Краткие сообщения

01

Об электро- и магнитостатических полях в средах с неоднородной скоростью движения

© Н.Н. Розанов, Г.Б. Сочилин

Научно-исследовательский институт лазерной физики,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: rosanov@ilph.spb.su

(Поступило в Редакцию 2 декабря 2003 г.)

Для однородных сред со стационарным распределением скорости движения произвольного вида, помещенных в статические электрическое или магнитное поле, в первом порядке по отношению скорости движения к скорости света в вакууме интегральным методом вычислено индуцированное движением магнитное или электрическое поле. В случае вращения шара в среде с теми же характеристиками справедливость результата подтверждена сопоставлением с решением, получаемым сшиванием полей в движущейся и неподвижной частях среды. Оценки показывают реальность экспериментального наблюдения этого эффекта электродинамики сплошных сред.

Электродинамика движущихся сред, основанная на уравнениях Максвелла и материальных уравнениях Минковского [1–3], принципиально позволяет решать широкий круг задач [4,5]. Однако сложность использования условий непрерывности на границах раздела сред приводит к тому, что практически во всех приложениях эти границы считаются плоскими, цилиндрическими или сферическими [3–5].

Вообще говоря, условия непрерывности на границах раздела сред не являются независимыми от самих уравнений Максвелла. Напротив, эти условия служат следствием уравнений Максвелла. Необходимость в их использовании отпадает, если ввести плавный переход между характеристиками сред, а затем уменьшать до нуля ширину переходной области. Недавно в нашей работе [6] таким способом было рассмотрено релятивистское рассеяние (дифракция) электромагнитного излучения на неоднородностях скорости движения диэлектрической среды. При этом считалось, что среда однородна и изотропна, но, например, часть ее вращается с некоторой угловой скоростью. В первом порядке по отношению скорости движения среды к скорости света решение волновых уравнений типа запаздывающего потенциала позволило найти в интегральной форме рассеянные поля для произвольного распределения скорости. В [6] была также оценена максимальная величина скорости, при которой релятивистские эффекты являются основными, превышающими эффекты, вызванные механическими деформациями тел (динамооптические явления [3]).

Задачей данной работы служит демонстрация возможности родственного интегрального подхода (без привлечения условий непрерывности на границах раздела сред) для определения напряженностей статических электрического и магнитного полей в случае сравнительно произвольного распределения скорости движения однородной среды. Точнее, мы будет рассматривать случай стационарного (не зависящего от времени) распределения скорости движения среды, которое возникает, например, при вращении части тела с осесимметричной формой относительной оси симметрии. При этом электрическое и/или магнитное поле остается статическим и в движущейся среде. Как и в [6], диэлектрическая и магнитная проницаемость движущейся и неподвижной сред считаются одинаковыми и анализируются эффекты первого порядка малости по отношению скорости движения среды к скорости света в вакууме. Условия пренебрежимости конкурирующими эффектами, связанными с возникновением механических напряжений при вращении, совпадают с приведенными в [6]. Мы покажем, что в нашем случае вращающегося шара, для которого решение может быть найдено и традиционным способом, использующим условия непрерывности на границе раздела между движущейся и неподвижной частями среды [3], результаты этих двух подходов согласуются.

Для статических полей „дифференциальные“ уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — электрическая и магнитная индукции. Материальные уравнения — уравнения Минковского используются в приближенной форме в первом порядке по скорости движения среды $\mathbf{v}$ к скорости света в вакууме c

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{vH}], \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{Ev}]. \tag{2}$$

Диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости постоянны и отвечают неподвижной среде. В такой постановке релятивистские эффекты проявляются в наиболее чистом виде.

Рассмотрим случай движения среды в зависящей от координат скоростью в однородном статическом электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$. В нулевом порядке по v/c электрическое поле совпадает с $\mathbf{E}_0$, а магнитное поле $\mathbf{H}_0 = 0$. В первом порядке v/c материальные соотношения (2) примут вид

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{E}_0 \mathbf{v}]. \tag{3}$$

Тогда из первого из уравнений Максвелла (1) следует

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_1 = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \operatorname{div} \mathbf{E}_0 \mathbf{v}. \tag{4}$$

Ввиду последнего из уравнений (1) магнитное поле является безвихревым и обладает потенциалом

$$\mathbf{H}_1 = -\mathrm{grad}\Psi. \tag{5}$$

С учетом (4) потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{H}_1(\mathbf{r}')}{R}\, d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi\mu c}\int \frac{\operatorname{div}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}(\mathbf{r}')]}{R}\, d\mathbf{r}',\end{aligned} \tag{6}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}$, в которой вычисляется поле, и вектором переменной интегрирования $\mathbf{r}'$.

Поскольку для однородного электрического поля $\mathbf{E}_0$

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}] = -(\mathbf{E}_0 \operatorname{rot} \mathbf{v}) \tag{7}$$

можно переписать (6) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi\mu c}\int \frac{\big(\mathbf{E}_0 \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}')\big)}{R}\, d\mathbf{r}'. \tag{8}$$

Соотношения (6) и (8) служат общим решением поставленной задачи для произвольного распределения скорости движения среды. Если рассматривать случай вращения осесимметричного тела, то на его границе скорость движения имеет скачок

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in V, \\ 0 & \mathbf{r} \notin V. \end{cases} \tag{9}$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\big(\Phi(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})\big) &= \Phi \operatorname{rot}\mathbf{u} + [\operatorname{grad}\Phi \times \mathbf{u}], \\ \operatorname{grad}\Phi &= -\mathbf{n}\frac{d\Phi}{dl} = -\mathbf{n}\delta(l - l_S),\end{aligned} \tag{10}$$

где l — координата вдоль нормали к поверхности; l_S — ее значение на поверхности; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности; интеграл в правой части (8) сведется к сумме двух интегралов, один из которых берется по объему вращающейся части среды, а другой — по ее поверхности

$$\Psi = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi\mu c}\left\{\int_V dV\,\frac{(\mathbf{E}_0 \operatorname{rot}\mathbf{u})}{R} - \int_S dS\,\frac{(\mathbf{E}_0[\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}])}{R}\right\}. \tag{11}$$

Применим полученные результаты к случаю вращения шара радиуса a с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, направленной вдоль оси z, т.е. $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Считаем, что внешнее электрическое поле направлено также вдоль оси z, $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$. Тогда линейная скорость $\mathbf{u} = [\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}]$, $(\mathbf{E}_0, \operatorname{rot}\mathbf{u}) = 2E_0\Omega$ и $(\mathbf{E}_0, [\mathbf{nu}]) = E_0\Omega(n_x x + n_y y)$. С учетом осевой симметрии задачи интегралы в (11) можно свести к одномерным. В результате получим следующий вид магнитного потенциала вне шара:

$$\Psi = -\frac{4}{15}\frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} E_0\Omega \frac{a^5}{r^3}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right). \tag{12}$$

Здесь r — расстояние до центра шара. Аналогично для диэлектрического шара, вращающегося в постоянном магнитном поле напряженности H_0, направленном вдоль оси вращения, получим электрический потенциал Φ вне шара

$$\Phi = \frac{4}{15}\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon c} H_0\Omega \frac{a^5}{r^3}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right). \tag{13}$$

Для сравнения с традиционным подходом, основанным на сшивании решений на границе раздела движущейся и неподвижной сред, нужно обобщить решение приведенной в [3] задачи, где рассматривалось вращение шара в вакууме, т.е. считалось, что вне вращающегося шара $\varepsilon^{(e)} = 1$ и $\mu^{(e)} = 1$. Для произвольных значений $\varepsilon^{(e)}$ и $\mu^{(e)}$ в случае внешнего магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}_0$ потенциал электрического поля Φ вне шара записывается в форме

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} D_{ik}\frac{n_i n_k}{r^3}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}D_{ik} = &-\frac{a^5}{c}\frac{3(\varepsilon^i\mu^i - 1)\mu^e}{(3\varepsilon^{(e)} + 2\varepsilon^{(i)})(2\mu^{(e)} + \mu^{(i)})} \\ &\times \left\{H_{0i}\Omega_k + H_{0k}\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}(\mathbf{H}_0, \mathbf{\Omega})\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

При равенстве проницаемости внешней среды и вращающегося шара (15) примет вид

$$\begin{aligned}D_{ik} = &-\frac{a^5}{c}\frac{(\varepsilon\mu - 1)}{5\varepsilon} \\ &\times \left\{H_{0i}\Omega_k + H_{0k}\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}(\mathbf{H_0}, \mathbf{\Omega})\right\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогично для шара, вращающегося в однородном электрическом поле, потенциал магнитного поля вне шара

$$\Psi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} B_{ik}\,\frac{n_i n_k}{r^3}, \qquad (17)$$

$$B_{ik} = \frac{a^5}{c}\,\frac{3(\varepsilon^{(i)}\mu^{(i)}-1)\varepsilon^{(e)}}{(3\mu^{(e)}+2\mu^{(i)})(2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)})} \times \left\{E_{0i}\Omega_k + E_{0k}\Omega_i - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}(\mathbf{E_0},\boldsymbol{\Omega})\right\}, \qquad (18)$$

а при равенстве проницаемостей сред вне и внутри шара

$$B_{ik} = \frac{a^5}{c}\,\frac{(\varepsilon\mu-1)}{5\mu}\left\{E_{0i}\Omega_k + E_{0k}\Omega_i - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}(\mathbf{E_0},\boldsymbol{\Omega})\right\}. \qquad (19)$$

Нетрудно показать, что при параллельности оси вращения и направления постоянного поля для внешней области потенциалы, отвечающие (16) и (19), переходят в выражения (12) и (13), что подтверждает правомерность интегрального подхода.

В качестве еще одного примера приведем результаты расчета магнитного потенциала на оси вращения кругового цилиндра с радиусом основания a и длиной $2h$ на расстоянии z от центра инерции цилиндра. Проводя в (11) интегрирование по объему и поверхности цилиндра, получим

$$\Psi_c = E_0\Omega\Big\{(z+h)\sqrt{(z+h)^2+a^2} + (z-h)\sqrt{(z-h)^2+a^2} - 4zh\Big\}. \qquad (20)$$

Сравним магнитные потенциалы шара Ψ_s и цилиндра Ψ_c на оси вращения для точки, расположенной на расстоянии $z \gg a, h$. Из (12) и (20) получаем

$$\Psi_s(0,0,z) = \frac{2}{5\pi}\,\frac{(\varepsilon\mu-1)}{\mu c}\,\frac{a^2 V_s}{z^3}\,E_0\Omega, \qquad (21)$$

$$\Psi_c(0,0,z) = \frac{1}{8\pi}\,\frac{(\varepsilon\mu-1)}{\mu c}\,\frac{a^2 V_c}{z^3}\,E_0\Omega, \qquad (22)$$

где V_s, V_c — объемы шара и цилиндра соответственно.

Таким образом, интегральный подход позволяет найти электро- и магнитостатические поля в случае сред с неоднородным распределением скорости движения достаточно общего вида. Применимость теории возмущений оправдывается малостью скорости движения по отношению к скорости света. Для шара, вращающегося в среде с теми же характеристиками в однородном магнитном или электрическом поле, интегральный подход согласуется традиционным подходом, основанном на сшивании решений внутри движущейся и неподвижной сред.

Отметим, что новые эксперименты в области электродинамики движущихся сред представляются важными ввиду немногочисленности подобных опытов и наличия дискуссионных вопросов в этой теории (см., различающиеся подходы Минковского и Абрагама в монографии [1]). Результаты проведенных ранее исследований [7–9], а также наши оценки [6,10] подтверждают реальность экспериментальной проверки рассмотренного эффекта электродинамики движущихся сред. Действительно, напряженности статических электрического поля при вращении шара (цилиндра) в магнитном поле и магнитного поля для шара (цилиндра) в электрическом поле определяются через градиенты соответствующих потенциалов. Их максимальные величины оцениваются как $(u/c)H_0$ и $(u/c)E_0$, где $u = \Omega a$ — максимальная линейная скорость на поверхности шара (цилиндра). Более точный расчет показывает, что, поскольку статическая диэлектрическая проницаемость, например, стекла, находится в диапазоне 5.5–11 (в зависимости от типа стекла) [11], а магнитная проницаемость близка к единице, при $u \sim 10^3$ cm/s напряженность электрического поля, вызываемого вращением шара в магнитном поле, будет $\sim 10^{-7}H_0$, тогда как для шара, вращающегося в однородном электрическом поле, напряженность магнитного поля $\sim 10^{-6}E_0$ (ср. знаменатели первых дробей в (12) и (13)). Представляется, что такие напряженности могут быть зарегистрированы экспериментально.

Авторы благодарны Л.С. Долину за стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16342).

Список литературы

[1] *Раули В.* Теория относительности. М.: Наука. 1983. 336 с.
[2] *Тамм И.И.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных средств. М.: Наука, 2001. 661 с.
[4] *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* Эйнштейновский сборник 1974. М.: Наука, 1976. С. 179–275. УФН. 1974. Т. 114. Вып. 4. С. 569–608.
[5] *Столяров С.Н.* Эйнштейновский сборник 1975–1976. М.: Наука, 1978. С. 152–215.
[6] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // Опт. и спектр. 2003. Т. 94. № 4. С. 624–631.
[7] *Глуцюк А.М.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 3. С. 413–416.
[8] *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 6. С. 2076–2081.
[9] *Van Bladel J.* Relativity and Engiineering. Berlin: Springer, 1984. 402 p.
[10] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // Проблемы когерентной и нелинейной оптики. СПб.: ИТМО, 2004. С. 118–153.
[11] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.