

01;02

Когерентное усиление пучков атомов, неупруго рассеянных конденсатом Бозе–Эйнштейна

© Е.В. Орленко, Б.Г. Матисов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: orlenko@quark.stu.neva.ru

(Поступило в Редакцию 6 сентября 2004 г.)

Рассматривается эффект когерентного усиления пучка неупруго рассеянных примесных атомов системой ультрахолодных атомов при возбуждении в ней коллективных мод.

Используется кинематическая модель слабой локализации нового типа, дающая прозрачную интерпретацию указанному явлению, а так же позволяющая получать угловые зависимости для интенсивности рассеяния. Из указанной модели получены энергетические и угловые критерии существования новой слабой локализации в ультрахолодной системе атомов в состоянии конденсата Бозе–Эйнштейна. Специально обсуждается влияние принципа неразличимости на слабую локализацию пучка атомов, неупруго рассеянных конденсатом Бозе–Эйнштейна в случае их идентичности атомам конденсата.

PACS: 03.75.Nt

Введение

Слабая локализация электронов проводимости и усиление обратного рассеяния классических волн в неупорядоченных средах, как результат конструктивной интерференции волновых полей, рассеянных случайно расположенными центрами, тесно связана друг с другом [1–9]. Слабая локализация проявляет себя в увеличении упругого рассеяния назад в узком диапазоне телесных углов, порядка λ/l , где λ — длина электронной или световой волны, l — длина свободного пробега электронов и фотонов [10–12]. Когерентные явления возникают при рассеянии внешних частиц (таких как электроны или нейтроны) с фиксированными энергиями возбуждений неупорядоченной среды [13,14] и проявляют себя в усилении обратного рассеяния при упругом взаимодействии с неупорядоченной средой, несмотря на относительно большие энергии пучков частиц.

Влияние неупругих процессов на проводимость в условиях слабой локализации изучалось во многих работах [15–17], в том числе в таких известных, как [1,2]. Большое внимание привлекли работы, в которых исследовалось разрушение слабой локализации неупруго рассеянными частицами [18–20]. При описании этих явлений делаются обычно два основных предположения. Во-первых, многократное рассеяние представляется как многократное рассеяние вперед и однократное рассеяние на большой угол [21]. Во-вторых, рассеяние на каждом отдельном рассеивателе считается изотропным. При этом также показывается, что роль неупругих процессов при слабой локализации вторична и скорее негативна, поскольку неупругие столкновения нарушают фазовые соотношения, чем уменьшают вероятность когерентных процессов.

Однако в отдельных случаях неупругие процессы не приводят к потере фазовой памяти системой. В работе [22] впервые было показано, что кроме обычной

слабой локализации андерсоновского типа, существует слабая локализация электронов нового типа, которая существенным образом связана с неупругим процессом, причем происхождение неупругости не имеет существенного значения. В силу неупругого взаимодействия, частица теряет фиксированную энергию и оказывается в неупругом канале. Дополнительно к неупругому столкновению, частица может еще участвовать по меньшей мере, в одном упругом процессе, после чего она покидает среду и может быть зарегистрирована. Определенные различия в локализации электронов при различных механизмах неупругого рассеяния, конечно же, существуют, но оказывается, что преобладающими являются общие черты этого явления. Основное отличие обычной слабой локализации от локализации нового типа при неупругом рассеянии состоит в различии характерных углов рассеяния. Вероятность рассеяния максимальна в области углов рассеяния, близких к $\pi/2$, и эффект проявляется в значительно более широкой области углов, чем в случае традиционной локализации. Если в упругом канале область таких углов имеет порядок λ/l , то в данном неупругом канале она имеет порядок

$$\gamma/\omega = (\lambda/l)(E/\hbar\omega),$$

где γ — частота столкновений электрона, E — его энергия, а $\hbar\omega$ — энергия, передаваемая среде.

Энергия падающего на среду электрона предполагалась достаточно высокой, чтобы могли возбуждаться плазмоны или атомы. В то же время эта энергия не должна быть слишком большой, так чтобы длина волны де Бройля электрона удовлетворяла условиям интерференции электронных волн. Соответствующие значения энергии для пучков электронов лежат в интервале от сотни до 1.5 keV. Причем, сделанные выше утверждения остаются справедливыми для любого числа упругих столкновений, при этом остается неупругое столкновение только одно [23].

В последнее время явление слабой локализации света особенно часто обсуждается в связи с его проявлением при рассеянии на холодных атомных газах и бозе-конденсате. Когерентное усиление света при рассеянии на ультрахолодных атомах, находящихся в магнитооптической ловушке, только недавно было экспериментально обнаружено [24–26]. Численный расчет параметров слабой локализации света при рассеянии на ультрахолодном газе приводятся в работе [27].

На сегодняшний день существует целая серия работ, посвященных изучению возможных возбуждений конденсата Бозе–Эйнштейна и надконденсатной фракции как бесстолкновительного и гидродинамического типов [28,29,33–35], так и возбуждений, вызванных столкновениями с пучками примесных атомов относительно высокой энергии [30]. Иногда используются пучки атомов того же сорта, из которого состоит система ультрахолодных атомов, но специальным образом возбужденные.

Надо отметить, что непосредственных экспериментальных подтверждений явлению новой слабой локализации, обсуждаемому в работах [22,31,32] для электронных пучков, на сегодняшний день нет, существуют лишь косвенные указания на реализацию этого эффекта. Основная причина заключается в том, что учет принципа неразличимости электронов пучка и среды, как было показано для нейтральной атомной среды [36], имеет место и в твердом теле, смещает усиление рассеяния к параметрам обычной слабой локализации, т.е. существенно уменьшает интенсивность когерентного рассеяния на углах, отличных от π . Бозе-конденсат является оптимальным объектом для экспериментальной проверки существования явления новой слабой локализации в чистом виде. Здесь отсутствуют перечисленные негативные факторы, „смазывающие“ картину усиления рассеяния на углах, отличных от π . Кроме того, эксперименты с пучками холодных атомов, рассеивающихся на конденсате Бозе–Эйнштейна интенсивно проводятся различными группами. Поэтому в настоящей работе рассматривается эффект когерентного усиления пучка неупруго рассеянных примесных атомов системой ультрахолодных атомов при возбуждении в ней коллективных мод. В работе используется кинематическая модель [31,32] слабой локализации нового типа, дающая прозрачную интерпретацию указанному явлению, а также позволяющая получать все необходимые угловые зависимости, возникающие при рассеянии, и диаграмма, аналогичная диаграмме Бергмана, полученной для случая локализации нового типа. Специально обсуждается влияние принципа неразличимости на слабую локализацию пучка атомов, не упруго рассеянных ультрахолодной системой в случае их идентичности атомам, составляющим конденсат Бозе–Эйнштейна (БЭК) и надконденсатную фракцию.

Слабая локализация нового типа

Рассмотрим процесс, в котором пучок примесных атомов, распространяющихся в неупорядоченной среде,

моделируемой системой ультрахолодных атомов, претерпевает многократные упругие и одно неупругое столкновения. Энергия такого атома предполагается выше характерной энергии ультрахолодных атомов, находящихся в ловушке, так что длина λ_{imp} волны де Бройля примесного атома $\lambda_{\text{imp}} < \lambda_{\text{sys}}$ соответствующей длины λ_{sys} волны атома ультрахолодной системы. Потеря энергии вследствие неупругого столкновения указанного атома полагается фиксированной.

Пусть оператор энергии взаимодействия атома со средой состоит из двух слагаемых:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_a + \hat{H}_i, \quad (1.1)$$

где \hat{H}_a — оператор энергии взаимодействия атома примеси с отдельными атомами надконденсатной фракции, \hat{H}_i — описывает взаимодействие с атомами, составляющими конденсат Бозе–Эйнштейна и определяет его возбуждение, возникающее под действием движущегося примесного атома. Оператор \hat{H}_a определяется как

$$\hat{H}_a = \sum_l \hat{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \quad (1.2)$$

$\hat{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$ — оператор взаимодействия налетающего примесного атома с атомом надконденсатной фракции, номер которого есть l . Для взаимодействия с конденсатом вычислим „деформационный“ потенциал конденсата. Относительное изменение объема конденсатного облака можно стандартным образом выразить через тензор деформации ξ_{ij} :

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = Sp\xi.$$

При малых деформациях энергия налетающего атома с импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \xi(\mathbf{r})) = \varepsilon_{\mathbf{k}} + g|\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 - \sigma Sp\xi(\mathbf{r}),$$

где

$$g = \int V(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ — потенциал парного взаимодействия между налетающим атомом и атомом конденсата. Трудности, связанной с пренебрежением всеми корреляциями между атомами конденсата, не существует, если указанный потенциал удовлетворяет условиям применимости борновского приближения. Тогда последнюю формулу можно переписать как [28]

$$g = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^*},$$

где a — амплитуда s -рассеяния примесных атомов на атомах конденсата в борновском приближении; m^* — приведенная масса указанных атомов. Свойства разреженного газа ($na^3 \ll 1$) при низких температурах полностью определяются амплитудой s -рассеяния независимо от свойств потенциала V . Тогда под величиной a можно

понимать точную амплитуду s -рассеяния. Функция ψ_0 определяется уравнением Гросса–Питаевского, описывающего динамику неоднородного разреженного бозе-газа при нуле температур. Модуль ψ_0 и градиент ее фазы имеют ясный классический смысл:

$$\psi_0 = |\psi_0| \exp(i\Phi), n(\mathbf{r}, t) \approx n_0(\mathbf{r}, t) = |\psi_0|^2,$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{M} \nabla \Phi,$$

где n и \mathbf{v} есть число атомов среды в единице объема и их скорость, M — масса атомов среды.

При малом изменении объема критическая температура T_c начала конденсации меняется на величину

$$\delta T_c = -\frac{2}{3} T_c \frac{\delta V}{V} = -\frac{2}{3} T_c S p \xi,$$

$$T_c = 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V \xi_R(3/2)} \right)^{2/3}. \quad (1.3)$$

Средняя энергия, приходящаяся на одну частицу, холодного газа при температуре ниже критической $T < T_c$

$$\varepsilon(T) = \frac{3 \xi_R(5/2) T^{5/2}}{2 \xi_r(3/2) T_c^{3/2}}, \quad (1.4)$$

при изменении объема меняется на величину

$$\delta \varepsilon = -\varepsilon(T) \frac{3 \delta T_c}{2 T_c} = \varepsilon(T) \frac{\delta V}{V} = \varepsilon(T) S p \xi.$$

Тогда $\sigma = \varepsilon(T)$. В изотропной среде деформационный потенциал $W_d = -\sigma S p \xi$ определяет оператор энергии взаимодействия атома с акустическими фононами:

$$W_d = - \sum_{\mathbf{q}} i\sigma \sqrt{\frac{\hbar|q|}{2mc_q N}} (b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^+) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Для налетающих атомов полевой оператор будет

$$\hat{\Psi} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}},$$

где $\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$.

Тогда оператор взаимодействия атомов с продольными фононами конденсата

$$\hat{H}_i = \int \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) W_d \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} F(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^+), \quad (1.6)$$

где

$$F(\mathbf{q}) = -i\sigma \sqrt{\frac{\hbar|q|}{2mc_q N}}.$$

Существует три вида коллективных возбуждений, которые могут появиться в среде. Физическая природа этих возбуждений зависит от иерархии трех длин: длины λ_{exc} волны возбуждения, радиуса ξ действия межатомного потенциала, определяемого плотностью n_0 конденсата как $\xi = (8\pi n_0)^{-1/2}$, и длины l_{free} свободного пробега между столкновениями, порождающими коллективные возбуждения конденсата и надконденсатной фракции. Бесстолкновительный режим, определяемый соотношением $\lambda_{\text{exc}} \ll l_{\text{free}}$ (или $\omega r \gg 1$, где ω — частота возбуждения и τ — время столкновения) реализуется при нулевой температуре и для низкой плотности надконденсатного облака. Свободные квазичастичные возбуждения, известные в коротковолновом пределе ($\lambda_{\text{exc}} \ll \xi$) как боголюбовский звук, или нулевой звук, получены также и в длинноволновом диапазоне ($\lambda_{\text{exc}} \gg \xi$) [33]. Для возбуждений, где λ_{exc} сравнима с размерами рассеивателей, последнее условие означает режим Томаса–Ферми [29]. Эксперименты проводились как для предела Боголюбова (ноль-звук) [34], так и для промежуточного случая [35]. Для более высоких плотностей нормальной (БЭК) компоненты, когда $\lambda_{\text{exc}} \gg l_{\text{free}}$; ($\omega \tau \ll 1$), коллективные возбуждения приобретают гидродинамический характер [33].

Пусть начальное состояние системы — налетающий атом + среда описывается волновой функцией $|n, \mathbf{p}\rangle$, где n — набор квантовых чисел атомов среды в начальном состоянии, $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ есть импульс атома, \mathbf{k} — его волновой вектор. Конечное состояние всей системы описывается волновой функцией $|m, \mathbf{p} - \hbar \mathbf{Q}\rangle$, где $\hbar \mathbf{Q} = \hbar \mathbf{q}_e + \hbar \mathbf{q}_i$ — полный переданный среде импульс, являющийся суммой упруго и неупруго переданного импульса соответственно.

Вероятность перехода в единицу времени из одного состояния системы в другое при условии передачи среде импульса $\hbar \mathbf{Q}$ от налетающего атома и переходом среды из состояния n в состояние m имеет вид [22,31,32]

$$\frac{dw(\mathbf{Q}, \omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{Q}}} = m \frac{N}{V} \frac{\sqrt{p^2/2m - \hbar\omega}}{(2\pi\hbar)^3} |a(\mathbf{Q})|^2$$

$$\times \sum_{\mathbf{q}_i} w_i(q_i, \omega) \left| \frac{1}{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}_i} - \hbar\omega - i\gamma} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{Q}+\hbar\mathbf{q}_i} - i\gamma} \right|^2, \quad (1.7)$$

где m — масса примесного атома, $w_i(\mathbf{q}, \omega)$ — вероятность испускания фонона частотой ω и с волновым вектором \mathbf{q}_i в единицу времени в однородной среде конденсата и без учета взаимодействия с атомами надконденсатной фракции. Эта вероятность пропорциональна $w_i(\mathbf{q}_i, \omega) \sim T_i(mn, \mathbf{q}_i) T_i^*(mn, \mathbf{q}_i) = T_i(\mathbf{q}_i) T_i^*(\mathbf{q}_i)$. $d\Omega_{\mathbf{Q}}$ есть элемент телесного угла, в пределах которого рассеянный в среде примесный атом покидает ее. Первое слагаемое под знаком модуля описывает состояние системы после процесса испускания фонона и перед актом

рассеяния на атоме, второе — обратную последовательность событий. Здесь проведено усреднение входящей сюда функции Грина \hat{G}_a по положению хаотически расположенных рассеивающих центров в надконденсатной фракции и выполнен переход в p -представление [22,31]. $a(\mathbf{Q} - \mathbf{q}_i)$ — точная амплитуда упругого рассеяния примесного атома на одном атоме среды, N — число атомов надконденсатной фракции в ловушке. Поскольку $Q \gg q_i$, можно считать множитель $|a(\mathbf{Q} - \mathbf{q}_i)|^2 = |a(\mathbf{Q})|^2$. Перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw(\mathbf{Q}, \omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{Q}}} &= \sqrt{m/2} \frac{N}{V} \frac{p}{(2\pi\hbar)^3} |a(\mathbf{Q})|^2 \\ &\times \sum_{\mathbf{q}_i} w_i(\mathbf{q}_i, \omega) \left| \frac{1}{\hbar\mathbf{q}_i\mathbf{v} - \hbar\omega - (\hbar\mathbf{q}_i)^2/2m - i\hbar\gamma} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hbar\omega - \hbar\mathbf{q}_i\mathbf{v}' - (\hbar\mathbf{q}_i)^2/2m - i\hbar\gamma} \right|^2, \quad (1.8) \end{aligned}$$

здесь \mathbf{v} — начальная скорость атома, $\mathbf{v}' = (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{Q})/m$ — скорость в конечном состоянии. Особый интерес вызывает зависимость фактора $\mathfrak{U}(\omega, \chi)$ от угла χ рассеяния атома

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(\omega, \chi) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \\ &\times \sum_{\mathbf{q}_i} w_i(\mathbf{q}_i, \omega) \left| \frac{1}{\hbar\mathbf{q}_i\mathbf{v} - \hbar\omega - (\hbar\mathbf{q}_i)^2/2m - i\hbar\gamma} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hbar\omega - \hbar\mathbf{q}_i\mathbf{v}' - (\hbar\mathbf{q}_i)^2/2m - i\hbar\gamma} \right|^2. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Переходя от суммирования к интегрированию, запишем

$$\mathfrak{U}(\omega, \chi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\omega} dq_i q_i^2 w_i(\mathbf{q}_i, \omega) \mathfrak{J}(\mathbf{q}_i, \omega, \chi), \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\mathbf{q}_i, \omega, \chi) &= \int d\Omega_{\mathbf{q}_i} \left| \frac{1}{\mathbf{v}\mathbf{q}_i\hbar - \hbar\omega - (\hbar\mathbf{q}_i)^2/2m - i\hbar\gamma} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hbar\omega - \mathbf{v}'\mathbf{q}_i\hbar - \hbar^2q_i^2/2m - i\hbar\gamma} \right|^2. \quad (1.11) \end{aligned}$$

В обычной слабой локализации и в слабой локализации нового типа интерференция электронных волн описывается так называемыми кроссдиаграммами (или максимально перекрестными диаграммами). Но в отличие от обычной слабой локализации в случае новой одна из пересекающихся линий будет соответствовать неупругому взаимодействию, тогда как другая отвечает упругому взаимодействию со случайно расположенными сильными центрами [23].

На рис. 1 показаны две возможные лестничные диаграммы, описывающие марковский процесс последовательного упругого и неупругого рассеяния соответственно. Штриховая линия — упругий процесс, а

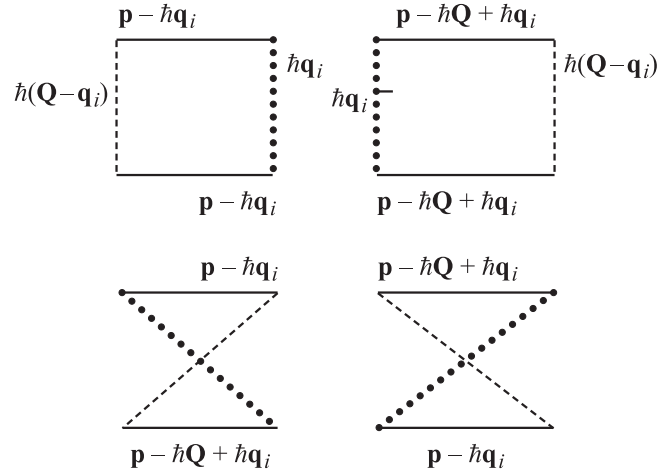


Рис. 1. Диаграммы рассеяния.

точечная — неупругий. Две возможные перекрестные диаграммы изображают собственно процесс квантовой интерференции, при котором последующее столкновение начинается раньше, чем окончится предыдущее. Перекрестные диаграммы вместе с лестничными дают вклад в указанный угловой фактор (1.10) вероятности рассеяния. (1.11) перепишем в компактном виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(q_i, \omega, \chi) &= \hbar^2 \int d\Omega_{\mathbf{q}_i} \left| G(\mathbf{k} - \mathbf{q}_i, E_k - \hbar\omega) \right. \\ &\left. + G(\mathbf{k} - \mathbf{Q} + \mathbf{q}_i, E_k) \right|^2. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Здесь $G(\mathbf{k} - \mathbf{q}_i, E_k - \hbar\omega)$ и $G(\mathbf{k} - \mathbf{Q} + \mathbf{q}_i, E_k)$ — функции Грина рассеивающегося атома, $E_k, \hbar\mathbf{k}$ — его начальные значения энергии и импульса соответственно.

Выражение (1.3) содержит три слагаемых. Квадрат модуля первой функции Грина дает вклад диаграммы лестничного типа и описывает процесс, в котором первое столкновение является неупругим. Квадрат абсолютной величины второй функции Грина соответствует лестничной диаграмме, описывающей процесс, в котором неупругое столкновение является последним. В обоих случаях выражения независимы от угла рассеяния налетающей частицы $\chi = \arccos(\mathbf{v}\mathbf{v}'/vv')$. Имеется также третий член, содержащий произведение первой и второй функций Грина. Он соответствует перекрестной диаграмме и описывает интерференцию двух атомных волн, которые распространяются по одному и тому же пути, но в противоположных направлениях. Интегрирование по направлениям распространения возбуждения не уничтожает зависимость от угла рассеяния, которая и описывает слабую локализацию. Запишем квадрат абсолютной величины первой функции Грина, входящей в (1.12) с учетом малости параметра γ в виде

$$\left| \frac{1}{E_k - E_{k'} - \hbar\omega - i\hbar\gamma} \right|^2 \simeq \frac{\pi}{\hbar\gamma} \delta(E_k - E_{k'} - \hbar\omega). \quad (1.13)$$

интерференцией. Указанная диаграмма позволяет вычислить все необходимые угловые соотношения, выполнение которых обеспечивает существование и реализацию процесса слабой локализации нового типа. Так, из этой схемы можно видеть, что существует два возможных угла χ рассеяния между начальным и конечным состоянием атома. Первый угол соответствует процессу передачи малого импульса при неупругом акте рассеяния, второй — при большом неупругом импульсе. Первый случай соответствует реально поставленной задаче последовательного описания такого процесса рассеяния, в котором рассеяние на больший угол обусловлено только упругими столкновениями. Однако, как можно видеть из приведенной диаграммы, не исключен и процесс с малой потерей энергии примесным атомом, но большим переданным импульсом при неупругом столкновении.

Итак, для первого случая, когда переданный неупругий импульс мал, угол рассеяния можно записать

$$\chi = \arcsin\left(\frac{q}{2k}\right) + \arcsin\left(\frac{q}{2k'}\right),$$

$$q_i = \sqrt{k^2 - (q_e/2)^2} - \sqrt{k'^2 - (q_e/2)^2}, \quad (1.20)$$

тогда получим

$$q_e^2 = \frac{(2kk' \sin \chi)^2}{k^2 + k'^2 + 2kk' \cos \chi}, \quad (1.21)$$

$$q_i = \frac{2m\omega}{\hbar \sqrt{k^2 + k'^2 + 2kk' \cos \chi}}.$$

Видно

$$\cos \chi = -\frac{k^2 + k'^2}{2kk'} + \frac{2\omega^2}{vv'q_i^2}, \quad (1.22)$$

что угол рассеяния при слабой локализации меняется в зависимости от величины переданного импульса при неупругом рассеянии.

Если $k - k' \ll k$, тогда

$$\cos \chi = -1 + \frac{2\omega^2}{v^2 q_i^2}, \Rightarrow \cos \frac{\chi}{2} = \frac{\omega}{v q_i}. \quad (1.23)$$

Второе решение, соответствующее большим значениям неупругого переданного импульса, в условиях поставленной задачи не имеет физического смысла и потому должно быть отброшено. Существует предельное допустимое значение для величины передаваемого упругого импульса $\hbar q_e$ при заданном типе потери энергии при неупругом рассеянии. Из диаграммы видно, что длина вектора q_e не может превышать диаметра внутренней окружности, или иными словами, удвоенной длины вектора k' . Это в свою очередь ограничивает величину угла рассеяния, при котором реализуется явление слабой локализации нового типа. Этот угол равен

$$\chi_0 = \pi - \arccos\left(1 - \frac{\hbar\omega}{2E}\right). \quad (1.24)$$

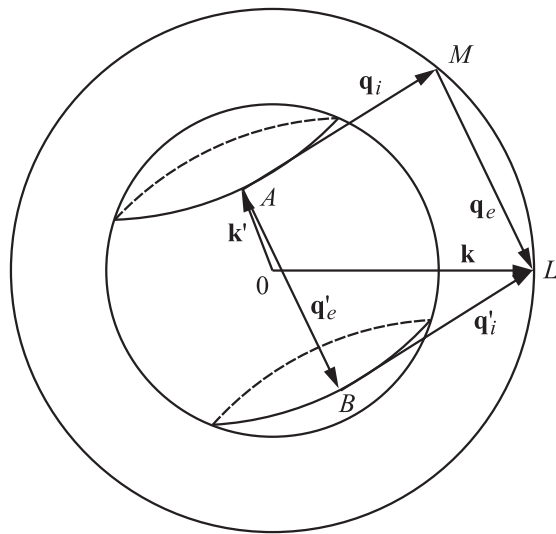


Рис. 3. Трехмерная кинематическая диаграмма.

Поэтому и для неупруго переданного импульса мы получаем предельное значение

$$q_{i0} = k \sin \chi_0 = \sqrt{2m\omega/\hbar}. \quad (1.25)$$

Новый тип слабой локализации имеет место, если $q_i < q_0$.

Таким образом, мы можем определить разброс для углов рассеяния в случае слабой локализации нового типа при различных механизмах потери энергии. Если возбуждается первый звук надконденсатной фракции и его волновое число лежит в пределах

$$\frac{\omega_I}{v} < q_i < \frac{\omega_I}{v_I},$$

когерентные явления при атомном рассеянии реализуются при

$$0 < \chi < 2 \arccos(v_I/v). \quad (1.26)$$

Для второго звука, ограниченного пределами конденсата, имеем аналогичные соотношения:

$$\frac{\omega_{II}}{v} < q_i < \frac{\omega_{II}}{v_{II}}, \quad \text{и} \quad 0 < \chi < 2 \arccos(v_{II}/v).$$

До сих пор мы полагали, что все вектора лежат в одной плоскости. Однако вектор неупругого рассеяния перпендикулярный вектору упругого рассеяния, не обязательно должен лежать в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{q}_e . Если вектора \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_e , \mathbf{q}'_i , \mathbf{q}'_e , \mathbf{k} , \mathbf{k}' располагаются так, как это показано на рис. 3, то комплементарные процессы приведут к конструктивной интерференции.

На рис. 3 вектора \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_e , \mathbf{q}'_i , \mathbf{q}'_e , \mathbf{k} , \mathbf{k}' обозначают то же, что и на рис. 2, окружности на внутренней сфере показывают возможное местоположение начала и конца вектора q_e . Для угла рассеяния мы теперь имеем соот-

ношение:

$$\cos \chi = -1 + \frac{1}{8[(2k/q_e)^2 - 1] \cos \phi} \left(\frac{\hbar\omega}{E} \right)^2, \quad (1.27)$$

где ϕ — азимутальный угол (в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k}) между векторами \mathbf{k}' и \mathbf{q}_e . Несмотря на то что кинематическая диаграмма теперь трехмерная, наши заключения касательно механизма интерференции и характера рассеяния примесных атомов и соответствующих угловых соотношений остаются в силе.

С уменьшением потерь энергии новый тип слабой локализации трансформируется в обычную слабую локализацию. Этот переход реально описывается, если принять во внимание малость вклада $\hbar\omega$ при $\omega \rightarrow 0$ по сравнению с вкладом $\hbar^2 q_i^2/2m$ в знаменателе функции Грина в выражении (1.12).

Проведем оценку ожидаемых углов рассеяния атомных пучков при взаимодействии с различными ультрахолодными атомными системами. Возьмем, например, параметры системы, приведенные в экспериментальных работах [29,30]. Здесь обсуждается поведение конденсата и надконденсатного облака, состоящего из атомов Na^{23} , охлажденного до температуры $1.7 \mu\text{K}$. Размеры конденсата L_{cond} колеблются от 200 до $360 \mu\text{m}$. Всего число охлаждаемых атомов $N \sim 80 \times 10^6$, в конденсате — $N_0 \sim 15 \times 10^6$. Газ, находящийся на магнитной ловушке, претерпевает следующие изменения: при указанной температуре начала конденсации характерные значения частот колебаний, продольной и радиальной, следующие: $\omega/2\pi = 16.93 \text{ Hz}$, $\omega_r/2\pi = 230 \text{ Hz}$; для атомов, находящихся на дне магнитной ловушки $\omega_0/2\pi = 20 \text{ kHz}$, тогда как для надконденсатного облака $\omega_{\text{evap}} \sim 1.75\omega_z/2\pi = 20 \text{ Hz}$, при этом при бесстолкновительном режиме $\omega_{\text{evap}} = 2\omega_z$, а в гидродинамическом — $\omega_{\text{evap}} = 1.55\omega_z$. Характерная скорость примесных атомов составляет $v_{\text{beam}} = 6 \text{ cm/s}$. Для указанной системы условия возникновения слабой локализации выполняются, длина волны атомов в пучке составляет $\lambda_p = 4.5 \times 10^{-6} \text{ cm}$, тогда как среднее расстояние между частицами в конденсате $l = L_{\text{cond}}/\sqrt[3]{N_0} \sim 7 \times 10^{-5} \text{ cm}$, так что $\lambda_p \ll l$. Воспользовавшись соотношением (1.23) получим характерные углы усиления рассеяния $\cos(\chi_0/2) = \frac{1}{v} \cdot \sqrt{\hbar\omega/2m}$. При рассеянии на атомах, находящихся на дне ямы $\chi_0 \sim 120^\circ$; при рассеянии на системе атомов, находящихся в начале конденсации, можно ожидать усиления рассеяния на угле $\chi_0 \approx 2 \times \arccos(0.08) \sim 170^\circ$ градусов. Рассеяние только на атомах надконденсатной фракции отвечает условиям обычной слабой локализации Андерсона из-за малой неупругости, при которой должно наблюдаться усиление обратного рассеяния атомов пучка. Здесь также следует вспомнить об энергетических критериях существования обсуждаемого эффекта, обусловленного величиной фактора $(E/\hbar\omega)$. С одной стороны, косинус характерного угла рассеяния в данных условиях равен $\cos(\chi_0/2) = \frac{1}{v} \cdot \sqrt{\hbar\omega/2m} = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar\omega/E}$, с другой — ширина пика есть $\gamma/\omega = (\lambda/l)(E/\hbar\omega)$, или иначе

$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{v}{2\omega l} \ll 1$. Таким образом, чем больше отношение $\hbar\omega/E$, тем более выраженным становится пик и тем большее отличие имеет характерный угол рассеяния от 180° .

$\hbar\omega/E \sim 0.4$	$\chi_0 \sim 143^\circ$
$\hbar\omega/E \sim 0.2$	$\chi_0 \sim 154^\circ$
$\hbar\omega/E \sim 0.1$	$\chi_0 \sim 162^\circ$
$\hbar\omega/E \sim 0.04$	$\chi_0 \sim 168^\circ$
$\hbar\omega/E \sim 0.02$	$\chi_0 \sim 172^\circ$
$\hbar\omega/E \sim 0.002$	$\chi_0 \sim 177^\circ$

При этом степень усиления на указанных углах достигает от 50 до 75% по сравнению с фоновой частью. В случае пространственного (трехмерного) рассеяния соотношение (1.27) можно преобразовать к виду

$$\cos \chi = -1 + \frac{(\hbar\omega/E)^2}{8(1 - \hbar\omega/E) \cos \phi},$$

при этом $\cos \phi$ может меняться в пределах $[\frac{(\hbar\omega/E)^2}{8(1 - \hbar\omega/E)}, 1]$. В этом случае есть возможность наблюдать эффект усиления рассеяния на углах $\sim 90^\circ$.

Влияние неразличимости атомов на слабую локализацию

Электронный обмен также проявляет себя в поправках к сечению рассеяния как в упругом, так и в неупругом каналах, который не всегда легко учесть в рамках теории возмущений. Поэтому для учета подобных влияний требуется специальный вид теории возмущений, а именно обменная теория возмущений (ОТВ). В работе [36] расширяется область применения алгоритма ОТВ на случай интегрального уравнения Шредингера для функции Грина, которая содержит в себе также и межцентровые перестановки электронов по не ортогональным состояниям. При этом оказывается, что обмен существенно влияет на угловую зависимость при слабой локализации электронов [36].

В случае ситуации, когда примесными атомами, рассеивающимися на ультрахолодных атомных системах, являются атомы того же сорта, то возникает необходимость учета принципа неразличимости одинаковых частиц не только для атомов внутри конденсата, но также и для примесных. Учет этого принципа может отразиться как на степени усиления или ослабления эффекта слабой локализации, так и на появлении новых угловых зависимостей в рассеянии атомных пучков.

Получим функцию Грина с учетом обмена между состояниями атомов среды и пучка. При этом состоянии атомов внутри ловушки будем описывать упрощенной моделью — моделью трехмерного осциллятора с частотой $\omega_H = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$ [28]. Волновая функция, описывающая систему, состоящую из налетающего свободного

атома и связанного атома в ловушке, с учетом принципа неразличимости, может быть записана в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbb{N}\psi_a(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})\psi_p(\mathbf{r}_2) \pm \psi_a(\mathbf{r}_a - \mathbf{R})\psi_p(\mathbf{r}_1), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbb{N} = \left[2 \left(1 \pm |\langle \psi_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}) | \psi_p(\mathbf{r}) \rangle|^2 \right) \right]^{-1/2},$$

ψ_a — одночастичная волновая функция связанного атома представляет собой не плоскую волну, как в случае свободных частиц, а волновую функцию основного состояния трехмерного осциллятора, ψ_p — волновая функция налетающего атома \mathbf{R} — геометрический радиус-вектор центра ловушки.

Волновая функция (2.1) может быть представлена в виде разложения по ортогональным состояниям m связанного атома

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_m f_m(\mathbf{r}_2)\psi_{am}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}).$$

Коэффициенты разложения, являющиеся функциями налетающего атома:

$$f_m(\mathbf{r}_2) = \mathbb{N} \left[\langle \psi_{am}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) | \psi_a(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) \rangle \psi_p(\mathbf{r}_2) \pm \langle \psi_{am}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) | \psi_p(\mathbf{r}_1) \rangle \psi_a(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) \right]. \quad (2.3)$$

Здесь

$$\psi_p = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar],$$

$$\psi_a = A \exp(-\alpha r^2).$$

Тогда

$$f_0 = \mathbb{N}(2\pi\hbar)^{-3/2} \times \left[\exp\left(\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \pm \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \exp\left(\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} - \alpha|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2\right) \right]. \quad (2.4)$$

В этом выражении второе слагаемое описывает обменный вклад и одночастичную функцию. Тогда одночастичная функция Грина с учетом принципа неразличимости, может быть записана следующим образом:

$$G_{\text{exc}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_p \frac{f_0(\mathbf{r})f_0^*(\mathbf{r}')}{E - E_p + i\hbar\gamma}$$

$$= \frac{\mathbb{N}^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_p \left\{ \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\hbar)}{E - E_p + i\hbar\gamma} \pm \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \right.$$

$$\times \left\{ \frac{\exp[i(\mathbf{p}/\hbar) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \alpha|\mathbf{r}' - \mathbf{R}|^2]}{E - E_p + i\hbar\gamma} \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\exp[i(\mathbf{p}/\hbar) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{R}) - \alpha|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2]}{E - E_p + i\hbar\gamma} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 e^{-\frac{p^2}{2\alpha}} \frac{\exp[-\alpha(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}|^2)]}{E - E_p + i\hbar\gamma} \right\}. \quad (2.5)$$

После усреднения по положению случайно распределенных в пространстве центров получим

$$\overline{G_{\text{exc}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \overline{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \pm \overline{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \overline{G_{aa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, \quad (2.6)$$

где Фурье-образ G тот же, что и в (1.3) без учета обмена, Фурье-образ G_1

$$G_1(\mathbf{p}) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 e^{-\frac{p^2}{2\alpha}} \frac{1}{(E - E_p + i\hbar\gamma)} \quad (2.7)$$

— слагаемое, учитывающее обменные эффекты. Третье слагаемое в (2.6) малоинтересно, поскольку описывает процесс движения атома, который начинается и заканчивается в ловушке.

Тогда вместо (1.12) будем иметь следующее выражение для вклада в сечение рассеяния:

$$\mathfrak{J} = \hbar^2 \int d\Omega_{\mathbf{q}} | [G(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) \pm G_1(\mathbf{p}' + \mathbf{q})] + [G_0(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \pm G_1(\mathbf{p} - \mathbf{q})] |^2. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) можно переписать следующим образом:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \pm \mathfrak{J}_{01} + \mathfrak{J}_{11}, \quad (2.9)$$

где \mathfrak{J}_0 — представляет собой уже описанный вклад (1.12), \mathfrak{J}_{01} — содержит обменные поправки, обусловленные неразличимостью атомов пучка и конденсата в зависимости от их полного спина, \mathfrak{J}_{11} — учитывает неразличимость атомов внутри конденсата, что не оказывает влияние на процесс рассеяния.

Рассмотрим последнее выражение более подробно. Знак второго слагаемого зависит от полного спина системы из налетающего атома и атома, принадлежащего ловушке. Однако предполагается, что пучок атомов не является спин-поляризованным. Поэтому следует провести усреднение по полному спину системы свободный+связанный атом. Введем, как и в [37], проекционный оператор \hat{P} таким образом, чтобы, действуя на симметричную спиновую функцию пары бозонов со спином $j = 1$, он имел собственное значение $+1$, а на антисимметричную спиновую функцию — -1 . Такой оператор имеет вид [38]

$$\hat{P}_{11} = \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 + (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - 1. \quad (2.10)$$

Проведем статистическое усреднение указанного оператора с учетом статистических факторов состояний с полным спином $\sigma = 2$, $\langle \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 \rangle = 1$, $g_2 = 5$; $\sigma = 1$, $g_1 = 3$ ($\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 = -1$ и $\sigma = 0$, $g_0 = 1$, $\langle \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 \rangle = -2$; $\Sigma = g_2 + g_1 + g_0 = 9$. Поскольку $\langle \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 \rangle = \frac{1}{\Sigma} \{g_0(-2) + g_1(-1) + g_2(1)\} = 0$, $\langle (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 \rangle = \frac{1}{\Sigma} \{g_0(4) + g_1(1) + g_2(1)\} = \frac{4}{3}$, то после спинового усреднения выражение (2.9) будет выглядеть следующим образом:

$$\langle \mathfrak{J} \rangle = \mathfrak{J}_0 + \frac{1}{3} \mathfrak{J}_{01} + \mathfrak{J}_{11}. \quad (2.11)$$

Для частиц со спином $j = 2$ аналогичная процедура усреднения приводит к выражению

$$\langle \mathfrak{J} \rangle = \mathfrak{J}_0 + \frac{11}{5} \mathfrak{J}_{01} + \mathfrak{J}_{11}. \quad (2.11a)$$

При этом был использован оператор [38]

$$\hat{P}_{22} = \frac{1}{36} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^4 + \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^3 - \frac{13}{36} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - \frac{5}{2} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2) - 1,$$

имеющий собственные значения ± 1 при соответствующих симметричном и антисимметричном состоянии спиновых функций.

Вклад обменных эффектов в явление слабой локализации математически осуществляется через слагаемое \mathfrak{J}_{01} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{0,1} = & \hbar^2 \int d\Omega_{\mathbf{q}} \left[G^*(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) G_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right. \\ & + G_1^*(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) G(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + G_1^*(\mathbf{p} - \mathbf{q}) G(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) \\ & + G^*(\mathbf{p} - \mathbf{q}) G_1(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) + G^*(\mathbf{p} - \mathbf{q}) G_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ & + G_1^*(\mathbf{p} - \mathbf{q}) G(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + G_1^*(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) G(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) \\ & \left. + G^*(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) G_1(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) \right]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

В этом выражении только первые четыре члена дают вклад в слабую локализацию, остальные составляют фон, существующий при когерентном рассеянии. Это происходит потому, что только в указанных слагаемых сохраняются угловые зависимости между вектором \mathbf{p} импульса начального состояния и вектором \mathbf{p}' конечного состояния. Аналитический расчет дает следующее выражение:

$$\mathfrak{J}_{01} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^6 e^{-\frac{p^2}{\alpha}} \mathfrak{J}_0. \quad (2.13)$$

Таким образом в отличие от электронных пучков, рассеивающихся на системе водородоподобных атомов, учет принципа неразличимости не приводит к дополнительной угловой зависимости, разрушающей новую слабую локализацию, а напротив приводит к усилению (на 10%) рассеяния в рассмотренном диапазоне углов.

Заключение

Теоретически рассмотрен новый эффект при рассеянии пучков холодных атомов на ультрахолодных неупорядоченных средах, какими являются атомные газы в ловушках в состоянии конденсации. Термин „неупорядоченный“ относится к пространственному распределению атомов конденсата, как точечных рассеивающих центров, положение которых является неопределенным в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга для переменных координата–импульс. Причем пространственная неопределенность в положении рассеивающих центров соответствует собственно размаху конденсаторного облака.

Рассмотрение эффекта рассеяния пучка охлажденных атомов на ультрахолодной атомной системе в условиях слабой локализации проводится впервые. Поэтому следует отметить то обстоятельство, что для существующих ныне условий эксперимента можно идентифицировать указанный эффект усиления интенсивности рассеяния конденсатом Бозе по существованию относительно острых пиков на характерных углах, лежащих в диапазоне $120^\circ \div 170^\circ$, в зависимости от свойств атомной среды, наряду с усилением обратного ($\chi = 180^\circ$) рассеяния пучка только надконденсатной фракцией. В работе [23] делается утверждение относительно универсальности проявления эффекта новой слабой локализации электронных пучков независимо от характера неупорядоченной среды. Мы показали, что указанное когерентное явление должно иметь место также в конденсате Бозе–Эйнштейна. Но в отличие от электронной системы, указанные пики остаются довольно острыми из-за относительно небольшой величины фактора $E/\hbar\omega$. Более того принцип неразличимости одинаковых частиц в случае, когда сорт атомов пучка совпадает с сортом атомов, составляющих рассеивающую среду, не только не оказывает разрушительного действия на явление слабой локализации нового типа, а усиливает его до 10%, тем самым обеспечивая существование упомянутого явления в чистом виде. Различие в характерных углах рассеяния конденсатом и надконденсатной фракцией явилось бы хорошей диагностикой для определения наличия конденсата в ультрахолодной системе.

В заключение мы выражаем свою признательность консулу Австралии в Санкт-Петербурге господину С.К. Зиновьеву-Фицлайон (Mr. Sebastian Zinovieff-FitzLyon) за оказанное внимание и поддержку данных исследований.

Список литературы

- [1] Lee P.A. and Ramakrishnan T.V. // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. N 2. P. 287–337.
- [2] Bergmann G. // Phys. Rev. 1984. Vol. 107. N 1. P. 1–58.
- [3] Rammer J. // Rev. Mod. Phys. 1991. Vol. 63. N 4. P. 781–817.
- [4] Kramer B., MacKinnon A. // Rep. Prog. Phys. 1993. Vol. 56. N 10. P. 1469.
- [5] Aronov A. // Phys. Scr. 1993. Vol. 49. N 1. P. 28–33.
- [6] Van der Mark M.B., Van Albada M.P., and Lapendijk A. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37. N 7. P. 3575–3592.
- [7] Kravzov Y.A. // Rep. Prog. Phys. 1992. Vol. 55. P. 39–51.
- [8] Kaveh M. // Physica B. 1991. Vol. 175. N 5. P. 1–5.
- [9] Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media. // Ed. By P. Sheng. Singapore World Scientific. 1990.
- [10] Anderson P.W. // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. N 5. P. 1492–1505.
- [11] Tsang L., Ishimaru A.J. // Opt. Soc. Amer. A. 1982. Vol. 2. P. 1331–1336.
- [12] Bergmann G. // Phys. Rev. B. 1983. Vol. 28. N 6. P. 2914–2925.
- [13] Berkovits R., Kaveh M. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37. N 1. P. 584–587.

- [14] *Igarashi J.* // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 35. N 16. P. 8894–8897.
- [15] *Washburn S., Webb R.A.* // Adv. Phys. 1986. Vol. 35. N 4. P. 375–422.
- [16] *Kanwenholven L.P., Hekking F.W.J., Van Wees B.J., Harmans C.J.P.M., Timmerling C.E., Foxon C.T.* // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. N 3. P. 361–364.
- [17] *Maschke K., Schreiber M.* // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44. N 8. P. 3835–3841.
- [18] *Канцинер Е.А.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. № 5. С. 1800–1828.
- [19] *Bergmann G., Yao Zou W.W., Mueller R.M.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 41. N 11. P. 7387–7396.
- [20] *Anderson P.W.* // Philos. Mag. B. 1985. Vol. 52. N 3. P. 505–509.
- [21] *Tsang L., Ishimaru J.* // Opt. Soc. Amer. 1984. Vol. 1. N 8. P. 836–839.
- [22] *Либенсон Б.Н., Платонов К.Ю., Румянцев В.В.* // ЖЭТФ. 1992. Т. 101. В. 2. С. 614–628.
- [23] *Rumyantsev V.V., Doubov V.V.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49. N 13. P. 8643–8655.
- [24] *Labeyrie G., De Tomasi F., Bernard J.-C., Muller C.A., Miniatura C., Kaiser R.* // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. N 25. P. 5266–5269.
- [25] *Jonckheere T., Muller C.A., Kaiser R., Miniatura Ch., Delande D.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 4269.
- [26] *Lenke R. and Maret G.* // Eur. Phys. J. B. 2000. Vol. 17. P. 171.
- [27] *Kupriyanov D.V., Sokolov I.M., Kalatunga P., Sukenik C.I., Havey M.D.* // Phys. Rev. 2003. Vol. A 67. N 7. 013814.
- [28] *Путаевский Л.П.* // УФН. 1998. Т. 168. № 2. С. 641.
- [29] *Stamper-Kurn D.M., Miesner H.-J., Inouye S., Andrews M.R., Ketterle W.* // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. N 15. P. 2876–2879.
- [30] *Chikkatur A.P., Görlitz A., Stamper-Kurn D.M., Inouye S., Gupta S., Ketterle W.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. N 3. P. 483–486.
- [31] *Rumyantsev V.V., Orlenko E.V., Libenson B.N.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 1001–1015.
- [32] *Rumyantsev V.V., Orlenko E.V., Libenson B.N.* // Z. Phys. B. 1997. Vol. 103. P. 53–60.
- [33] *Griffin A. and Zaremba E.* // Phys. Rev. A. 1997. Vol. 56. N 6. P. 4839–4844.
- [34] *Mewes M.-O.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. N 6. P. 988–991.
- [35] *Jin D.S., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., Cornell E.A.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. N 3. P. 420–423.
- [36] *Orlenko E.V. and Rumyantsev V.V.* // J. Phys.: Condens. Matter. 1995. Vol. 7. N 7. P. 3557.
- [37] *Орленко Е., Мазец И., Матисов Б.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 1. С. 30–41.
- [38] *Орленко Е., Матисов Б.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. № 1. С. 19–29.