

01;03

Вычисление скорости скольжения молекулярного газа вдоль сферической поверхности с учетом коэффициентов аккомодации

© А.В. Латышев, В.Н. Попов, А.А. Юшканов

Поморский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
163002 Архангельск, Россия
e-mail: avlatyshev@comail.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2004 г.)

Представлены результаты, полученные с использованием точных аналитических методов в задаче о скольжении молекулярного газа вдоль твердой сферической поверхности с учетом коэффициентов аккомодации двух первых моментов функции распределения. В качестве основного уравнения использовано обобщение БГК модели кинетического уравнения Больцмана на случай вращательных степеней свободы.

Введение

Описание молекулярных газов носит принципиально более сложный характер, чем описание простого (одноатомного) газа [1]. Описание состояния простого (одноатомного) газа полностью исчерпывается заданием функции распределения как функции координат центров инерции молекул \mathbf{r}' и их скоростей \mathbf{v} . В случае молекулярного газа добавляется зависимость функции распределения от вращательных и колебательных степеней свободы молекул. За исключением сверхнизких температур, описание вращательных степеней свободы молекулярных газов всегда классично. Описание колебательных степеней свободы всегда квантовано. Однако для достаточно широкого диапазона температур (порядка 10–1000 К) можно считать, что колебательные степени свободы не возбуждены и молекулы газа находятся в основном энергетическом состоянии [2].

В качестве основного уравнения в кинетической теории разреженного газа используется уравнение Больцмана [2], точные решения которого ввиду нелинейности стоящего в его правой части пятикратного интеграла столкновений в общем случае получить не представляется возможным. В связи с этим при решении многих задач используется не само уравнение Больцмана, а его модели. Наиболее простой моделью интеграла столкновений является интеграл столкновений в форме БГК

$$I(f) = \nu_0(f_{\text{eq}} - f). \quad (1)$$

Здесь f — функция распределения молекул газа, f_{eq} — локально-равновесный максвеллиан, ν_0 — столкновительный параметр модели. В случае многоатомных газов f и f_{eq} являются функциями координат центров инерции молекул газа \mathbf{r}' , а также скоростей их поступательного \mathbf{v} и вращательного ω движения.

Обобщение БГК модели кинетического уравнения Больцмана на случай молекулярных газов, когда вращательное движение классично, а колебательные степени свободы „заморожены“, может быть получено исходя из следующих соображений. Рассмотрим случай двухатомного газа. Молекула такого газа представляет собой

ротатор, вращающийся в плоскости, перпендикулярной вектору вращательного момента молекулы \mathbf{M} . В реальных физических задачах функцию распределения можно считать не зависящей от ориентации оси симметрии молекулы в этой плоскости [2], поэтому вращательное движение молекулы двухатомного газа полностью описывается заданием модуля вектора вращательного момента $M = J\omega$ (здесь J — модуль момента инерции молекулы газа). Учитывая сказанное выше, функция f_{eq} в случае двухатомного газа может быть записана в виде

$$f_{\text{eq}} = n_{\text{eq}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{\text{eq}}} \right)^{3/2} \frac{J}{k_B T_{\text{eq}}} \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2k_B T_{\text{eq}}} - \frac{J\omega^2}{2k_B T_{\text{eq}}} \right],$$

$$n_{\text{eq}} = \int f \omega d\omega d^3v, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n_{\text{eq}}} \int \mathbf{v} f \omega d\omega d^3v, \quad (2)$$

$$T_{\text{eq}} = \frac{2}{5k_B n_{\text{eq}}} \int \left[\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right] f \omega d\omega d^3v. \quad (3)$$

Здесь m — масса молекул газа, k_B — постоянная Больцмана. Возьмем стационарное БГК уравнение, записанное в сферической системе координат [3] с оператором столкновений (1)

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\theta}{r'} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r' \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ + \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_\varphi^2 \text{ctg} \theta - v_r v_\theta}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \\ - \frac{v_\varphi v_\theta \text{ctg} \theta + v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \nu_0(f_{\text{eq}} - f). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать, что выполняются неравенства

$$|T/T_0 - 1| \ll 1, \quad \lambda |\nabla \ln T| \ll 1,$$

$$\sqrt{m/2k_B T_0} u_{\text{eq}} \ll 1,$$

где T_0 — температура в начале координат, λ — длина свободного пробега молекул, \mathbf{u}_{eq} — среднемассовая скорость движения газа.

Тогда функцию распределения можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega) = f_0(v, \omega)[1 + Y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega)]. \quad (5)$$

Здесь f_0 — равновесная функция распределения с параметрами, заданными на обтекаемой поверхности,

$$f_0(v, \omega) = n_s \left(\frac{m}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \frac{J}{k_B T_s} \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T_s} - \frac{J\omega^2}{2k_B T_s} \right],$$

n_s и T_s — плотность и температура газа на поверхности.

Учитывая (2), (3) и (5), находим

$$\begin{aligned} f_{\text{eq}} &= f_0(v, \omega) \left(1 + \frac{\delta n}{n_s} \right) \left(1 + \frac{\delta T}{T_s} \right)^{-5/2} \\ &\times \exp \left[\frac{m\mathbf{v}\mathbf{u}}{k_B T_s} + \frac{mv^2 + J\omega^2}{2k_B T_s} \frac{\delta T}{T_s} \right] \\ &= f_0(v, \omega) \left[1 + \frac{\delta n}{n_s} + \frac{m\mathbf{v}\mathbf{u}}{k_B T_s} + \left(\frac{mv^2 + J\omega^2}{2k_B T_s} - \frac{5}{2} \right) \frac{\delta T}{T_s} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta n = \int f_0(v, \omega) Y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega) \omega d\omega d^3v,$$

$$\delta T = \frac{2}{5k_B n_s} \int \left[\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right] f_0(v, \omega) Y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega) \omega d\omega d^3v.$$

Подставляя (5) и (6) в (4), после перехода к безразмерным величинам приходим к уравнению

$$\begin{aligned} C_r \frac{\partial Y}{\partial r} + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) + k \left[C_\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + (C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial Y}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \text{ctg} \theta - C_r C_\theta) \frac{\partial Y}{\partial C_\theta} \right. \\ \left. - (C_\varphi C_\theta \text{ctg} \theta + C_r C_\varphi) \frac{\partial Y}{\partial C_\varphi} \right] \\ = \int k(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}', v') d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $l = 2$, $d\Omega = 2\pi^{-3/2} \exp(-C^2 - v^2) v dv d^3C$, $k = 3Kn/(3\sqrt{\pi} Pr)$ при описании изотермического скольжения и $k = 2Kn/(\sqrt{\pi} Pr)$ при описании теплового,

$$\begin{aligned} k(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') &= 1 + 2CC' \\ &+ \frac{1}{l+1/2} (C^2 + v^2 - l - 1/2)(C'^2 + v'^2 - l - 1/2), \end{aligned}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{v}\sqrt{m/2k_B T_s}$, $v = \omega\sqrt{J/2k_B T_s}$, $\mathbf{r} = 3\sqrt{\pi} Pr/(4\lambda)\mathbf{r}'$ при описании изотермического скольжения и $\mathbf{r} = \sqrt{\pi} Pr/(2\lambda)\mathbf{r}'$ при описании теплового скольжения, $\lambda = v_g(\pi m/2k_B T_s)^{1/2}$, v_g — кинематическая вязкость газа, Pr — число Прандтля.

В случае многоатомного газа (число атомов в молекуле $N \geq 3$) функция распределения зависит не только от вектора вращательного момента молекулы \mathbf{M} , но и от углов, определяющих ориентацию осей молекулы относительно вектора \mathbf{M} [2]. Поэтому в этом случае

$$\begin{aligned} f_{\text{eq}} &= n_{\text{eq}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{\text{eq}}} \right)^{3/2} \frac{(J_1 J_2 J_3)^{1/2}}{(2\pi k_B T_{\text{eq}})^{3/2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T_{\text{eq}}} - \frac{\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2}{2k_B T_{\text{eq}}} \right], \\ n_{\text{eq}} &= \int f d^3\omega d^3v, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n_{\text{eq}}} \int \mathbf{v} f d^3\omega d^3v, \\ T_{\text{eq}} &= \frac{2}{5k_B n_{\text{eq}}} \int \left[\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right] f d^3\omega d^3v, \\ f_0(v, \omega) &= n_s \left(\frac{m}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \frac{(J_1 J_2 J_3)^{1/2}}{(2\pi k_B T_s)^{3/2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T_s} - \frac{\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2}{2k_B T_s} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь J_i ($i = 1-3$) суть компоненты вектора момента инерции молекул газа. Проводя с учетом (5) линеаризацию (8), после перехода к безразмерным величинам, как и в случае двухатомного газа, приходим к уравнению (7) с той лишь разницей, что для многоатомного газа $l = 5/2$, $d\Omega = \pi^{-3} \exp(-C^2 - v^2) d^3v d^3C$. Таким образом, обобщение БГК модели уравнения Больцмана на случай молекулярных газов построено и имеет вид (7).

Целью представленной работы является вычисление на основе обобщения БГК модели уравнения Больцмана на случай молекулярных газов с использованием двухмоментного аккомодационного граничного условия [4] скорости скольжения молекулярного газа вдоль твердой сферической поверхности малого радиуса кривизны ($0.01 < Kn = \lambda/R' < 0.4$). Здесь Kn — число Кнудсена, R' — размерный радиус аэрозольной частицы.

Для молекулярного газа двухмоментное аккомодационное граничное условие записывается в виде

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s = 2d_1 C_\theta + 2d_2 C_r C_\theta, \quad C_r > 0,$$

где d_1 и d_2 находятся из условий

$$\begin{aligned} (1 - q_1) \int_{C_r < 0} f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s C_r C_\theta dg \\ = - \int_{C_r > 0} f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s C_r C_\theta dg, \end{aligned}$$

$$(1 - q_2) \int_{C_r, 0} f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s C_r^2 C_\theta dg = \int_{C_r > 0} f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s C_r^2 C_\theta dg.$$

Здесь $dg = 2\pi^{-3/2} v dv d^3C$ для двухатомного газа и $dg = \pi^{-3} d^3v d^3C$ для многоатомного,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s = f_0(C, v)[1 + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)|_s].$$

Для случая простого (одноатомного) газа задача в такой постановке решена в [5]. Случай обтекания поверхности прямого кругового цилиндра рассмотрен в [6]. При $q_1 = q_2 = \alpha_r$ использованное в работе граничное условие с высокой степенью точности аппроксимирует зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. Как показывают приведенные в [5] расчеты, отличие полученных с использованием данного граничного условия зависимостей коэффициентов теплового и изотермического скольжений разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности от коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_r от аналогичных результатов, приведенных в [7], не превышает соответственно 0.72 и 0.005% для всего диапазона чисел α_r .

Отметим, что, несмотря на всю свою простоту, БГК модель уравнения Больцмана корректно описывает скольжения первого порядка (скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности). Так, полученные на ее основе с использованием точных аналитических методов значения коэффициентов теплового и изотермического скольжений одноатомного газа вдоль твердой плоской поверхности в точности совпадают с аналогичными значениями, полученными с использованием ЭС (эллипсоидально-статистической) модели, которая в отличие от БГК модели при переходе к гидродинамическому пределу дает истинное значение числа Прандтля для одноатомных газов, равное $2/3$: $K_{TS}^{(0)} = 1.149996$, $C_m^{(0)} = 1.14665627$. Для сравнения в [8] на основе линеаризованного уравнения Больцмана для газа, молекулы которого рассматриваются как жесткие сферы, получено $K_{TS}^{(0)} = 1.00217$, $C_m^{(0)} = 1.11132$. Значения коэффициентов скачков температуры C_T равны соответственно для БГК модели 2.2037, для модели, использованной в [8], — 2.12703. Отличие $K_{TS}^{(0)}$ связано с различными подходами при определении связи между средней длиной свободного пробега молекул газа и его кинематической вязкостью, использованными при обезразмеривании физических величин в представленной работе и в [8]. При вычислении $C_m^{(0)}$ и C_T данная связь не используется и различия не превышают соответственно 3.17 и 1.69%.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим сферическую аэрозольную частицу, взвешенную в потоке разреженного молекулярного газа. Свяжем с центром кривизны поверхности сферическую систему координат, полярная ось которой направлена вдоль градиента температуры вдали от поверхности. Предположим, что вдали от поверхности задан постоянный градиент температуры ∇T . Вследствие неоднородности распределения температуры в объеме газа на поверхности частицы будут отличными от нуля величинами $\partial T/\partial r$ и $\partial T/\partial \theta$. Первая из них приводит к скачку

температуры на поверхности частицы, а вторая — к тепловому скольжению газа вдоль ее поверхности. Предположим, что нормальная к поверхности компонента градиента температуры не постоянна, а медленно меняется вдоль поверхности частицы. Таким образом, в задаче отлична от нуля величина $\partial^2 T/\partial r \partial \theta$, которая приводит к дополнительному скольжению газа вдоль поверхности частицы (так называемому тепловому скольжению второго порядка).

Предположим далее, что касательная к поверхности составляющая массовой скорости газового потока не постоянна, а медленно меняется вдоль направления нормали к поверхности. Наличие неравномерности распределения массовой скорости в слое Кнудсена приводит к скольжению газа вдоль поверхности, называемому изотермическим скольжением. К сожалению газа вдоль поверхности, называемому барнеттовским скольжением, приводит и наличие объемных температурных напряжений. Таким образом, в задаче отличны от нуля величины $k_1 = \partial U_\theta/\partial r|_\infty$, $k_2 = \partial \ln T/\partial \theta|_\infty$, $k_3 = \partial^2 T/\partial r \partial \theta|_\infty$ и $k_4 = T_{r\theta}/2T|_\infty$.

Следуя [9], $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$ ищем в виде разложения по параметру k

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) + kY_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) + \dots \quad (9)$$

Учитывая (9), в ряд по параметру k будут разложены и гидродинамические характеристики потока газа. В частности, касательная к поверхности частицы компонента массовой скорости U_θ

$$U_\theta = U_\theta^{(1)} + kU_\theta^{(2)} + \dots \quad (10)$$

Подставляя (9) в (7) и приравнивая слагаемые при k , приходим к уравнению для нахождения функций $Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$ и $Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$

$$C_r \frac{\partial Y_1}{\partial r} + Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = \int k(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}', v') d\Omega, \quad (11)$$

$$C_r \frac{\partial Y_2}{\partial r} + Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = \int k(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}', v') d\Omega - \left[(C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial Y_1}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - C_r C_\theta) \frac{\partial Y_1}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg} \theta + C_r C_\varphi) \frac{\partial Y_1}{\partial C_\varphi} \right] - C_\theta \frac{\partial Y_1}{\partial \theta}. \quad (12)$$

Решение уравнение (11) и (12) ищем в виде

$$Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = C_\theta \varphi_1(x, C_r) + C_\theta (C_\theta^2 + C_\varphi^2 + v^2 - l - 1) \varphi_2(x, C_r) + [\varphi_3(x, C_r) + \gamma(C^2 + v^2 - l - 1/2) \varphi_4(x, C_r)] k_2, \quad (13)$$

$$Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = C_\theta \psi_1(x, C_r) + C_\theta (v^2 - l + 1) \psi_2(x, C_r) + \sum_{k=3}^{\infty} b_k(C_\theta, C_\varphi) \varphi_k(x, C_r, v), \quad (14)$$

где $x = r - R$, $\varphi_3(x, C_r)$ и $\varphi_4(x, C_r)$ — функции, построенные в задаче о температурном скачке [10]; $\gamma^2 = 1/(l + 1/2)$; $b_k(C_\theta, C_\varphi)$ в совокупности с C_θ образуют в пространстве скоростей полную систему ортогональных с весом $\exp(-C^2)$ многочленов; в качестве такой системы ортогональных многочленов можно взять широко используемые в кинетической теории газов полиномы Эрмита [3].

Подставляя (13) и (14) в (11) и (12), после интегрирования в правых частях полученных уравнений по C'_θ , C'_φ и v' приходим к системе уравнений для нахождения $\varphi_i(x, \mu)$ и $\psi_i(x, \mu)$ ($i = 1, 2$), $\mu = C_r$

$$\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) \varphi_1(x, \tau) d\tau, \quad (15)$$

$$\mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \varphi_2(x, \mu) = 0,$$

$$\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \psi_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) \psi_1(x, \tau) d\tau$$

$$+ \mu \varphi_1(x, \mu) - 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} + 2\mu \varphi_2(x, \mu) - 4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu}$$

$$- [\varphi_3(x, \mu) + \gamma(\mu^2 + 1/2)\varphi_4(x, \mu)]k_3,$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \psi_2(x, \mu) = 4\mu \varphi_2(x, \mu) - 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu}. \quad (16)$$

Граничные условия для функций $\varphi_i(x, \mu)$ и $\psi_i(x, \mu)$ ($i = 1, 2$) с учетом принятого способа линеаризации функции распределения (5) и вида разложений (13) и (14) запишем в виде

$$\varphi_1(\infty, \mu) = 2U_\theta^{(1)}|_s - 2\mu k_1 - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)k_2 - 2\mu \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)k_4, \quad (17)$$

$$\varphi_1(0, \mu) = 2d_1^{(1)} + 2\mu d_2^{(1)}, \quad \mu > 0, \quad (18)$$

$$\varphi_2(\infty, \mu) = -k_2, \quad \varphi_2(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0,$$

$$\psi_1(\infty, \mu) = 2U_\theta^{(2)}|_s, \quad \psi_1(0, \mu) = 2d_1^{(2)} + 2\mu d_2^{(2)}, \quad \mu > 0,$$

$$\psi_2(\infty, \mu) = 0; \quad \psi_2(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (19)$$

Так как искомые компоненты $U_\theta^{(i)}|_s$ ($i = 1, 2$) в разложении массовой скорости газа на поверхности частицы в ряд по параметру $k(10)$ входят только в граничные условия (17), (19), то в дальнейшем можно ограничиться решением уравнений (15), (16) с граничными условиями (17)–(19).

Таким образом, задача о вычислении скорости скольжения молекулярного газа с использованием двухмоментного аккомодационного условия сводится к решению уравнений (15), (16) с граничными условиями (17)–(19).

2. Основные результаты

Система уравнений (15), (16) с граничными условиями (17)–(19) решена с использованием метода элементарных решений (метода Кейза) [11]. Учитывая разложение (10) и результаты, полученные в [12–14], искомая скорость скольжения разреженного газа вдоль сферической поверхности с учетом коэффициентов аккомодации первых двух моментов функции распределения записывается в виде

$$U_\theta|_s = kU_\theta^{(1)}|_s + k^2U_\theta^{(2)}|_s + \dots,$$

$$U_\theta^{(1)}|_s = \xi_{is}k_1 + \xi_Tk_2 + \xi_Bk_4,$$

$$U_\theta^{(2)}|_s = \xi_1k_1 + \xi_2k_2 + \xi_3k_3,$$

$$\xi_{is} = (2 - q_2) \frac{(q_1^{-1} - 1)(\sqrt{\pi} + \pi Q_1/2) - (1 - \pi/4)Q_1}{1 - \pi/4 + (1 - q_2)(1 + \pi/4 + \sqrt{4}Q_1)},$$

$$\xi_T = \frac{(2 - q_2)(1 - \pi/4)(Q_2 + 1/2)/2 - (1 - q_2)(\sqrt{\pi}Q_1/2 + \pi/4)}{1 - \pi/4 + (1 - q_2)(1 + \pi/4 + \sqrt{4}Q_1)},$$

$$\xi_B = (2 - q_2)$$

$$\times \frac{(2Q_3 - Q_1)(1 - \pi/4) - \sqrt{\pi}(q_1^{-1} - 1)(2 + \sqrt{\pi}Q_1)}{2(1 - \pi/4)(2 - q_2) + \sqrt{\pi}(1 - q_2)(\sqrt{\pi} + 2Q_1)},$$

$$\xi_1 = -\gamma,$$

$$\gamma = \frac{(2 - q_2)(1 - \pi/4)}{(2 - q_2)(1 - \pi/4) + \sqrt{4}(1 - q_2)(Q_1 + \sqrt{\pi}/2)},$$

$$\xi_2 = \gamma[Q_3 + Q_1Q_2],$$

$$\xi_3 = 0.5\gamma[(Q_2 - 1/2)\varepsilon_T + Q_1 - 2Q_3 - \varepsilon_n]. \quad (20)$$

Здесь $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.2663$, $Q_3 = -1.8207$ суть лоялковские интегралы [15]. Для двухатомных газов $\varepsilon_T = 1.2168$, $\varepsilon_n = -0.6716$. Для многоатомных $\varepsilon_T = 1.1914$, $\varepsilon_n = -0.6525$. Таким образом, для двухатомных газов $\xi_3 = 0.5740\gamma$, а для многоатомных $\xi_3 = 0.5873\gamma$.

Переходя в (20) к размерным величинам и записывая в виде, принятом в кинетической теории разреженного газа, находим

$$U'_\theta|_s = [C_m^{(0)} - (C_m^{(0)})^* C_m^{(1)} \text{Kn}] \lambda \frac{\partial U'_\theta}{\partial r'} \Big|_\infty + [K_{TS}^{(0)} - (K_{TS}^{(0)})^* \beta' \text{Kn}] v_g \frac{\partial \ln T}{\partial \theta} \Big|_\infty + (K_{TS}^{(0)})^* \beta_R v_g \text{Kn} \frac{\partial^2 \ln T}{\partial r' \partial \theta} - (K_{TS}^{(0)})^* \beta_B v_g \text{Kn} \frac{T_{r\theta}}{2T} \Big|_\infty, \quad (21)$$

$$C_m^{(0)} = 0.7524Pr^{-1}\xi_{is}, \quad K_{TS}^{(0)} = 2Pr^{-1}\xi_T,$$

$$C_m^{(1)} = 0.7403Pr^{-1}\gamma,$$

$$\beta' = 1.5723Pr^{-1}\gamma, \quad \beta_B = 2.9454Pr^{-1}\xi_B.$$

Здесь $(C_m^{(0)})^* = 0.7645Pr^{-1}$ и $(K_{TS}^{(0)})^* = 0.7662Pr^{-1}$ — значения соответствующих коэффициентов в случае полной аккомодации первых двух моментов функции распределения ($q_1 = q_2 = 1$), $\beta_R = 1.6934Pr^{-1}\gamma$ для двухатомных газов и $\beta_R = 1.7299Pr^{-1}\gamma$ для многоатомных.

Соотношение (21) определяет скорость скольжения молекулярного газа вдоль сферической поверхности малого радиуса кривизны.

Из (21) видно, что учет вращательных степеней свободы молекул газа приводит к зависимостям коэффициентов скольжения от значения числа Прандтля. В случае простого (одноатомного) газа подобного рода зависимость отсутствует. Для большинства газов при нормальных условиях число Прандтля близко к $2/3$ — числу Прандтля для одноатомного газа. Так, для азота N_2 и кислорода O_2 $Pr = 0.76$, для воздуха $Pr = 0.7$, для хлора Cl_2 $Pr = 0.64$. Поэтому результаты по вычислению скорости скольжения газа вдоль обтекаемой поверхности и скорости термофореза, полученные для молекулярных газов, несущественно отличаются от аналогичных результатов, полученных для одноатомных газов. Однако учет данной зависимости необходим при расчетах скорости термофореза частиц, взвешенных в газах, число Прандтля которых существенно отличается от $2/3$, например в выбросах водяного пара, для которого при $100^\circ C$ $Pr = 1.01$.

Как и в случае одноатомного газа [4–6], значения коэффициентов скольжения существенным образом зависят от коэффициента аккомодации второго момента функции распределения. Так, изменение коэффициента q_2 в пределах от 0 до 1 при $q_1 = 1$ приводит к изменению коэффициентов $C_m^{(0)}$, $C_m^{(1)}$, β' , β_B , β_R на 53.67%, а $K_{TS}^{(0)}$ — на 35.25%. Коэффициенты $C_m^{(0)}$ и β_B

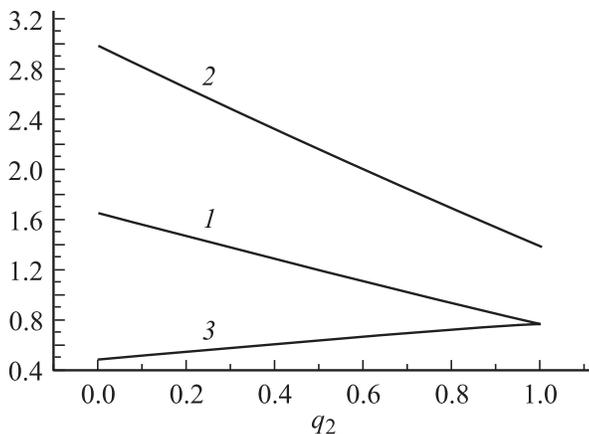


Рис. 1. Зависимость от q_2 при $Pr = 1$ коэффициентов $C_m^{(0)}$ при $q_1 = 1$ (1), $C_m^{(0)}$ при $q_1 = 0.5$ (2), $K_{TS}^{(0)}$ (3).

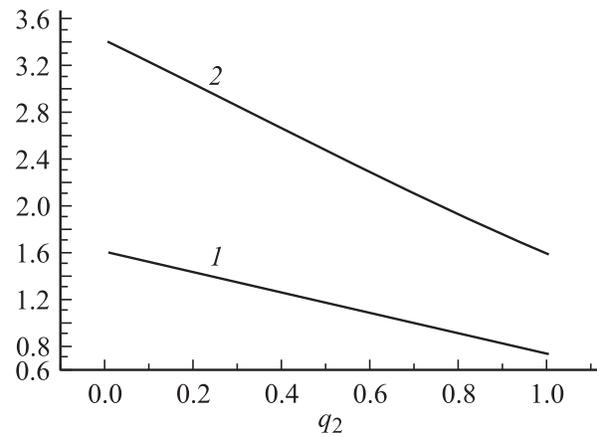


Рис. 2. Зависимость от q_2 при $Pr = 1$ коэффициентов $C_m^{(1)}$ (1) и β' (2).

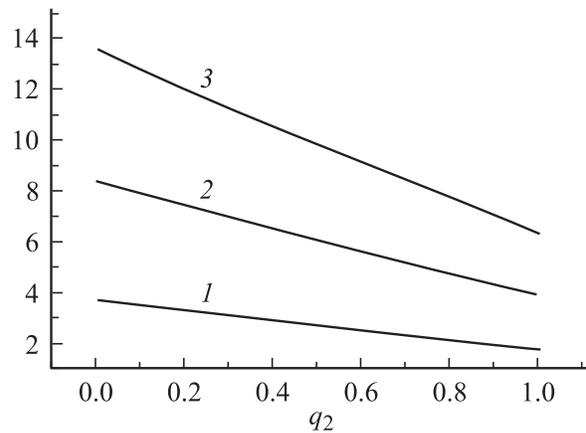


Рис. 3. Зависимость от q_2 при $Pr = 1$ коэффициентов β_R (1), β_B при $q_1 = 1$ (2), β_B при $q_1 = 0.5$ (3).

также существенным образом зависят от коэффициента аккомодации q_1 . В частности, при изменении q_1 в пределах от 0 до 0.5 при $q_2 = 1$ $C_m^{(0)}$ и β_B изменяются на 44.69 и 38.48%. Зависимость коэффициентов скольжения от коэффициентов аккомодации для $Pr = 1$ показана на рис. 1–3.

Заключение

Итак, в работе с использованием двухмоментного аккомодационного граничного условия в линейном по числу Кнудсена приближении вычислена скорость скольжения молекулярного газа вдоль поверхности сферической аэрозольной частицы малого радиуса кривизны. Показана существенная зависимость коэффициентов скольжения от значения числа Прандтля и коэффициента аккомодации второго момента функции распределения.

Список литературы

- [1] *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
- [2] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [3] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967.
- [4] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 3. С. 63–69.
- [5] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // ПМТФ. 2004. № 1. С. 23–28.
- [6] *Попов В.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 19–23.
- [7] *Siewert C.E., Sharipov F.* // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. N 12. P. 4123–4129.
- [8] *Ohwada T., Sone Y.* // Eur. J. Mech. B. Fluids. 1992. N 11. P. 389–414.
- [9] *Sone Y.* // I. Rarefied Gas Dynamics. New York; London: Academic Press, 1969. Proc. 6th Intern. Symp. Vol. 1. P. 243–253.
- [10] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 845–854.
- [11] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
- [12] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // СибЖИМ. 2002. Т. V. № 3 (11). С. 103–114.
- [13] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2003. № 6. С. 111–116.
- [14] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // СибЖИМ. 2003. Т. 6. № 1 (13). С. 60–71.
- [15] *Loyalka S.K.* // Transport Theory and Statistical Physics. 1975. Vol. 4. P. 55–65.