1) - 4\pi i k \rho S (S + 4k^2 v) R_{21} \operatorname{sh}(dw_1) \\
 &- 2\pi \rho w_1 ((S^2 + 8k^2 v S + 32k^4 v^2) R_{11} + ikv(S \\
 &+ 8k^2 v) R_{13}) \operatorname{ch}(2dk) \operatorname{ch}(dw_1) + 4\pi k \rho ((S^2 \\
 &+ 16k^2 v S + 32k^4 v^2) R_{11} + ikv(3S + 8k^2 v) R_{13}) \\
 &\times \operatorname{sh}(2dk) \operatorname{sh}(dw_1) - 2\pi k^2 S R_{12} \operatorname{ch}(2dk) \operatorname{sh}(dw_1) \\
 &+ \pi k w_1 S R_{12} \operatorname{sh}(2dk) \operatorname{ch}(dw_1)) / \Delta_{Z_1}; \\
 \Delta_{Z_1} = &\pi \rho S \left(32k^2 v w_1 (S + 4k^2 v) - 4w_1 (S^2 + 8k^2 S + 32k^4 \right. \\
 &\times v^2) \operatorname{ch}(2dk) \operatorname{ch}(dw_1) + 8k(S^2 + 16k^2 v S + 32k^4 \\
 &\times v^2) \operatorname{sh}(2dk) \operatorname{sh}(dw_1) + \left(2gk + 8 \frac{k^3 \gamma}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{\pi \rho} \right) \\
 &\left. \times (2k \operatorname{ch}(2dk) \operatorname{sh}(dw_1) - w_1 \operatorname{sh}(2dk) \operatorname{ch}(dw_1)) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} = &\frac{ik^2}{2} \sigma_1 \operatorname{sh}(dk) - \frac{ikq}{2} \sigma_1 \operatorname{sh}(dq) \\
 &+ \frac{ikq}{2} \sigma_2 \operatorname{ch}(dk) - \frac{ikq}{2} \sigma_2 \operatorname{ch}(dq) \\
 &- \frac{kS^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(d(k+q))}{4v(S(S - 4k^2 v) - 8k^3 v^2 (k - q))} \\
 &+ \frac{k(k - q)S(k\sigma_1^2 + q\sigma_2^2) \operatorname{sh}(d(k+q))}{4(S(S - 4k^2 v) - 8k^3 v^2 (k - q))} \\
 &+ \frac{kS^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} d(k - d)}{4v(S(S - 4k^2 v) - 8k^3 v^2 (k + q))} \\
 &+ \frac{k(k + q)S(k\sigma_1^2 - q\sigma_2^2) \operatorname{sh}(d(k - q))}{4(S(S - 4k^2 v) - 8k^3 v^2 (k + q))}; \\
 R_{12} = &-\frac{E_0^2 k^2}{8\pi} + \frac{i\rho}{2} (S + 6k^2 v) (q\sigma_2 \operatorname{sh}(dk) + k\sigma_1 \operatorname{ch}(dk)) \\
 &- i\rho k(2S + 3k^2 v) (\sigma_1 \operatorname{ch}(dq) + \sigma_2 \operatorname{sh}(dq)) \\
 &- \frac{\rho(S + 2k^2 v)}{4v} \sigma_1^2 + \frac{\rho(S + k^2 v)}{2v} \sigma_2^2 \\
 &+ \frac{k(3S + 2k(3k - q)v)\rho}{2v(3k - q)(S + 2k(k + q)v)} \\
 &\times (S\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(d(k - q)) + v(k + q)(k\sigma_1^2 - q\sigma_2^2) \\
 &\times \operatorname{ch}(d(k - q))) - \frac{k(3S + 2k(3k + q)v)\rho}{2v(3k + q)(S + 2k(k - q)v)} \\
 &\times (S\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(d(k + q)) - v(k - q) \\
 &\times (k\sigma_1^2 + q\sigma_2^2) \operatorname{ch}(d(k + q)))); \\
 R_{13} = &-k^3 \sigma_1 \operatorname{sh}(dk) + k^2 q \sigma_1 \operatorname{sh}(dq) - k^2 q \sigma_2 \operatorname{ch}(dk) \\
 &+ k^2 q \sigma_2 \operatorname{ch}(dq) - \frac{iS(S + 2k(3k + q)v)}{8v^2(3k + q)(S + 2k(k - q)v)} \\
 &\times \left((k + q)\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(d(k + q)) + (k\sigma_1^2 + q\sigma_2^2) \right. \\
 &\left. \times \operatorname{sh}(d(k + q)) \right) + \frac{iS(S + 2k(3k - q)v)}{8v^2(3k - q)(S + 2k(k + q)v)} \\
 &\times \left((k - q)\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(d(k - q)) \right. \\
 &\left. - (k\sigma_1^2 - q\sigma_2^2) \operatorname{sh}(d(k - q)) \right); \\
 R_{21} = &-\frac{ik(S(S - 4k^2 v) - 8k^4 v^2)}{4vS(S - 8k^2 v)} \sigma_1^2 \\
 &+ \frac{2ik^3(S + k^2 v)}{S(S - 8k^2 v)} \sigma_2^2; \\
 R_{22} = &-\frac{4k^4 v q}{S(S - 8k^2 v)} \sigma_1 \sigma_2. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Подставим выражения (27) в соотношение (21) для ξ_2 и приведем его к вещественному виду

$$\xi_2 = 2\alpha^2 |Z_1| \exp(2 \operatorname{Re} S \cdot t) \cos(2 \operatorname{Im} S \cdot t - 2kx + \operatorname{Arg} Z_1).$$

В итоге для профиля нелинейной волны получим с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде волны выражение

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & \alpha \exp(r \cdot t) \cos \theta \\ & + 2\alpha^2 |Z_1| \exp(2r \cdot t) \cos(2\theta + \operatorname{Arg} Z_1); \\ Q \equiv & \operatorname{Im} S \cdot t - k \cdot x; \quad r \equiv \operatorname{Re} S. \end{aligned} \quad (28)$$

6. Наиболее информативная часть полученного решения — амплитудный множитель нелинейной поправки к профилю волны Z_1 , который является комплексной величиной, а его вещественная и мнимая части зависят от физических параметров задачи, в том числе от толщины слоя и вязкости жидкости. Абсолютная величина, или модуль амплитудного множителя нелинейной поправки $|Z_1|$, характеризует интенсивность внутреннего нелинейного взаимодействия между линейным по амплитуде α слагаемым в выражении (28) для профиля волны и квадратичным по α слагаемым.

При аналитическом исследовании нелинейных волн на поверхности жидкости часто обращают внимание на профиль бегущей волны. При этом оцениваются такие величины, как заостренность гребня волны и его наклон, которые также определяются множителем Z_1 . Так, модуль $|Z_1|$ является мерой отличия формы профиля нелинейной волны от точной косинусоидальной формы. С ростом $|Z_1|$ у капиллярных волн, имеющих притупленные вершины, радиус кривизны вершин еще больше увеличивается, а для гравитационных волн, отличающихся от капиллярных волн более заостренными вершинами, радиус их кривизны уменьшается, т.е. увеличивается степень их заострения.

Величина отношения $\operatorname{Im}(Z_1)/\operatorname{Re}(Z_1)$, характеризующая аргумент комплексной величины Z_1 , характеризует и степень наклона профиля волны по сравнению с симметричной косинусоидальной формой: если $\operatorname{Im}(Z_1)/\operatorname{Re}(Z_1) < 0$, то профиль наклонен по направлению движения волны, а если $\operatorname{Im}(Z_1)/\operatorname{Re}(Z_1) > 0$, то в противоположную сторону.

На рис. 1–6 показаны зависимости абсолютного значения $|Z_1|$ и величины отношения $\operatorname{Im}(Z_1)/\operatorname{Re}(Z_1)$ от динамической вязкости жидкости η при $E_0 = 0$ и различных значениях толщины слоя жидкости, в качестве которой берется вода ($\rho = 0.998 \text{ g/cm}^3$, $\gamma = 72.8 \text{ dyne/cm}$, $g = 981 \text{ cm/s}^2$). Известно, что капиллярные волны на поверхности глубокой идеальной жидкости имеют притупленные гребни. Из рис. 1 видно, что в слое жидкости конечной толщины с ростом вязкости жидкости вершины таких волн заостряются и, кроме того, появляется наклон в сторону, обратную движению волны, который увеличивается с ростом вязкости. С уменьшением толщины слоя имеет место обратный эффект: гребни

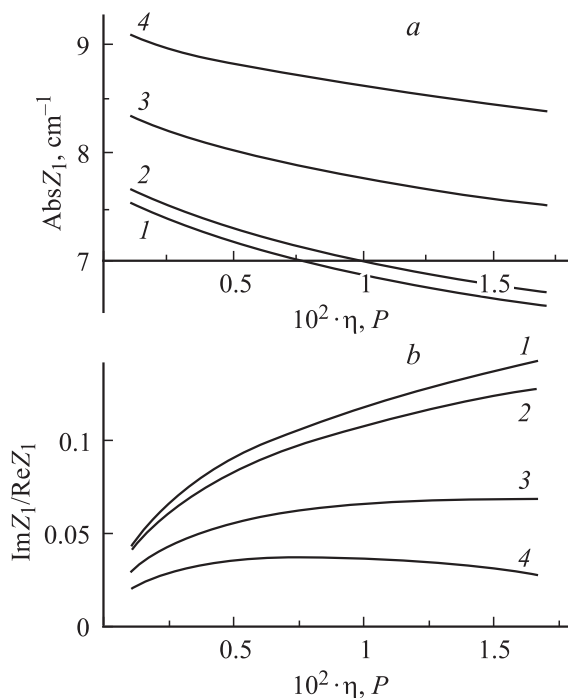


Рис. 1. Зависимости абсолютной величины амплитудного множителя нелинейной поправки к профилю волны Z_1 (a) и отношения мнимой и действительной частей Z_1 (b) от вязкости для коротких волн длиной $\lambda = 0.1 \text{ cm}$ при больших значениях толщины слоя: $d = 4\lambda$ (1), 0.4λ (2), 0.25λ (3), 0.2λ (4).

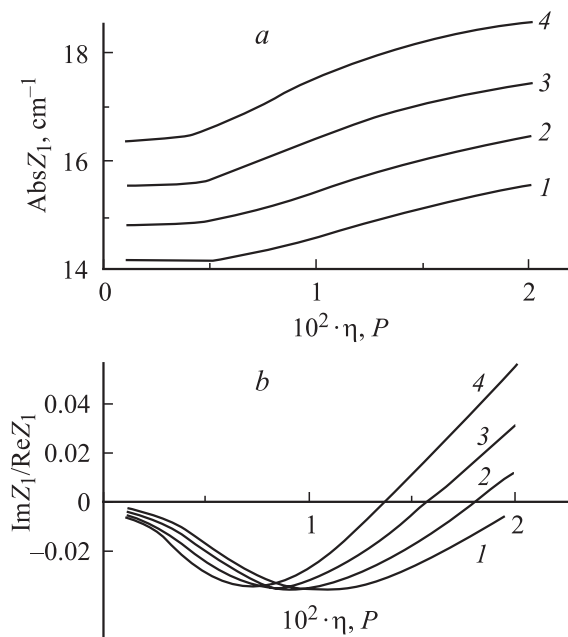


Рис. 2. Зависимости абсолютной величины Z_1 (a) и отношения мнимой и действительной частей Z_1 (b) от вязкости для коротких волн длиной $\lambda = 0.1 \text{ cm}$ при малых значениях толщины слоя: $d = 0.1\lambda$ (1), 0.095λ (2), 0.09λ (3), 0.085λ (4).

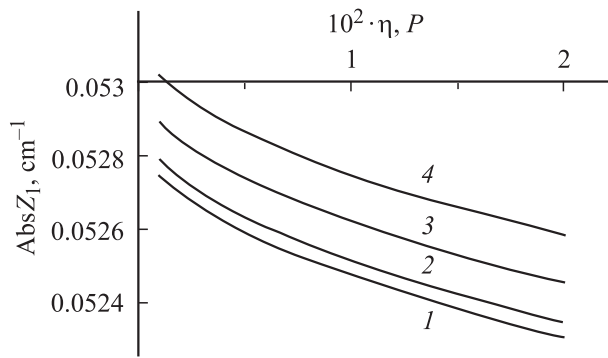


Рис. 3. Зависимости абсолютной величины Z_1 от вязкости для волн длиной $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя: $d = 4\lambda$ (1), 0.73λ (2), 0.63λ (3), 0.58λ (4).

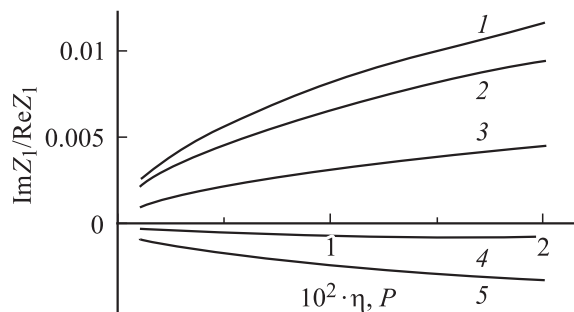


Рис. 4. Зависимости отношения мнимой и действительной частей Z_1 от вязкости для волн длиной $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя: $d = 4\lambda$ (1), 0.33λ (2), 0.23λ (3), 0.19λ (4), 0.17λ (5).

волн притупляются, а их наклон в сторону, обратную движению волны, исчезает. Уменьшение толщины слоя до $\approx 0.1\lambda$, где λ — длина волны, приводит к изменению качественного хода указанных зависимостей: с ростом вязкости радиус кривизны гребней волн увеличивается (рис. 2), а зависимость наклона гребней от вязкости при столь малой глубине слоя жидкости имеет немонотонный вид. Во-первых, в отличие от глубокой жидкости в обсуждаемой ситуации имеет место наклон в сторону движения волны, во-вторых, с ростом вязкости этот наклон увеличивается до определенного значения, а затем начинает уменьшаться и изменяет свой знак.

Несколько иной характер имеют аналогичные зависимости для коротких гравитационных волн: в толстых $d \gg 0.1\lambda$ и в тонких $d \leq 0.1\lambda$ слоях жидкости обсуждаемые зависимости имеют качественно сходный вид, но интенсивность нелинейного взаимодействия в толстых слоях на два-три порядка меньше, чем для капиллярных волн, тогда как в тонких слоях она имеет тот же порядок величины, что и у капиллярных волн (рис. 3–6).

Гребни гравитационных волн на поверхности слоя жидкости с глубиной порядка длины волны заострены и имеют слабый наклон в сторону движения волны. С уменьшением толщины слоя заостренность вершин

волн увеличивается, а наклон уменьшается и при значениях $\approx 0.2\lambda$ изменяется в противоположную сторону. Влияние вязкости таково, что заостренность гребней уменьшается с ее ростом, а их наклон увеличивается. Похожие зависимости имеют место и для малых толщин слоя жидкости $\approx 0.05\lambda$ (рис. 5–6) с той разницей, что вязкость жидкости не уменьшает, а увеличивает заостренность гребней волн.

Влияние электрического заряда на закономерности реализации волнового движения в вязкой жидкости ранее рассматривалось для волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости [5–6] и в основном сводится к изменению положений внутренних нелинейных резонансов, не рассматриваемых в настоящей постановке (хотя из структуры выражения (27) видно, что резонансное взаимодействие волн должно иметь место и будет зависеть как от вязкости, так и от толщины слоя жидкости), и к изменению кривизны гребней волн. В качественном отношении все ранее отмеченные закономерности влияния электрического заряда на условия реализации волнового движения в вязкой жидкости, обнаруженные для волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости, сохраняются и для слоев жидкости конечной толщины. Анализ же влияния заряда на волновое движение в тонких $d \leq 0.1\lambda$ и толстых $d \gg 0.1\lambda$ слоях жидкости

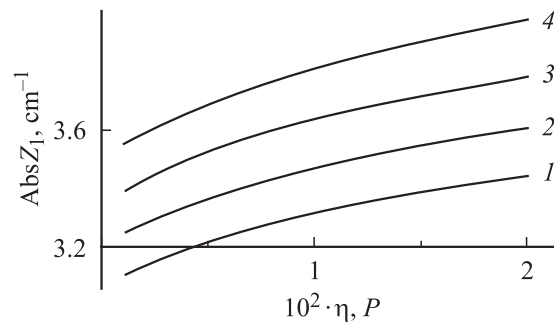


Рис. 5. Зависимости абсолютной величины Z_1 от вязкости для волн длиной $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя: $d = 5 \cdot 10^{-2}\lambda$ (1), $4.93 \cdot 10^{-2}\lambda$ (2), $4.87 \cdot 10^{-2}\lambda$ (3), $4.8 \cdot 10^{-2}\lambda$ (4).

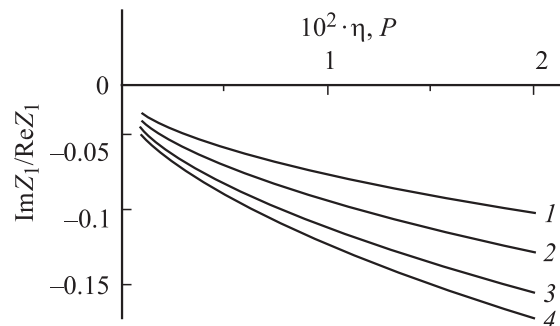


Рис. 6. Зависимости отношения мнимой и действительной частей Z_1 от вязкости для волн длиной $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя: $d = 5.67 \cdot 10^{-2}\lambda$ (1), $5.17 \cdot 10^{-2}\lambda$ (2), $4.83 \cdot 10^{-2}\lambda$ (3), $4.67 \cdot 10^{-2}\lambda$ (4).

требует отдельного детального рассмотрения на основе расчетов с учетом поправок более высоких порядков малости и будет выполнено позднее.

Что касается закономерностей затухания нелинейных капиллярно-гравитационных волн в вязкой жидкости конечной толщины, то, согласно (28), они в использованном квадратичном по амплитуде волны приближении полностью определяются введенным в линейной теории декрементом затухания [13], который характеризуется вещественной компонентой комплексной частоты $r = \text{Re}(S)$. Как видно из (28), нелинейная, квадратичная по амплитуде волны, компонента полного решения убывает во времени с удвоенным декрементом по сравнению с линейной частью решения. Зависимость же величины декремента затухания от вязкости и толщины слоя жидкости была подробно исследована ранее в [12], где, в частности, было показано, что толщина слоя жидкости сказывается на величине декремента только в тонких слоях жидкости при $d \leq \lambda/\pi$. При $d \geq \lambda$ затухание на дне практически не влияет на временную эволюцию амплитуды волны, которая полностью определяется затуханием в объеме жидкости.

Заключение

Как для капиллярных, так и для гравитационных волн зависимости степени кривизны и наклона гребней волн от вязкости имеют различный вид в толстых $d \gg 0.1\lambda$ и тонких $d \leq 0.1\lambda$ слоях жидкости, что указывает на существование качественных различий волновых движений в тонких и толстых слоях жидкости. Сказанное оправдывает традиционно сложившееся существенное различие в методах исследования так называемых длинных (по сравнению с глубиной) и коротких волн на поверхности вязкой жидкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6 (12). С. 1990–2005.
- [2] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 21–29.
- [3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
- [4] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
- [5] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.
- [6] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
- [7] *Жакин А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
- [8] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2935–2940.
- [9] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 4. P. 3573–3578.
- [10] *Ильичев А.Т.* // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 3–27.
- [11] *Крылов В.С., Воротилин В.П., Левич В.Г.* // ТОХТ. 1969. Т. 3. № 4. С. 499–507.
- [12] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.
- [13] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ., 1959. 699 с.