

01;10

Одночастичный эффект Черенкова в ограниченной области пространства

© И.Н. Карташов,¹ М.В. Кузелев,¹ А.А. Рухадзе²¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия²Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия
e-mail: kartashov@ph-elec.phys.msu.su

(Поступило в Редакцию 21 июня 2005 г.)

В линейном приближении рассмотрена задача развития пучковой неустойчивости, основанной на одночастичном эффекте Черенкова в ограниченной области пространства. Получены пороговые условия возникновения и инкременты развития конвективной и абсолютной неустойчивостей для различных продольных мод колебаний с учетом отражений от границ системы.

PACS: 41.60.Bq

1. Основные уравнения и постановка задачи

Одночастичный и коллективный эффекты Черенкова являются фундаментальными механизмами вынужденного излучения электронных пучков в средах с замедленными волнами. Физическая природа эффектов подробно рассмотрена в обзорах [1,2]. Линейная теория коллективного эффекта Черенкова, развивающегося в ограниченной области пространства (резонаторе), изложена в работе [3]. Математически такая теория сводится к решению задачи на собственные значения для однородной дифференциальной системы второго порядка. По классификации электродинамики плазмы и плазмоподобных сред коллективный эффект Черенкова относится к взаимодействиям волна–волна [4]. Настоящая работа посвящена линейной теории одночастичного эффекта Черенкова в системе конечной длины. Как известно, одночастичный эффект принадлежит к взаимодействиям типа волна–частица. В математическом плане линейная теория одночастичного эффекта в ограниченной области пространства сводится к решению нестационарной краевой дифференциальной задачи третьего порядка. Из-за более высокого порядка дифференциальной задачи теория одночастичного эффекта Черенкова оказывается существенно сложнее теории коллективного эффекта. Заметим, что в литературе по физике плазмы одночастичный и коллективный эффекты Черенкова часто рассматривают как разновидности резонансных пучковых неустойчивостей [5,6]. Применение методов и терминологии общей теории неустойчивостей, развитой в физике плазмы и родственных ей областях [7–9], при рассмотрении одночастичного эффекта Черенкова также весьма плодотворно, как и при исследовании коллективного эффекта, что будет показано в данной работе (см. также [3]). Следует отметить, что одночастичный эффект Черенкова давно известен и исследовался в вакуумной СВЧ-электронике. По терминологии этой области

физики теория одночастичного эффекта в конечных системах называется теорией ламп бегущей и обратной волн при малом (точнее, нулевом) высокочастотном пространственном заряде пучка. Чуть позже мы сошлемся на известные нам работы данного направления и укажем на существенные отличия нашего исследования.

Исходим из следующих уравнений, описывающих в линейном приближении взаимодействие прямолинейного электронного пучка с некоторой электродинамической системой волноводного типа [10]:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + G_b(\hat{\omega}, \hat{k}) \omega_b^2 \right) A_b = -\omega_b^2 S_b(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w,$$

$$\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w = -\omega_w^2 S_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_b. \quad (1)$$

Здесь $A_b(t, z)$ и $A_w(t, z)$ функции, характеризующие состояние электронного пучка и электродинамической системы соответственно; $D_w(\hat{\omega}, \hat{k})$ — дифференциальный оператор, описывающий динамику электродинамической системы; G_b , S_b и S_w — некоторые безразмерные операторы; ω_w — величина размерности частоты; ω_b — ленгмюровская частота электронов пучка. Система (1) предполагает, что электронный пучок движется со скоростью U вдоль электродинамической системы, ориентированной по оси OZ . Более подробная информация об уравнениях (1) имеется в [3,6,10]. Для определенности считаем, что $U > 0$.

Возможность резонансного взаимодействия электронного пучка с электродинамической системой означает, что у системы уравнений

$$(\omega - kU)^2 - G_b(\omega, k) \omega_b^2 = 0,$$

$$D_w(\omega, k) = 0, \quad (2)$$

где ω — частота, k — волновое число, имеется действительное решение: $k = k_0$, $\omega = \omega_0$. Учитывая только

резонансные взаимодействия электронного пучка и электродинамической системы, представим решение уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned} A_b(t, z) &= \tilde{A}_b(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \\ A_w(t, z) &= \tilde{A}_w(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \\ \left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial t} \right| &\ll |\omega_0 \tilde{A}_w|, \quad \left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} \right| \ll |k_0 \tilde{A}_w|. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{A}_w(t, z)$ — медленная амплитуда собственной волны электродинамической системы. Подставив (3) в (1), с учетом того, что $(\omega_0 - k_0 U)^2 - G_b(\omega_0, k_0) \omega_b^2 = 0$ и $D_w(\omega_0, k_0) = 0$, получим следующую систему уравнений для амплитуд $\tilde{A}_b(t, z)$ и $\tilde{A}_w(t, z)$ (знак „ \sim “ для краткости в дальнейшем опускаем):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 A_b \mp 2i \sqrt{G_b(\omega_0, k_0)} \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b \\ = -\omega_b^2 S_b(\omega_0, k_0) A_w, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) A_w = -i \omega_w^2 S_w(\omega_0, k_0) \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} A_b. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь V_g — групповая скорость волны в электродинамической системе, не возмущенной электронным пучком.

Уравнения (4), являясь весьма общими, описывают два предельных режима вынужденного излучения электронным пучком собственных волн электродинамической системы: режим коллективного эффекта Черенкова и режим одночастичного эффекта [1,2] (а также и режим, переходный между названными эффектами). В режиме одночастичного эффекта, который нас здесь только и интересует, выполнено неравенство

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b \right| \gg \left| \sqrt{G_b} \omega_b A_b \right|, \quad (5)$$

и уравнения (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 A_b &= -b^3 A_w, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) A_w &= -i A_b, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$b^3 = \omega_b^2 \omega_w^2 S_b S_w \left| \frac{\partial D_w}{\partial \omega} \right|^{-1} > 0 \quad (7)$$

параметр, содержащий всю информацию о конкретной физической природе рассматриваемой системы. Вывод уравнений (6) для различных вакуумных и плазменных систем можно найти в [6]. Основной физический смысл параметра b^3 состоит в том, что максимальный инкремент неустойчивости при одночастичном эффекте Черенкова равен $\omega'' = \text{Im } \omega = b \sqrt{3}/2$.

В данной работе одночастичный эффект Черенкова рассматривается в ограниченной области пространства $0 < z < L$. Поэтому необходим учет отражения излучаемой пучком электромагнитной волны от границ $z = 0$ и $z = L$. Обозначим через B_w амплитуду электромагнитной волны, распространяющейся навстречу излучаемой волне с амплитудой A_w . Считая, что волна B_w с электронным пучком не взаимодействует, запишем следующее очевидное уравнение для ее амплитуды

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) B_w = 0. \quad (8)$$

Уравнения (6), (8) должны быть дополнены условиями на амплитуды волн на границах $z = 0$ и $z = L$ — условия трансформации собственных волн на продольных границах системы. Эти условия существенно зависят от знака групповой скорости V_g . Если $V_g > 0$, то говорят о взаимодействии пучка с попутной волной электродинамической системы, случай $V_g < 0$ относится к взаимодействию со встречной волной. При $V_g > 0$ уравнения (6), (8) дополняются следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} A_b(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial A_b(t, 0)}{\partial z} = 0, \quad A_w(t, 0) = \kappa_1 B_w(t, 0), \\ B_w(t, L) = \kappa_2 A_w(t, L). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь κ_1 — коэффициент отражения электромагнитной волны от границы $z = 0$, а κ_2 — коэффициент отражения от границы $z = L$. Первое и второе условия в (9) означают, что на границу $z = 0$ электронный пучок приходит без возмущений. При $V_g < 0$ граничные условия имеют иной вид:

$$\begin{aligned} A_b(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial A_b(t, 0)}{\partial z} = 0, \quad B_w(t, 0) = \kappa_1 A_w(t, 0), \\ A_w(t, L) = \kappa_2 B_w(t, L). \end{aligned} \quad (10)$$

Решению граничных задач (6), (8), (9) и (6), (8), (10) посвящено дальнейшее рассмотрение.

2. Одночастичный эффект Черенкова на попутной волне ($V_g > 0$)

Рассмотрение начнем со случая $V_g > 0$, когда излучаемая волна распространяется в ту же сторону, что и пучок, т.е. возбуждения попутной волны в ограниченной области пространства. Представляя решения уравнений (6), (8) в экспоненциальной форме $\sim \exp(-i\omega t + ikz)$, получим следующие дисперсионные уравнения:

$$\begin{aligned} D_1(\omega, k) &\equiv (\omega - kU)^2 (\omega - kV_g) - b^3 = 0, \\ D_2(\omega, k) &\equiv (\omega + kV_g) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что входящие в уравнения (11) ω и k не являются „истинными“ частотой и волновым числом: в

соответствии с формулами (3) они определяют отклонения от резонансных значений ω_0 и k_0 .

Используя (11), запишем общее решение уравнений (6), (8) без общего множителя $\exp(-i\omega t)$ в виде

$$\begin{aligned} A_w(z) &= A \exp(ik_1(\omega)z) + B \exp(ik_2(\omega)z) \\ &\quad + C \exp(ik_3(\omega)z), \\ A_b(z) &= \frac{b^3}{(\omega - k_1U)^2} A \exp(ik_1(\omega)z) \\ &\quad + \frac{b^3}{(\omega - k_2U)^2} B \exp(ik_2(\omega)z) \\ &\quad + \frac{b^3}{(\omega - k_3U)^2} C \exp(ik_3(\omega)z), \quad (12) \\ B_w(z) &= D \exp(ik_4(\omega)z), \end{aligned}$$

где $k_{1,2,3}(\omega)$ — решения первого уравнения (11) относительно k , а $k_4 = -\omega/V_g$ — решение второго уравнения (11). Дифференцируя первое уравнение (11) по ω , находим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{1,2,3}}{\partial \omega}(\omega) &= \frac{k(U + 2V_g) - 3\omega}{3kUV_g - \omega(2U + V_g)}, \\ \frac{\partial k_{1,2,3}}{\partial \omega}(0) &= \frac{(U + 2V_g)}{3UV_g} \equiv W_g^{-1}. \quad (13) \end{aligned}$$

В некоторой вещественной области частот ω решения первого уравнения (11) являются комплексными, причем два из них комплексно-сопряженные. Поскольку при $U > 0$ и $V_g > 0$ волновые числа $k_{1,2,3}(\omega)$ принадлежат волнам, распространяющимся в положительном направлении оси OZ , то в рассматриваемой системе имеет место усиление колебаний [7–9]. При этом из (13) следует, что максимум усиления, т.е. максимум функций $|\operatorname{Im} k(\omega)|$, достигается при $\omega = 0$. В окрестности нулевой частоты решения первого дисперсионного уравнения (11) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{1,2,3}(\omega) &= k_{1,2,3}(0) + \omega \frac{\partial k_{1,2,3}}{\partial \omega}(0) = \delta_{1,2,3}\sigma + \frac{\omega}{W_g}, \\ \sigma &= \frac{b}{\sqrt[3]{U^2V_g}}, \quad \delta_{1,2,3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad -1. \quad (14) \end{aligned}$$

Используя (14), выпишем еще условие, при котором излучение пучка можно действительно считать одночастичным эффектом Черенкова. Для этого решения $k_{1,2,3}$ следует подставить в (5). В результате получится следующее неравенство:

$$b(U/V_g)^{1/3} \gg \sqrt{G_b\omega_b}, \quad (15)$$

означающее, что плотность электронного пучка должна быть достаточно малой ($b \sim \omega_b^{2/3}$).

Перейдем теперь к выводу характеристического уравнения для определения собственных частот ω рассматриваемой системы конечной длины. Подставив решения (12) в граничные условия (9) и использовав первое уравнение (11), получим следующую линейную однородную систему относительно постоянных A, B, C и D :

$$\begin{aligned} A + B + C &= \kappa_1 D, \\ k_1 A + k_2 B + k_3 C &= (\omega/V_g)\kappa_1 D, \\ k_1^2 A + k_2^2 B + k_3^2 C &= (\omega/V_g)^2 \kappa_1 D, \quad (16) \\ \exp(ik_1 L)A + \exp(ik_2 L)B + \exp(ik_3 L)C &= \kappa_2^{-1} \exp(ik_4 L)D. \end{aligned}$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$\left| \frac{\omega}{W_g} \right| \ll \sigma, \quad (17)$$

которое согласуется с формулами (14) и означает, что имеет место максимальное усиление одной из волн. Тогда правые части второго и третьего уравнений в (16) можно положить равными нулю. Из первых трех уравнений (16) имеем:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 \kappa_1 D, \quad \alpha_1 = \frac{k_2 k_3}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)}, \\ B &= \alpha_2 \kappa_1 D, \quad \alpha_2 = \frac{k_1 k_3}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)}, \quad (18) \\ C &= \alpha_3 \kappa_1 D, \quad \alpha_3 = \frac{k_2 k_1}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}. \end{aligned}$$

Исключив далее с помощью (18) из последнего уравнения (16) постоянные A, B, C и D , находим следующее характеристическое уравнение для определения собственных комплексных частот системы:

$$\begin{aligned} \exp(ik_4 L) &= \kappa_1 \kappa_2 [\alpha_1 \exp(ik_1 L) + \alpha_2 \exp(ik_2 L) \\ &\quad + \alpha_3 \exp(ik_3 L)]. \quad (19) \end{aligned}$$

При $b = 0$, т.е. когда электронного пучка нет, уравнение (19) сводится к следующему (предельный переход $b \rightarrow 0$ выводит за рамки неравенства (17) и применимости формул (14), поэтому должен совершаться не в (19), а в точной системе уравнений (16)):

$$\kappa_1 \kappa_2 \exp\left(2i \frac{\omega}{V_g} L\right) = 1. \quad (20)$$

Обозначая $\kappa_1 \kappa_2 = |\kappa_1 \kappa_2| \exp(-i\phi)$, из (20) имеем

$$\omega = -i \frac{V_g}{2L} \ln \frac{1}{|\kappa_1 \kappa_2|} + \phi \frac{V_g}{2L}. \quad (21)$$

Мнимая часть (21) является обычным декрементом затухания электромагнитных колебаний, „вытекающих“ из области $0 < z < L$ через полупрозрачные ($|\kappa_1 \kappa_2| < 1$) границы $z = 0$ и $z = L$.

Пусть $b \neq 0$ и выполнено неравенство (17). Тогда, подставив (14) в (18), получим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}. \quad (22)$$

Подставив далее (14) и (22) в (19), сведем уравнение для собственных частот к виду

$$\exp\left(-i \frac{\omega}{V_g} L\right) = \frac{1}{3} \kappa_1 \kappa_2 \left(\exp(i\delta_1 \sigma L) + \exp(i\delta_2 \sigma L) + \exp(i\delta_3 \sigma L) \right) \exp\left(i \frac{\omega}{W_g} L\right), \quad (23)$$

откуда для комплексной собственной частоты ω имеем выражение

$$\omega = \left(\frac{L}{V_g} + \frac{L}{W_g} \right)^{-1} \times \left[i \ln \left(\frac{1}{3} |\kappa_1 \kappa_2| \sum_{j=1}^3 \exp(i\delta_j \sigma L) \right) + \phi \right]. \quad (24)$$

Величина

$$W_g = \left(\frac{\partial k_{1,2}}{\partial \omega}(0) \right)^{-1} = \frac{3UV_g}{U + 2V_g}, \quad (25)$$

входящая в (24) и (13), в теории неустойчивостей называется групповой скоростью сноса волн при усилении [7–9]. Для одночастичного эффекта Черенкова выражение для нее было получено в [11].

В длинной системе, у которой

$$\sigma L \gg 1, \quad (26)$$

инкремент (24) принимает вид

$$\text{Im} \omega = \left(\frac{L}{V_g} + \frac{L}{W_g} \right)^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma L - \ln \frac{3}{|\kappa_1 \kappa_2|} \right). \quad (27)$$

Отсюда получаем стартовое условие

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma L > \ln \frac{3}{|\kappa_1 \kappa_2|} \quad (28)$$

развития неустойчивости (начала генерации волн) при одночастичном эффекте Черенкова на попутной волне в системе конечной длины.

Известно, что одночастичный эффект Черенкова на попутной волне является конвективной неустойчивостью, при которой любые конечные возмущения сносятся по движению пучка и в каждой фиксированной точке пространства при $t \rightarrow \infty$ затухают [7–9]. Наличие границ препятствует сносу возмущений, и при выполнении порогового условия (28) приводит к их нарастанию в любой точке z на отрезке $[0, L]$.

Следует отметить, что одночастичный эффект Черенкова представляет значительный интерес для многих

разделов физики, в том числе и СВЧ-электроники — вакуумной и плазменной. Так, одночастичный эффект Черенкова на попутной волне, при определенных условиях, лежит в основе работы усилителей (ламп) бегущей волны (ЛБВ) [12,13]. Неравенство (28) есть условие самовозбуждения усилителя, т. е. перехода в режим генерации. Плазменные генераторы бегущей волны на одночастичном вынужденном эффекте Черенкова рассмотрены в работах [10,14,15], где излагаются и результаты их успешной экспериментальной реализации.

Приведем здесь еще, следуя работе [11], иной метод вычисления комплексной собственной частоты (24), отличающийся простотой и общностью. Пусть на границе $z = 0$ амплитуда попутного электромагнитного поля меняется по закону

$$A_w(0, t) = \psi(t), \quad (29)$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. На границе $z = L$ имеем значение амплитуды $A_w(L, t)$. Через встречную волну B_w и условия отражения на границах $z = 0$ и $z = L$ функции $A_w(0, t)$ и $A_w(L, t)$ связаны уравнением обратной связи

$$A_w(0, t) = \kappa_1 \kappa_2 A_w \left(L, t - \frac{L}{V_g} \right). \quad (30)$$

Можно показать [6,11], что общее решение уравнений (6) с граничными условиями (29) и первыми двумя условиями (9) (т. е. в постановке граничной задачи) имеет вид

$$A_w(z, t) = \frac{1}{3} \psi \left(t - \frac{z}{W_g} \right) \sum_{j=1}^3 \exp(i\delta_j \sigma z). \quad (31)$$

Подставив (29) и (31) в соотношение (30), получим функциональное уравнение

$$\psi(t) = \frac{1}{3} \kappa_1 \kappa_2 \psi \left(t - \frac{L}{W_g} - \frac{L}{V_g} \right) \sum_{j=1}^3 \exp(i\delta_j \sigma L), \quad (32)$$

решение последнего имеет вид

$$\psi = \text{const} \cdot \exp(-i\omega t), \quad (33)$$

где ω совпадает (24).

3. Одночастичный эффект Черенкова на встречной волне ($V_g < 0$)

Перейдем теперь к случаю $V_g < 0$, когда излучаемая волна распространяется в сторону, противоположную направлению движения пучка, т. е. возбуждению встречной волны в ограниченной области пространства. Формулы (11), (12) справедливы и в этом случае, но с заменой V_g на $-V_g$, а вот простых приближенных выражений вида (14) недостаточно, в связи с чем теория одночастичного эффекта Черенкова на встречной волне

в ограниченной области пространства оказывается более сложной. Рассмотрим начнем с простого частного случая, когда граница $z = L$ абсолютно прозрачна для электромагнитного излучения. Подставив решение (12) в граничные условия (10) при $\kappa_2 = 0$, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}(\omega + k_1 V)A + (\omega + k_2 V)B + (\omega + k_3 V)C &= 0, \\ k_1(\omega + k_1 V)A + k_2(\omega + k_2 V)B + k_3(\omega + k_3 V)C &= 0, \quad (34) \\ A \exp(ik_1 L) + B \exp(ik_2 L) + C \exp(ik_3 L) &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $V = -V_g > 0$. Исключив далее из (34) постоянные A , B и C , находим следующее характеристическое уравнение для собственных частот:

$$\begin{aligned}(k_1 - k_2) \frac{\exp(ik_3 L)}{\omega + k_3 V} + (k_3 - k_1) \frac{\exp(ik_2 L)}{\omega + k_2 V} \\ + (k_2 - k_3) \frac{\exp(ik_1 L)}{\omega + k_1 V} = 0, \quad (35)\end{aligned}$$

справедливое при $\kappa_1 \kappa_2 = 0$, т.е. при нулевой (точнее, минимальной) добротности резонатора, в котором электронный пучок излучает встречную волну. Заметим, что в случае попутной волны при $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ из (27) при конечном L имеем $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$, что означает невозможность развития неустойчивости. Дело, как известно, в том, что пучковая неустойчивость на попутной волне является конвективной. Для этого в ограниченной системе необходимо конечное отражение от ее продольных границ. Неустойчивость пучка на встречной волне является абсолютной, она возможна и при полном отсутствии отражения. Тем не менее учет конечного отражения в теории пучковых неустойчивостей важен, поскольку в реальных условиях отражение не всегда удается сделать малым.

Для учета отражения электромагнитных волн от границ $z = 0, L$ подставим решение (12) в общие граничные условия (10). В результате получим систему

$$\begin{aligned}(\omega + k_1 V)A + (\omega + k_2 V)B + (\omega + k_3 V)C &= 0, \\ k_1(\omega + k_1 V)A + k_2(\omega + k_2 V)B + k_3(\omega + k_3 V)C &= 0, \\ D = \kappa_1(A + B + C), \quad (36) \\ A \exp(ik_1 L) + B \exp(ik_2 L) + C \exp(ik_3 L) \\ = \kappa_2 D \exp(ik_4 L).\end{aligned}$$

Исключив далее постоянную D , преобразуем систему (36) к виду

$$\begin{aligned}(\omega + k_1 V)A + (\omega + k_2 V)B + (\omega + k_3 V)C &= 0, \\ k_1(\omega + k_1 V)A + k_2(\omega + k_2 V)B + k_3(\omega + k_3 V)C &= 0, \quad (37) \\ A(\exp(ik_1 L) - \kappa_1 \kappa_2) + B(\exp(ik_2 L) - \kappa_1 \kappa_2) \\ + C(\exp(ik_3 L) - \kappa_1 \kappa_2) &= 0,\end{aligned}$$

где $k_{j4} = k_j - k_4$. Сравним теперь (37) с (34) и используя уравнение (35), сразу получим дисперсионное уравнение, описывающее одночастичный эффект Черенкова на встречной волне с учетом конечного отражения электромагнитных волн от продольных границ резонатора:

$$\begin{aligned}(k_1 - k_2) \frac{\exp(ik_3 L) - \kappa_1 \kappa_2}{\omega + k_3 V} + (k_3 - k_1) \frac{\exp(ik_2 L) - \kappa_1 \kappa_2}{\omega + k_2 V} \\ + (k_2 - k_3) \frac{\exp(ik_1 L) - \kappa_1 \kappa_2}{\omega + k_1 V} = 0. \quad (38)\end{aligned}$$

Несложно видеть, что уравнения (35) и (38) удовлетворяются тождественно в точках ветвления функций $k_{1,2,3}(\omega)$, т.е. при выполнении одного из следующих условий:

$$k_1(\omega) = k_2(\omega), \quad k_1(\omega) = k_3(\omega), \quad k_2(\omega) = k_3(\omega). \quad (39)$$

Однако при этом из второго выражения (12) и первых двух граничных условий (10) имеем, что $A_b(z) \equiv 0$, т.е. решение задачи является тривиальным. Тем не менее соотношения (39) имеют смысл: одна из точек ветвления лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω :

$$\omega \equiv \omega_0 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{3}{\sqrt[3]{4}} b \frac{(UV^2)^{1/3}}{(U+V)}. \quad (40)$$

Выражение (40) дает инкремент абсолютной пучковой неустойчивости в системе бесконечной длины. Этот же инкремент имеет в рассматриваемой системе и так называемая глобальная пучковая неустойчивость [7,8].

Рассмотрим в уравнении (38) предельный переход к нулевой плотности электронного пучка ($b \rightarrow 0$); анализируя уравнение (19), мы этот вопрос опустили. При малой плотности пучка решения первого уравнения (11) имеют вид

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{U} \pm \frac{b^{3/2}}{\sqrt{\omega U(U+V)}} \equiv \frac{\omega}{U} \pm \alpha b^{3/2}, \quad (41)$$

$$k_3 = -\frac{\omega}{V} + \frac{b^3 V_g}{\omega^2(U+V)^2} \equiv -\frac{\omega}{V} + \beta b^3, \quad k_4 = \frac{\omega}{V}.$$

Подставив (41) в (38), получим

$$\exp\left(-2i \frac{\omega}{V_g} L\right) - \kappa_1 \kappa_2 = O(b^3) \rightarrow 0, \quad (42)$$

решение которого в точности совпадает с приведенным ранее выражением (21).

Уравнения (35) и (38) возможно решить только численно, для этого введем безразмерные переменные

$$x = \frac{\omega}{b}, \quad y = \frac{kU}{b}, \quad \xi = \frac{bL}{U}, \quad v = \frac{V}{U}, \quad (43)$$

в которых (35) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}D(x) \equiv (y_1 - y_2) \frac{\exp(iy_3 \xi)}{x + vy_3} + (y_3 - y_1) \frac{\exp(iy_2 \xi)}{x + vy_2} \\ + (y_2 - y_3) \frac{\exp(iy_1 \xi)}{x + vy_1} = 0. \quad (44)\end{aligned}$$

Приведем еще в безразмерном виде общее характеристическое уравнение (38)

$$D(x) \equiv (y_1 - y_2) \frac{\exp(iy_{34}\xi) - \kappa_1\kappa_2}{x + \nu y_3} + (y_3 - y_1) \frac{\exp(iy_{24}\xi) - \kappa_1\kappa_2}{x + \nu y_2} + (y_2 - y_3) \frac{\exp(iy_{14}\xi) - \kappa_1\kappa_2}{x + \nu y_1} = 0, \quad (45)$$

где $y_{j4} = y_j - v^{-1}x$, $j = 1, 2, 3$.

Метод численного решения комплексных трансцендентных уравнений (44) и (45) заключается в следующем. Возьмем область X поиска неизвестной безразмерной частоты x такой: $X = \{-5 < \text{Re } x \leq 0, -1 < \text{Im } x < 1\}$. По известным формулам алгебры [16] находятся комплексные решения $y_{1,2,3}(x)$, далее вычисляются выражения $D(x)$ в (44) или (45). Одновременное обращение при каком-то x величин $\text{Re } D(x)$ и $\text{Im } D(x)$ в ноль — одновременная смена этими величинами знака — означает, что этот x есть искомая безразмерная комплексная частота. Важной особенностью решаемых уравнений является их инвариантность относительно перестановки номеров волновых чисел $y_{1,2,3}(x)$. Это означает, что не нужно контролировать возможные переходы между различными ветвями решений. Свободными параметрами задачи являются безразмерная длина ξ , отношение скоростей ν и коэффициенты отражения $\kappa_1\kappa_2$. Для уменьшения числа параметров положим $\nu = 1$, $\text{arg}(\kappa_1\kappa_2) = 0$. Ниже приводятся только те решения, которые в определенной области изменения параметра ξ имеют $\text{Im } x > 0$.

На рис. 1 представлены зависимости x от безразмерной длины системы $\xi = bL/U$, полученные для $\kappa_1\kappa_2 = 0$, когда отражение от границ резонатора отсутствует (ξ можно назвать также параметром плотности пучка). Имеется бесконечное множество продольных мод колебаний — основная ($n = 0$), первая ($n = 1$) и т.д., каждой из которых соответствует одна комплексная кривая $x_n(\xi) = \text{Re } x_n(\xi) + i\text{Im } x_n(\xi)$, расположенные в порядке слева направо. Номер продольной моды $n = 0, 1, 2, \dots$ определяет число узлов функции $A_w(z)$, см. (12), на интервале $(0, L)$. Для каждой продольной моды существует пороговое значение $\xi = \xi_{0n}$ такое, что при $\xi > \xi_{0n}$ имеем $\text{Im } x_n(\xi) > 0$, а если $\xi < \xi_{0n}$, то $\text{Im } x_n(\xi) < 0$. Следовательно, значение ξ_{0n} определяет порог развития неустойчивости, обусловленной одночастичным вынужденным эффектом Черенкова на встречной волне, в ограниченной области пространства. Действительные части частот, как видно из рис. 1, при всех ξ отрицательны. Последний факт имеет, на наш взгляд, большое значение для понимания физических процессов, протекающих при рассматриваемой неустойчивости.

На рис. 2 изображены зависимости x от безразмерной длины системы ξ , полученные для $\kappa_1\kappa_2 = 0.5$. Рис. 1 отличается тем, что мнимые части частот $\text{Im } x_n(\xi)$ на

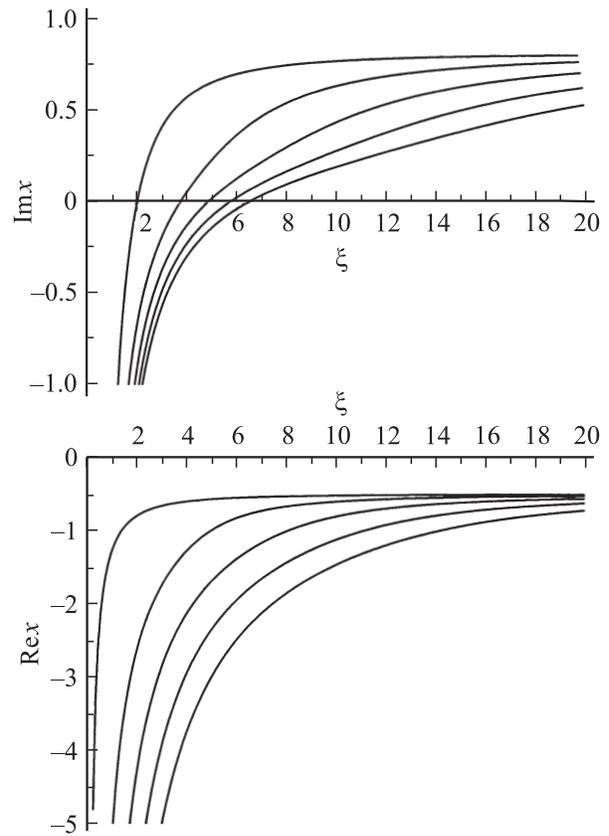


Рис. 1. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка ξ в отсутствие отражений, $\kappa = 0$.

рис. 2 при малых ξ слились в одну кривую, хорошо описываемую формулой

$$\text{Im } x = -\frac{1}{2\xi} \ln \frac{1}{|\kappa_1\kappa_2|}, \quad \xi \ll 1. \quad (46)$$

Последняя формула следует при переходе к переменным x, ξ из (21). Но так и должно быть, поскольку при малой плотности пучка ($\xi \ll 1$) доминирует вытекание энергии через полупрозрачные границы резонатора, что дает декремент (21). Качественно та же ситуация при малых ξ имеет, конечно, место, если отражение отсутствует вообще (рис. 1), однако при $\kappa_1\kappa_2 = 0$ формула (21) не корректна. Отметим еще одну особенность рис. 2: действительная часть частоты основной моды $\text{Re } x_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ стремится к нулю, но это опять согласуется с формулой (21), из которой следует, что в отсутствие пучка $\text{Re } \omega = 0$. Так же должны вести себя при $\xi \rightarrow 0$ действительные части и более высоких продольных мод, на рис. 2 это не отражено, что обусловлено техническими трудностями вычисления частот мод с $n \geq 1$ в области малых ξ .

На рис. 3 представлены зависимости x от ξ , полученные для $\kappa_1\kappa_2 = 0.99$, т.е. для практически закрытого резонатора. Результат оказывается вполне предсказуемым: порог неустойчивости на нулевой продольной моде уменьшился почти до нуля, пороги неустойчивостей более высоких мод остались не нулевыми. Мнимые части

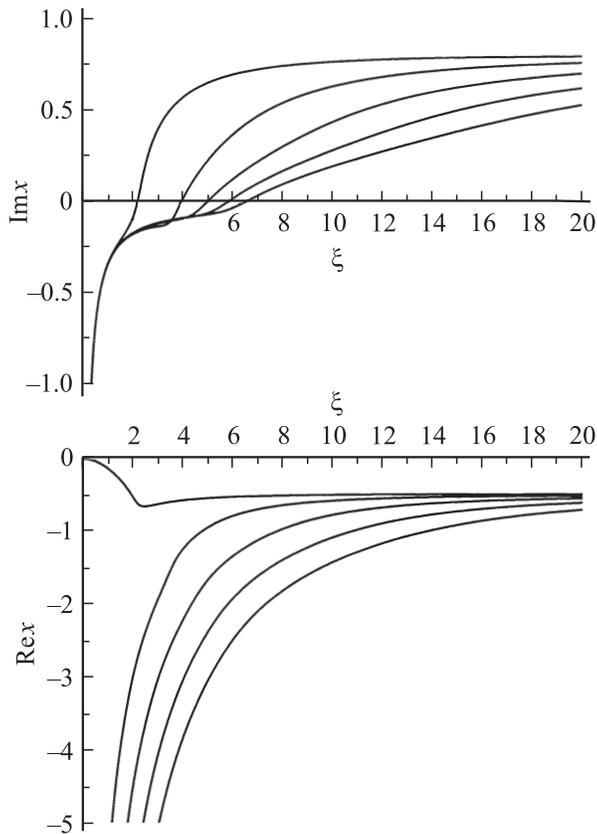


Рис. 2. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка ξ , $\kappa = 0.5$.

частот всех продольных мод, пока не достигнут порог их возбуждения, близки к нулю. Не нулевые пороги неустойчивостей продольных мод с $n \geq 1$ обусловлены не столько вытеканием энергии из резонатора, сколько усложнением условий развития неустойчивостей из-за конечности длины системы [3]. Близость к нулю мнимых частей частот продольных мод до достижения порога их неустойчивости связана с тем, что рассматриваемая физическая система является не диссипативной, а при $\kappa_1 \kappa_2 \rightarrow 1$ вынос энергии из нее прекращается.

Укажем на общие закономерности, следующие из приведенных рисунков. При $\xi \rightarrow \infty$ имеем $\text{Re } x_n \rightarrow -0.472$ и $\text{Im } x_n \rightarrow 0.818$ для всех n . В размерных переменных это приводит к частоте (41), и в бесконечно длинной системе развивается обычная абсолютная неустойчивость с максимально возможным инкрементом. Далее, и на это уже указывалось ранее, действительные части частот всех продольных мод при всех ξ отрицательны. При изменении знака параметра b^3 действительная часть частоты меняет знак на противоположный.

На рис. 4 представлены, в зависимости от общего коэффициента отражения резонатора $\kappa = |\kappa_1 \kappa_2|$, порог развития неустойчивости на нулевой продольной моде $\xi_{\text{th}} = \xi_{00}(\kappa)$ и соответствующее ему значение действительной части частоты нулевой моды $\text{Re } x_0(\kappa)$ (пороговая мнимая часть частоты равна нулю). Виден необычный результат: пороговая безразмерная длина системы,

или плотность пучка, при увеличении коэффициента отражения κ от нуля до ~ 0.7 растут. Только при еще больших κ зависимость $\xi_{\text{th}}(\kappa)$ становится обычной — монотонно убывающей, ниже мы попытаемся найти этому объяснение. Пока же отметим основной результат: во всем практически интересном диапазоне κ пороговое значение параметра плотности пучка близко к двум, т.е. для развития неустойчивости, обусловленной

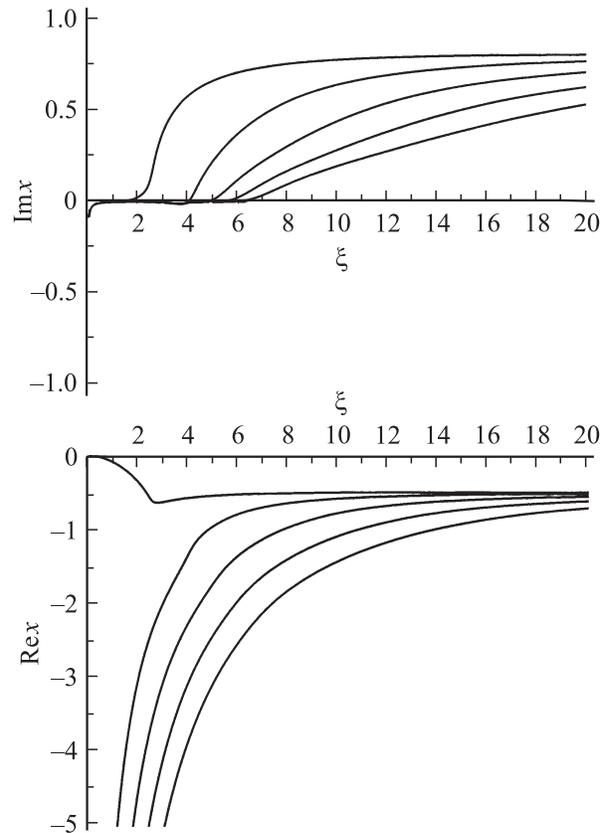


Рис. 3. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка ξ , $\kappa = 0.99$.

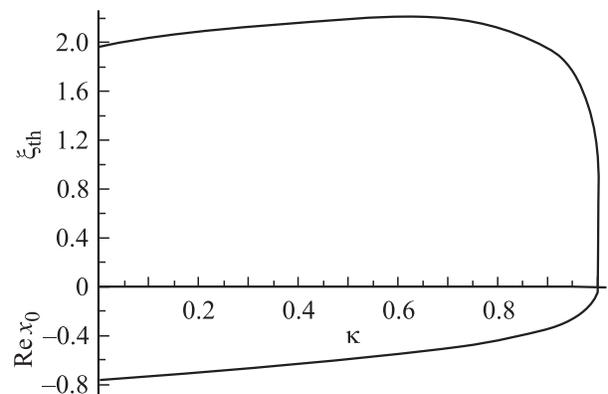


Рис. 4. Зависимости порога развития неустойчивости на нулевой продольной моде ξ_{th} и соответствующей действительной части частоты нулевой моды $\text{Re } x_0(\kappa)$ от коэффициента отражения κ .

одночастичным вынужденным эффектом Черенкова на встречной волне в системе конечной длины, требуется выполнение условия

$$b \frac{L}{U} > 2, \quad \text{или} \quad \text{Im} \omega > \sqrt{3} \frac{U}{L}, \quad (47)$$

где $\text{Im} \omega$ — инкремент неустойчивости. Неравенство (47) устанавливает связь между проведенным выше теоретическим рассмотрением и многочисленными конкретными физическими системами, имеющими практическое применение.

Заметим, что одночастичный эффект Черенкова на встречной волне, при определенных условиях, лежит в основе работы генераторов (ламп) обратной волны (ЛОВ) — широко используемых приборов вакуумной СВЧ-электроники [12,13]. Обычно в теории ЛОВ [17] используется некий комбинированный подход: электромагнитная часть описывается точно на основании уравнения переноса, а пучок рассматривается в квазистационарном приближении. Применительно к (6) это означает, что в первом из них производная по времени отбрасывается. С нашей точки зрения, это не совсем корректно, поскольку искажается сам характер абсолютной пучковой неустойчивости. Если бы рассматривалась безграничная система, то устранить производную по t в одном из уравнений можно было бы переходом в движущуюся систему координат. При наличии же неподвижных границ $z = 0$, L выделенной является лабораторная система. В настоящей работе какие-либо упрощающие предположения, влияющие на строгость рассмотрения физической задачи, не используются, поэтому результаты настоящей работы дают дополнительную существенную информацию по физике конвективных и абсолютных пучковых неустойчивостей в ограниченной области пространства. Отметим еще, что рассмотренные проблемы интересны и для плазменной СВЧ-электроники [10]. Так, плазменные генераторы обратной волны на одночастичном вынужденном эффекте Черенкова могут быть реализованы на базе плазменно-пучковых волноводов в конечном внешнем магнитном поле, рассмотренных в [18,19].

4. Характер пучковой неустойчивости при одночастичном эффекте Черенкова

Выясним характер процессов, имеющих место при вынужденном излучении пучка в режиме одночастичного эффекта Черенкова. Чтобы пояснить о чем идет речь, напомним необходимые положения теории коллективного эффекта Черенкова, т.е. из линейной теории резонансного взаимодействия двух волн (одночастичный эффект можно трактовать как частный случай резонанса трех волн). Дисперсионное уравнение коллективного эффекта имеет, как известно, вид

$$D(\omega, k) \equiv (\omega - kU)(\omega - kV_g) + a^2 = 0, \quad (48)$$

где a^2 — некоторая постоянная. При рассмотрении взаимодействия волн важно ответить на следующие

вопросы: если имеет место неустойчивость, то какая — конвективная или абсолютная; если имеется пространственное нарастание и затухание волн, то что это — усиление или непропускание. В случае дисперсионного уравнения (48) ответ дают известные правила Стэррока [7–9]: $UV_g > 0$, $a^2 < 0$ — система устойчива, усиления и непропускания волн нет; $UV_g > 0$, $a^2 > 0$ — система конвективно-неустойчива, есть усиление волн; $UV_g < 0$, $a^2 < 0$ — система устойчива, колебания не пропускаются; $UV_g < 0$, $a^2 > 0$ — система абсолютно неустойчива, усиления и непропускания волн нет. Каждый из перечисленных пунктов наглядно иллюстрируется характерными дисперсионными кривыми $\text{Re} \omega(k)$ уравнения (50), которые обычно приводятся в литературе как неотъемлемая часть правил Стэррока. Сформулируем аналогичные правила для одночастичного эффекта Черенкова, когда взаимодействие волн системы определяется первым уравнением (11).

Для определенности считаем, что при $V_g > 0$ выполнено неравенство $U > V_g$. Все возможные конфигурации дисперсионных кривых представлены на рис. 5. Неустойчивость имеется всегда, при любом знаке b^3 . Изменение знака b^3 эквивалентно изменению знака у частоты и волнового числа, поэтому достаточно рассмотреть только случай $b^3 > 0$. Заметим, что при неустойчивостях, основанных на эффекте вынужденного черенковского излучения прямолинейного пучка, всегда $b^3 > 0$, а при неустойчивостях на вынужденном циклотронном излучении винтового пучка имеем $b^3 < 0$ [6,20].

Для установления характера неустойчивости (конвективная или абсолютная) следует определить какое из равенств (39) выполняется в точке ветвления (40), лежащей в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω . Если сливаются ветви $k_j(\omega)$, соответствующие волнам с одинаковым направлением распространения, неустойчивость конвективная; если же с противоположным — абсолютная [7–9]. Направление распространения волны устанавливается по асимптотическому поведению функции $k_j(\omega)$: если при $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ имеет место $\text{Im} k_j(\omega) \rightarrow +\infty$, то волна распространяется в положительном направлении оси OZ , если $\text{Im} k_j(\omega) \rightarrow -\infty$ — в отрицательном. Вопрос о характере неустойчивости при одночастичном эффекте Черенкова рассмотрен в [9], где путем весьма сложного анализа ветвей $k_{1,2,3}(\omega)$ на комплексной плоскости $\omega = \omega' + i\omega''$ показано, что при $UV_g > 0$ неустойчивость является конвективной, а при $UV_g < 0$ — абсолютной. На рис. 6 дана наглядная иллюстрация данного результата, а именно: на комплексной плоскости $k = k' + ik''$ изображены ветви $k_{1,2,3}(\omega)$ при изменении комплексной частоты вдоль контура $\text{Re} \omega = \omega'_0$, $\text{Im} \omega \in [\omega''_0, +\infty)$, где ω_0 — комплексная точка ветвления (40), а контур проходит в направлении к точке ветвления, т.е. из бесконечности.

Остановимся на вопросе об усилении волн при одночастичном эффекте Черенкова. В определенном диапазоне частот, как видно из рис. 5, дисперсионное уравнение имеет комплексные корни $k(\omega)$ и $k^*(\omega)$.

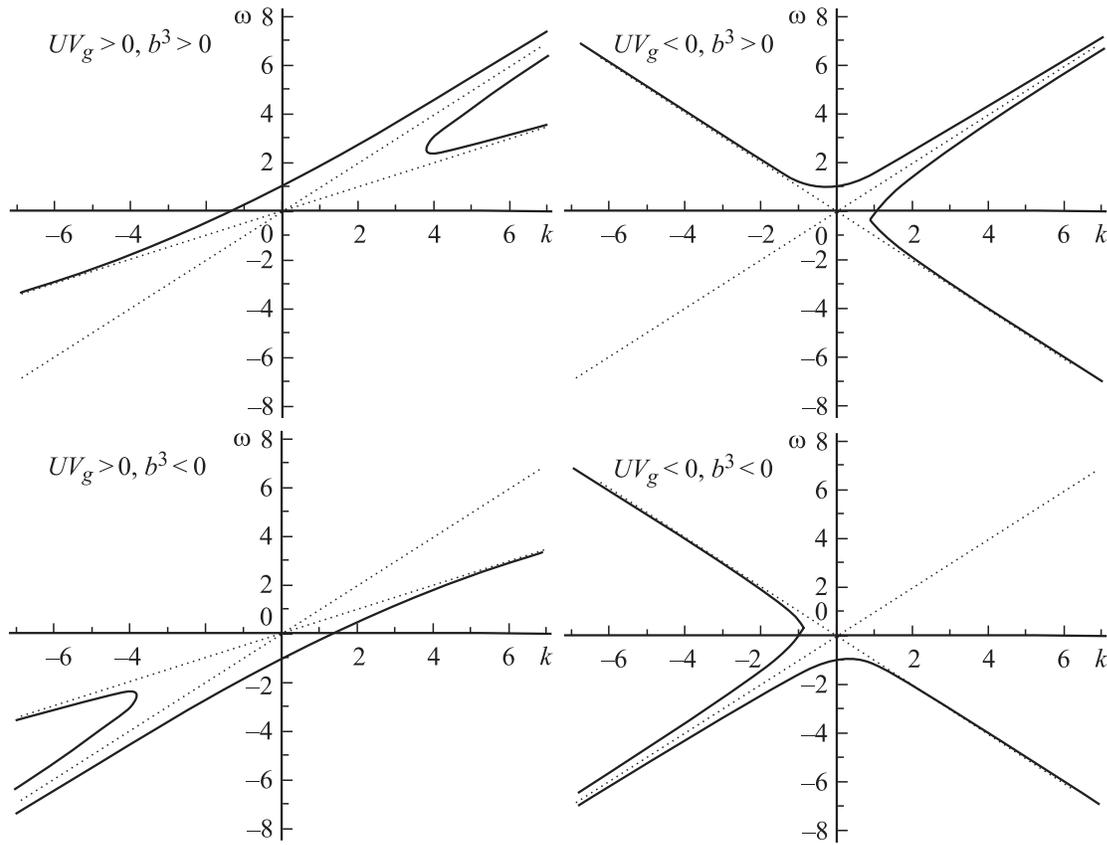


Рис. 5. Конфигурации дисперсионных кривых $\omega(k)$ при различных режимах одночастичного эффекта Черенкова.

Нарастающая и затухающая экспоненты в решении (12)

$$\exp(ik(\omega)z), \quad \exp(ik^*(\omega)z) \quad (49)$$

описывают или усиление волн, или пространственное непропускание колебаний. Известно правило [7–9]: если экспонента нарастает в сторону распространения волны, то имеется усиление волны, в противном случае — ее непропускание. В случае одночастичного эффекта на попутной волне все три функции $k_{1,2,3}(\omega)$ соответствуют волнам, распространяющимся в направлении движения пучка. Поскольку одна из экспонент обязательно нарастает в ту же сторону, имеет место усиление колебаний. Таким образом, при одночастичном эффекте Черенкова на попутной волне происходит усиление колебаний [7–9, 20], что находит многочисленные применения в СВЧ-приборах (усилителях) типа ЛБВ.

Иная ситуация при одночастичном эффекте на встречной волне. Конечно, законен вопрос о применимости в этом случае решений (49). Действительно, черенковские неустойчивости на встречной волне являются абсолютными, решения же (49) описывают установившееся распределение возмущений в пространстве по прошествии большого промежутка времени с момента включения этих возмущений. Ясно, что до установления стационарных распределений (49) развитие абсолютной неустойчивости полностью „перекроет“ любой процесс

усиления или непропускания. Именно так и происходит в безграничных в продольном направлении системах.

В системе длины L существует минимальное волновое число, по порядку величины равное $k_{\min} \sim \pi/2L$ (четверть длины волны возмущения на длине системы). Максимум инкремента пучковой неустойчивости $\omega''_{\max} = \sqrt{3}b/2$ имеет порядок мнимой части частоты (40) и достигается, как это следует из первого уравнения (11), при $k = 0$. Анализ первого уравнения (11) показывает также, что при выполнении неравенства

$$|k|(U^2V_g)^{1/3} > \omega''_{\max} = \sqrt{3}b/2 \quad (50)$$

инкремент пучковой неустойчивости много меньше максимального, а значит, абсолютной неустойчивости фактически нет. Подставляя в неравенство (50) $k = k_{\min}$ и полагая для простоты $U \sim |V_g|$, получим следующее условие отсутствия абсолютной неустойчивости при одночастичном эффекте на встречной волне в системе конечной длины:

$$b \frac{L}{U} < \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.8. \quad (51)$$

Последнее неравенство, как и следовало ожидать, противоположно стартовому условию (47).

Таким образом, отсутствие абсолютной неустойчивости при одночастичном эффекте в резонаторе обусловлено не выносом возмущений через полупрозрачные

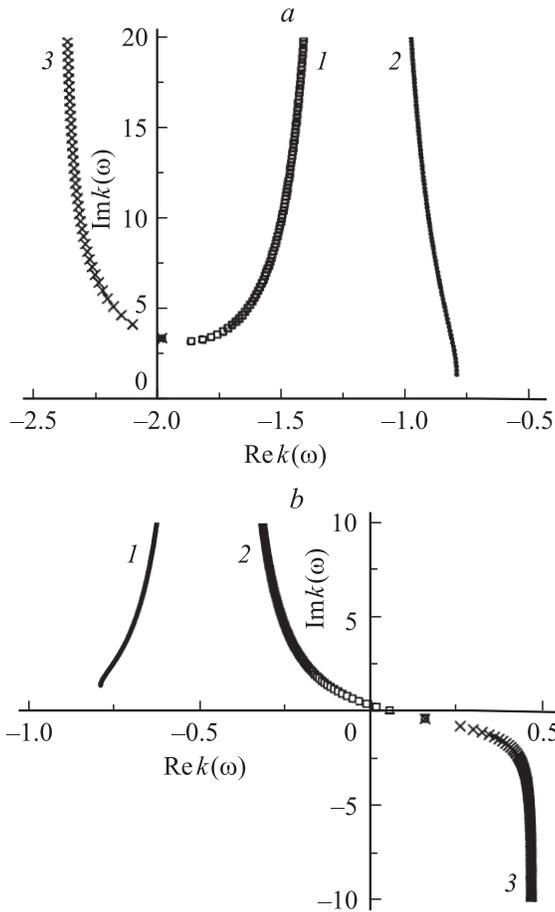


Рис. 6. Поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости при стремлении частоты ω от $\omega'_0 + i\infty$ до $\omega'_0 + i\omega''_0$. Случай (a) — конвективная неустойчивость, случай b — абсолютная.

границы резонатора (хотя и этот фактор необходимо принимать во внимание), а недостаточностью длины системы. То же имеет место и при коллективном эффекте [3]. Мы утверждаем, что вблизи порога развития одночастичного эффекта Черенкова на встречной волне в системе конечной длины важное значение имеет усиление волн. Если инкремент абсолютной неустойчивости мал, а у порога он близок к нулю, то вопрос об усилении и непропускании колебаний является правомерным.

Действительная часть частоты (40) равна $\omega'_0 = -0.472b$. Поскольку частота (40) есть одна из точек ветвления, то две из функций $k_j(\omega)$ при $\omega' < \omega'_0$ и $\omega' > \omega'_0$ ведут себя по-разному. Мы говорим сейчас только о действительной части частоты, потому что около порога неустойчивости системы конечной длины мнимая часть частоты близка к нулю. На рис. 7 изображены ветви $k_{1,2,3}(\omega)$ при изменении комплексной частоты вдоль контура $\omega' = \text{const}$, $\omega'' \in [0, +\infty)$, контур проходит в направлении к действительной оси комплексной плоскости ω , т.е. из бесконечности. В случае рис. 7, a $\omega' = -0.3 > \omega'_0$ видно, что на действительной оси частот только ветвь k_3 имеет отрицательную мнимую часть и дает нарастающий вклад $\exp(ik_3z)$ в поло-

жительном направлении оси OZ . Но ветвь $k_3(\omega)$ соответствует волне, распространяющейся в противоположном направлении: следовательно, имеет место непропускание колебаний. В случае рис. 7, b $\omega' = -0.6 < \omega'_0$, отрицательную мнимую часть на действительной оси частот имеет теперь ветвь k_2 . Поскольку эта ветвь соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси OZ , то имеется усиление колебаний. Ветви $k_{1,2,3}(\omega)$ для рис. 7, b даются формулами (41). Теперь можно сделать окончательный вывод о пространственном распределении амплитуд возмущений при одночастичном эффекте Черенкова на встречной волне. Если в силу каких-то причин (например, недостаточной длины системы) может быть $\omega'' \ll \omega''_0$, то при $\omega' < \omega'_0$ имеется усиление волн, а при $\omega' > \omega'_0$ имеет место непропускание колебаний. Здесь $\omega_0 = \omega'_0 + i\omega''_0$ — частота (40), а b^3 считается положительным. При $b^3 < 0$ неравенства $\omega' < \omega'_0$ и $\omega' > \omega'_0$ меняются местами.

В заключение вернемся к рис. 4 и обсудим, с учетом изложенного выше, представленные на нем результаты. Этот рисунок относится к пороговому режиму, поэтому $\omega' \sim 0 \ll \omega''_0$. Из рис. 4 видно, что в широком диапазоне $\kappa = |\kappa_1\kappa_2|$ (от нуля до ~ 0.7) безразмерная частота $\text{Re } x$ такова, что $\omega' < \omega'_0$. Следовательно, неустойчивость в системе конечной длины вблизи порога обусловлена пространственным усилением волн.

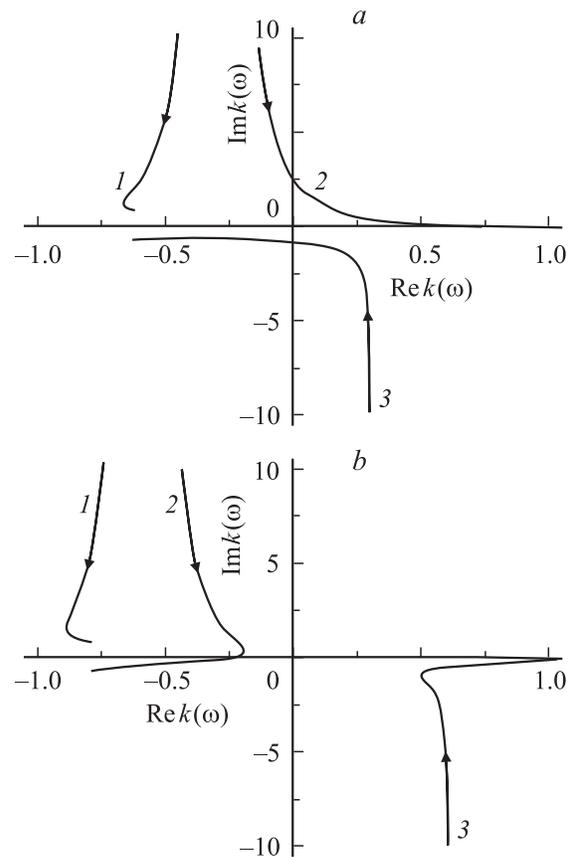


Рис. 7. Поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости при стремлении частоты ω от $\omega' + i\infty$ до ω' при $\omega' = -0.3$ (a) и $\omega' = -0.6$ (b).

Только при $\kappa > 0.7-0.75$ начинает выполняться неравенство $\omega' > \omega'_0$. Но это не означает начала абсолютной неустойчивости. При $\kappa \rightarrow 1$, около порога, безразмерная длина системы ξ становится меньше, а мнимая часть частоты обращается в ноль и при полном отсутствии пучка (см. (21) и (46)), поэтому говорить о характере неустойчивости сложно. Абсолютная неустойчивость развивается только при сильном превышении порога, что подтверждает и численное исследование нелинейной динамики одночастичного эффекта Черенкова на встречной волне в длинном резонаторе [21]. Не совсем понятен, конечно, видный из рис. 4 рост порогового значения безразмерной длины ξ_{th} при увеличении отражения κ . Вероятно, это связано с тем, что волна k_3 (см. рис. 7, *b*) при наличии отражения трансформируется при $z = 0$ не только в волны k_1, k_2 , из которых k_2 усиливается, но и в нейтральную волну k_4 .

Работа выполнена при финансовой поддержке программы „Университеты России“ (проект УР.01.02.493), Минпромнауки (проект Ведущие научные школы НШ-1962.2003.2) и РФФИ (проект 04-02-17240).

Список литературы

- [1] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Механизмы спонтанного и вынужденного излучений релятивистских электронных пучков // Проблемы теоретической физики и астрофизики. М.: Наука, 1989. С. 70–92.
- [2] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1987. Т. 152. С. 285.
- [3] Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Сепехри Джаван Н. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 15–23.
- [4] Кадомицев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
- [5] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1988. 424 с.
- [6] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [7] Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.
- [8] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
- [9] Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
- [10] Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544 с.
- [11] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 6. С. 1182–1188.
- [12] Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
- [13] Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ-электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
- [14] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 2000. Т. 26. С. 231.
- [15] Кузелев М.В., Лоза О.Т., Рухадзе А.А. и др. // Физика плазмы. 2001. Т. 27. С. 710.
- [16] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 432 с.
- [17] Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. С. 1037.
- [18] Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2002. т. 28. С. 544.
- [19] Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 2004. Т. 30. С. 60.
- [20] Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Моисеев С.С. и др. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М.: Наука, 1982. 271 с.
- [21] Карташов И.Н., Кузелев М.В., Сепехри Джаван Н. // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 274–282.