01

Электромагнитное поле диполя в анизотропной среде

© А.О. Савченко,[1] О.Я. Савченко[2]

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: savch@ommfaol.sscc.ru

(Поступило в Редакцию 22 июля 2004 г.)

В анизотропной среде, имеющей ось анизотропии, впервые найдено электромагнитное поле точечного магнитного и электрического диполя, величина которого изменяется по гармоническому закону.

В предлагаемой работе впервые приводится полное и, главное, точное решение уравнения Максвелла для излучения точечного магнитного и электрического диполя в однородной анизотропной среде, проводимость и диэлектрическая проницаемость которой вдоль оси анизотропии отличается от проводимости и диэлектрической проницаемости среды в перпендикулярном направлении. Решение приводится для любой ориентации диполя по отношению к оси анизотропии. При определении электромагнитного поля диполя, величина которого меняется по гармоническому закону, используются два подхода. Первый из них предложен в [1]. В нем исходная система уравнений Максвелла, когда токами смещения пренебрегается, сводится к таким уравнениям для вектор-потенциала, которые позволяют их определить. Второй подход, реализованный в [2–4], состоит в сведении исходной системы уравнений Максвелла, приведенной во всех точках области, к уравнению для напряженности электрического поля и применению к последнему преобразования Фурье. В этом случае нахождение образов компонент электрического поля сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, а искомые компоненты поля могут быть найдены путем применения обратного преобразования Фурье к найденным образам. Однако авторы этого подхода, тоже пренебрегая токами смещения, ограничились выводом образов только двух компонент поля, а также [3] указанием одной из компонент магнитного поля, не затруднив себя пояснением, как она была получена. В предлагаемой работе впервые получено точное решение уравнений Максвелла для точечного магнитного и электрического диполя в анизотропной среде, так как при решении не исключались, как в [1–4], токи смещения. Для решения задачи мы выбрали второй подход. Это связано с тем, что он, во-первых, обладает большей общностью и в нем не заложено непременное условие о наличии оси анизотропии. Во-вторых, в нем не требуется, как в первом подходе, исследовать электромагнитное поле вблизи диполя.

Итак, пусть в однородной анизотропной среде находится точечный диполь, в котором плотность сторонних электрических $\mathbf{j}^E$ и магнитных $\mathbf{j}^H$ токов изменяется во времени по гармоническому закону $\exp(-i\omega t)$. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке, где расположен диполь. Пусть проводимость γ_t и электрическая проницаемость ε_t среды по двум направлениям x и z одинакова, а по направлению y проводимость равна γ_n и электрическая проницаемость ε_n. Сразу же отметим, что выбор направления, по которому проводимость отлична от других, не является принципиальным, так как решение новой задачи простым преобразованием координат сводится к решению рассматриваемой. Если электромагнитное поле диполя изменяется во времени также по гармоническому закону $\exp(-\omega t)$, то амплитуды напряженности электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, создаваемого диполем, будут, как это следует из уравнения Максвелла, удовлетворять уравнениям [5]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \hat{\sigma}E + \mathbf{j}^E - i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^H, \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ и μ — соответственно тензор проводимости, тензор электрической проницаемости и магнитная проницаемость среды, а матрицы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ имеют диагональный вид

$$(\sigma)_{11} = (\sigma)_{33} = \gamma_t, \quad (\sigma)_{22} = \gamma_n, \quad (\sigma)_{kl} = 0 \quad (k \neq l),$$

$$(\varepsilon)_{11} = (\varepsilon)_{33} = \varepsilon_t, \quad (\varepsilon)_{22} = \varepsilon_n, \quad (\varepsilon)_{kl} = 0 \quad (k \neq l).$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (2), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - i\omega\mu\hat{\sigma}\mathbf{E} - \omega^2\mu\hat{\varepsilon}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{j}^E - \operatorname{rot}\mathbf{j}^H. \tag{3}$$

Определим прямое и обратное преобразование Фурье от функции $f(x, y, z)$ по координатам x, y, z следующим образом:

$$f^+(\xi, \eta, m) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\exp(-i\xi x - i\eta y - imz)\,dx\,dy\,dz,$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f^+(\xi, \eta, m)\exp(i\xi x + i\eta y + imz)\,d\xi\,d\eta\,dm.$$

Представив уравнение (3) в покомпонентном виде, применим преобразование Фурье к обеим частям полученной системы уравнений. Тогда получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно образов компонент электрического поля:

$$\begin{pmatrix} \eta^2+m^2+k_t^2 & -\xi\eta & -\xi m \\ -\xi\eta & \xi^2+m^2+k_n^2 & -\eta m \\ -\xi m & -\eta m & \xi^2+\eta^2+k_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^+ \\ E_y^+ \\ E_z^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$F_l = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(i\omega j_l^E - \mathrm{rot}_l\, \mathbf{j}^H\right) \exp(-i\xi x - i\eta y - imz)\, dx\, dy\, dz,$$

$$k_t^2 = -i\omega\mu\gamma_t', \qquad k_n^2 = -i\omega\mu\gamma_n',$$

$$\mathrm{Re}\, k_t > 0, \qquad \mathrm{Re}\, k_n > 0,$$

$$\gamma_t' = \gamma_t - i\omega\varepsilon_t, \qquad \gamma_n' = \gamma_n - i\omega\varepsilon_n.$$

Найдя значения образов электрического поля решением системы (4), искомые значения компонент электрического поля находятся применением обратного преобразования Фурье к образам компонент. Значения компонент магнитного поля получим из (2).

Запишем полученные значения компонент электромагнитного поля при различной ориентации магнитного и электрического диполя вдоль одной из осей координат. Для этого введем следующие дополнительные обозначения:

$$\lambda^2 = \gamma_t'/\gamma_n', \qquad r^2 = x^2 + z^2,$$

$$R^2 = r^2 + y^2, \qquad \bar{R}^2 = r^2 + \lambda^2 y^2.$$

1. Магнитный диполь

а) Ориентация вдоль оси y. В этом случае сторонний магнитный ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_y^H = -i\omega\mu M\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

где M — момент магнитного диполя.

Компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{i\omega\mu Mz}{4\pi} \exp(-k_t R) \left(\frac{k_t}{R^2} + \frac{1}{R^3}\right),$$

$$E_y = 0,$$

$$E_z = -\frac{i\omega\mu Mx}{4\pi} \exp(-k_t R) \left(\frac{k_t}{R^2} + \frac{1}{R^3}\right),$$

$$H_x = \frac{Mxy}{4\pi} \exp(-k_t R) \left(\frac{k_t^2}{R^3} + \frac{3k_t}{R^4} + \frac{3}{R^5}\right),$$

$$H_y = \frac{M}{4\pi} \exp(-k_t R) \Bigg[-\frac{k_t^2}{R} - \frac{k_t}{R^2} - \frac{1}{R^3} + y^2 \left(\frac{k_t^2}{R^3} + \frac{3k_t}{R^4} + \frac{3}{R^5}\right)\Bigg],$$

$$H_z = \frac{Myz}{4\pi} \exp(-k_t R) \left(\frac{k_t^2}{R^3} + \frac{3k_t}{R^4} + \frac{3}{R^5}\right).$$

б) Ориентация вдоль оси x. Сторонний магнитный ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_x^H = -i\omega\mu M\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{i\omega\mu Mxyz}{4\pi} \Bigg\{\exp(-k_1 R) \left(\frac{k_t}{r^2R^2} + \frac{1}{r^2R^3} + \frac{2}{r^4 R}\right) - \lambda \exp(-k_n \bar{R}) \left(\frac{k_n}{r^2\bar{R}^2} + \frac{1}{r^2\bar{R}^3} + \frac{2}{r^4\bar{R}}\right)\Bigg\},$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu M\lambda z}{4\pi} \exp(-k_n \bar{R}) \left(\frac{k_n}{\bar{R}^2} + \frac{1}{\bar{R}^3}\right),$$

$$E_z = -\frac{i\omega\mu My}{4\pi} \Bigg\{\exp(-k_t R) \Bigg[\frac{k_t}{R^2} + \frac{1}{r^2 R} + \frac{1}{R^3} - z^2 \left(\frac{k_t}{r^2R^2} + \frac{1}{r^2R^3} + \frac{2}{r^4R}\right)\Bigg]\Bigg\} - \frac{i\omega\mu My\lambda}{4\pi} \times \Bigg\{\exp(-k_n\bar{R}) \Bigg[-\frac{1}{r^2\bar{R}} + z^2 \left(\frac{k_n}{r^2\bar{R}^2} + \frac{1}{r^2\bar{R}^3} + \frac{2}{r^4\bar{R}}\right)\Bigg]\Bigg\},$$

$$H_x = \frac{M}{4\pi} \Bigg\{\exp(-k_t R) \Bigg[\frac{k_t}{R^2} + \frac{1}{R^3} - \frac{k_t}{r^2} + x^2 \left(\frac{2k_t}{r^4} + \frac{k_t^2}{r^2 R} - \frac{k_t^2}{R^3} - \frac{3k_t}{R^4} - \frac{3}{R^5}\right)\Bigg]\Bigg\} + \frac{Mk_t}{4\pi} \Bigg\{\exp(-k_n\bar{R}) \Bigg[\frac{k_n}{\bar{R}} + \frac{1}{r^2} - x^2 \left(\frac{k_n}{r^2\bar{R}} + \frac{2}{r^4}\right)\Bigg]\Bigg\},$$

$$H_y = -\frac{Mxy}{4\pi R^3} \exp(-k_t R) \left(k_t^2 + \frac{3k_t}{R} + \frac{3}{R^2}\right),$$

$$H_z = \frac{Mxz}{4\pi} \Bigg\{\exp(-k_t R) \left(\frac{2k_t}{r^4} + \frac{k_t^2}{r^2R} - \frac{k_t^2}{R^3} - \frac{3k_t}{R^4} - \frac{3}{R^5}\right) - k_t \exp(-k_n\bar{R}) \left(\frac{2}{r^4} + \frac{k_n}{r^2\bar{R}}\right)\Bigg\}.$$

в) Ориентация вдоль оси z. Сторонний магнитный ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_z^H = -i\omega\mu M\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Все компоненты электромагнитного поля получаются из предыдущего рассмотренного случая путем замены переменных $x \to z$, $z \to x$, $\mu \to -\mu$.

2. Электрический диполь

а) Ориентация вдоль оси y. В этом случае сторонний электрический ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_y^E = I\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

где I — момент электрического диполя.

Компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = -\frac{i\omega\mu I\lambda xy}{4\pi k_n^2 R^3}\exp(-k_n\bar{R})\left(k_n^2 + \frac{3k_n}{R} + \frac{3}{R^2}\right),$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu I\lambda}{4\pi k_n^2 R^2} \times \exp(-k_n\bar{R})\left\{2k_n + \frac{2}{R} - r^2\left(\frac{k_n^2}{R} + \frac{3k_n}{R^2} + \frac{3}{R^3}\right)\right\},$$

$$E_z = -\frac{i\omega\mu I\lambda yz}{4\pi k_n^2 R^3}\exp(-k_n\bar{R})\left(k_n^2 + \frac{3k_n}{R} + \frac{3}{R^2}\right),$$

$$H_x = \frac{I\lambda z}{4\pi R^2}\exp(-k_n\bar{R})\left(k_n + \frac{1}{R}\right),$$

$$H_0 = 0,$$

$$H_z = -\frac{I\lambda x}{4\pi R^2}\exp(-k_n\bar{R})\left(k_n + \frac{1}{R}\right).$$

б) Ориентация вдоль оси x. Сторонний электрический ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_x^E = I\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{i\omega\mu I}{4\pi k_t}\left\{\exp(-k_t R)\left[\frac{k_t}{R} + \frac{1}{r^2} - x^2\left(\frac{k_t}{r^2 R} + \frac{2}{r^4}\right)\right]\right\} + \frac{i\omega\mu I\lambda}{4\pi k_t^2}\left\{\exp(-k_n\bar{R})\left[\frac{k_n}{R^2} + \frac{1}{R^3} - \frac{k_n}{r^2} + x^2\left(\frac{k_n^2}{r^2 R} - \frac{k_n^2}{R^3} + \frac{2k_n}{r^4} - \frac{3k_n}{R^4} - \frac{3}{R^5}\right)\right]\right\},$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu I\lambda xy}{4\pi k_n^2 R^3}\exp(-k_n\bar{R})\left(k_n^2 + \frac{3k_n}{R} + \frac{3}{R^2}\right),$$

$$E_z = -\frac{i\omega\mu Ixz}{4\pi k_t^2}\left\{\exp(-k_t R)\left(\frac{k_t^2}{r^2 R} + \frac{2k_t}{r^4}\right) + \lambda\exp(-k_n\bar{R})\left(-\frac{k_n^2}{r^2 R} + \frac{k_n^2}{R^3} - \frac{2k_n}{r^4} + \frac{3k_n}{R^4} + \frac{3}{R^5}\right)\right\},$$

$$H_x = \frac{Ixyz}{4\pi r^2}\left\{\exp(-k_t R)\left(\frac{k_t}{R^2} + \frac{2}{r^2 R} + \frac{1}{R^3}\right) - \lambda\exp(-k_n\bar{R})\left(\frac{k_n}{R^2} + \frac{2}{r^2 R} + \frac{1}{R^3}\right)\right\},$$

$$H_y = -\frac{Iz}{4\pi R^2}\exp(-k_t R)\left(k_t + \frac{1}{R}\right),$$

$$H_z = -\frac{Iy}{4\pi}\left\{\exp(-k_t R)\left[\frac{1}{r^2 R} - z^2\left(\frac{k_t}{r^2 R^2} + \frac{2}{r^4 R} + \frac{1}{r^2 R^3}\right)\right]\right\} + \frac{Iy\lambda}{4\pi}\left\{\exp(-k_n\bar{R}) \times \left[\frac{k_n}{R^2} + \frac{1}{r^2 R} + \frac{1}{R^3} - z^2\left(\frac{k_n}{r^2 R^2} + \frac{2}{r^4 R} + \frac{1}{r^2 R^3}\right)\right]\right\}.$$

в) Ориентация вдоль оси z. Сторонний электрический ток имеет только одну ненулевую компоненту

$$j_z^E = I\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Все компоненты электромагнитного поля получаются из предыдущего рассмотренного случая путем замены переменных $x \to z$, $z \to x$, $\mu \to -\mu$, $I \to -I$.

Итак, были рассмотрены все случаи ориентации электрического и магнитного диполя вдоль одной из осей координат. Поле произвольно ориентированного диполя находится как суперпозиция полей его проекций по осям координат.

Приложение

Отметим, что не все компоненты поля могут быть найдены прямым интегрированием из образов, поэтому для нахождения указаных компонент пришлось исключить из рассмотрения ось $r = 0$. Значения компонент поля на этой оси находятся путем предельного перехода при $r \to 0$. Приведем только те значения поля на оси $r = 0$, которые не являются очевидными.

1. Магнитный диполь ориентирован вдоль оси x, $r = 0$

$$E_x = 0,$$

$$E_z = -\frac{i\omega\mu My}{4\pi}\exp(-k_t|y|)\left\{\frac{k_t}{2y^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{|y|^3}\right\},$$

$$H_x = \frac{M}{4\pi}\exp(-k_t|y|)\left\{\frac{k_t^2}{2|y|}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{k_t}{y^2} + \frac{1}{|y|^3}\right\},$$

$$H_z = 0.$$

Значения компонент поля магнитного диполя, ориентированного вдоль оси z, можно получить соответствующей заменой переменных (см. раздел 1 в).

2. Электрический диполь ориентирован вдоль оси x, $r = 0$

$$E_x = \frac{i\omega\mu I}{4\pi k_t^2}\exp(-k_t|y|)\left(\frac{k_t^2}{2|y|} + \frac{k_t}{\lambda^2 y^2} + \frac{1}{\lambda^2|y|^3} + \frac{k_t^2}{2\lambda^2|y|}\right),$$

$$E_z = 0,$$

$$H_x = 0,$$

$$H_z = \frac{Iy}{4\pi}\exp(-k_t|y|)\left(\frac{k_t}{2y^2} + \frac{k_t}{2\lambda^2 y^2} + \frac{1}{\lambda^2|y|^3}\right).$$

Список литературы

[1] *Кауфман А.А., Каганский А.М.* Индукционный метод изучения поперечного сопротивления в скважинах. Новосибирск: Наука, 1972. 135 с.

[2] *Табаровский Л.А., Каганский А.М., Эпов М.И.* // Геология и геофизика. 1976. № 3. С. 94–99.

[3] *Табаровский Л.А., Эпов М.И.* // Электромагнитные методы исследования скважин. Новосибирск: Наука, 1979.

[4] *Эпов М.И.* // Электромагнитные методы исследования скважин. Новосибирск: Наука, 1979.

[5] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 295 с.