01;03

Об учете аккомодации энергии и вычислении потока тепла в плоском слое двухатомного газа

© С.А. Савков, Е.Ю. Тюлькина

Орловский государственный университет,
302015 Орел, Россия

(Поступило в Редакцию 1 марта 2005 г.)

Рассмотрен вопрос о вычислении потока тепла в плоском слое двухатомного газа. В линейном по перепаду температуры приближении получены общие (не зависящие от формы и способа решения кинетического уравнения) выражения зависимости потока тепла от коэффициента аккомодации энергии. В рамках метода полупространственных моментов проведен анализ зависимости точности вычисления потока тепла от числа удерживаемых в функции распределения слагаемых.

PACS: 51.10.+y

Изучение процесса теплопереноса в молекулярных газах представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и в плане практического приложения. В частности, данные, полученные по измерению потока тепла между параллельными пластинами используются для определения характера взаимодействия молекул газа с их поверхностью [1]. Теоретический анализ указанного явления требует рассмотрения кинетического уравнения для решения которого, как правило, используются различные численные методы [2–6]. Причем все конкретные расчеты проводятся при фиксированных значениях коэффициентов аккомодации, что затрудняет сравнение с экспериментом. Основной целью данной публикации является определение аналитических выражений, задающих зависимость потока тепла от характера аккомодации энергии.

В данной работе рассматривается процесс переноса тепла через слой двухатомного газа толщиной d, заключенного между двумя неподвижными плоскими пластинами, на поверхности которых поддерживается постоянная температура $T_s^1 > T_s^2$. Перепад $\Delta T_s = T_s^1 - T_s^2$ считается достаточно малым, для того чтобы ограничиться линейным приближением.

Введем декартову систему координат с осью OZ, направленной по нормали, и началом на расстоянии $d/2$ от каждой из пластин.

В качестве единицы длины примем величину

$$l = \frac{3\lambda}{\sqrt{\pi}},$$

где

$$\lambda = \frac{\chi}{3}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT_0}}, \qquad \chi = \frac{2}{7}\frac{\varkappa}{n_0 k}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ и χ — коэффициенты тепло- и температуропроводности, m — масса, T_0 и n_0 — некоторые, принятые за равновесные, значения температуры и концентрации молекул газа, k — постоянная Больцмана.

В силу линейности поставленной задачи, представим функцию распределения в виде

$$f = f_0(1+\varphi),$$

где

$$f_0 = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2}\frac{J}{kT_0}\exp\left(-C^2-\gamma^2\right),$$

$C = V\sqrt{m/2kT_0}$; $\gamma = \omega\sqrt{J/2kT_0}$; V и ω — собственная (тепловая) скорость поступательного и вращательного движения молекул газа; J — момент инерции молекул.

В качестве граничных условий примем закон диффузного отражения молекул газа от поверхности каждой из пластин, что эквивалентно

$$\varphi\big|_{(-1)^kC_z<0,z=(-1)^kd/2} = \Phi_r^k = \frac{n_r^k-n_0}{n_0} + \left(C^2-\frac{3}{2}\right)\tau_v^k + (\gamma^2-1)\tau_\omega^k. \tag{2}$$

Значения n_r^k, τ_v^k и τ_ω^k определяются требованием отсутствия массового движения газа

$$\int C_z\varphi\exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C = 0 \tag{3}$$

и характером аккомодации энергии

$$\alpha_v^k = \frac{E_{v,i}^k+E_{v,r}^k}{E_{v,i}^k+E_{v,s}^k}, \qquad \alpha_\omega^k = \frac{E_{\omega,i}^k+E_{\omega,r}^k}{E_{\omega,i}^k+E_{\omega,s}^k}, \tag{4}$$

где

$$E_{v,i}^k = 2\pi^{-3/2} \times \int\limits_{(-1)^kC_z>0} C_zC^2\varphi\big|_{z=(-1)^kd/2}\exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C \tag{5}$$

и

$$E^k_{\omega,i} = 2\pi^{-3/2} \times \int\limits_{(-1)^k C_z>0} C_z\varphi\big|_{z=(-1)^k d/2} \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma^3 d\gamma d^3C \quad (6)$$

— обезразмеренное значение энергии поступательного и вращательного движения, приносимой падающими, а

$$E^k_{v,r} = 2\pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_z<0} C_z C^2 \Phi^k_r \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C \quad (7)$$

и

$$E^k_{\omega,r} = 2\pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_z<0} C_z \Phi^k_r \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma^3 d\gamma d^3C \quad (8)$$

— уносимой отразившимися от поверхности k-й пластины молекулами;

$$E^k_{v,s} = 2\pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_z<0} C_z C^2 \Phi^k_s \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C \quad (9)$$

и

$$E^k_{\omega,s} = 2\pi^{-3/2} \int\limits_{(-1)^k C_z<0} C_z \Phi^k_s \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma^3 d\gamma d^3C \quad (10)$$

— энергия, которую уносили бы молекулы, если бы отражались с температурой T^k_s, т.е. с функцией распределения

$$\Phi^k_s = \frac{n^k_s - n_0}{n_0} + \left(C^2+\gamma^2-\frac{5}{2}\right)\frac{T^k_s - T_0}{T_0}. \quad (11)$$

Из (3–11) находим

$$\frac{n^k_r - n_0}{n_0} = (-1)^k 2I^k_0 - \frac{\tau^k_v}{2}, \quad E^k_{v,i} = \frac{I^k_1}{\sqrt{\pi}}, \quad E^k_{\omega,i} = \frac{I^k_2}{\sqrt{\pi}},$$

$$E^k_{v,r} = \frac{(-1)^{k+1}\tau^k_v - 2I^k_0}{\sqrt{\pi}}, \quad E^k_{\omega,r} = \frac{(-1)^{k+1}\tau^k_\omega - 2I^k_0}{2\sqrt{\pi}},$$

$$E^k_{v,s} = \frac{(-1)^{k+1}\tau_s^k - 2I^k_0}{\sqrt{\pi}}, \quad E^k_{\omega,s} = \frac{(-1)^{k+1}\tau_s^k - 2I_0}{2\sqrt{\pi}},$$

что дает

$$\tau^k_v + (-1)^k(1-\alpha^k_v)(2I^k_0 - I^k_1) = \alpha^k_v \tau_s{}^k,$$

$$\tau^k_\omega + (-1)^k(1-\alpha^k_\omega)(2I^k_0 - 2I^k_2) = \alpha^k_\omega \tau_s{}^k. \quad (12)$$

Здесь

$$I^k_i = \frac{2}{\pi} \int\limits_{(-1)^k C_z>0} A_i C_z \varphi\big|_{z=(-1)^k d/2} \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C,$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = C^2, \quad A_2 = \gamma^2,$$

$$\tau^k_s = \left(T^k_s - T_0\right)/T_0.$$

Искомый поток тепла определяется соотношением

$$q = \int C_z \left(\frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}\right) f_0 \varphi \omega d\omega d^3V$$

и может быть представлен в виде

$$q = n_0 \sqrt{\frac{2k^3T_0^3}{m}} Q,$$

где

$$Q = Q_v + Q_\omega,$$

$$Q_v = \frac{2}{\pi^{3/2}} \int C_z C^2 \varphi \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C,$$

$$Q_\omega = \frac{2}{\pi^{3/2}} \int C_z \varphi \exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma^3 d\gamma d^3C.$$

При этом на поверхности каждой из пластин

$$Q_v\big|_{z=(-1)^k d/2} = E^k_{v,i} + E^k_{v,r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left((-1)^{k+1}\tau^k_v + I^k_1 - 2I^k_0\right),$$

$$Q_\omega\big|_{z=(-1)^k d/2} = E^k_{\omega,i} + E^k_{\omega,r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left((-1)^{k+1}\frac{\tau^k_\omega}{2} + I^k_2 - I^k_0\right).$$

В силу принятого условия линейности интегралы I^k_i, как и сама функция φ, могут быть представлены в виде линейной комбинации относительных перепадов температуры τ^k_v и τ^k_ω. Соответственно выражения (12) представляют собой систему четырех линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет выразить значения перечисленных перепадов через разность температуры между пластинами. В частности, в наиболее значимом с практической точки зрения случае, когда обе пластины выполнены из одного материала, т.е. $\alpha^1_v = \alpha^2_v = \alpha_v$ и $\alpha^1_\omega = \alpha^2_\omega = \alpha_\omega$, из (12) имеем

$$\left(2\sqrt{\pi}Q^v_v(1-\alpha_v)+\alpha_v\right)\tau_v + 2\sqrt{\pi}Q^\omega_v(1-\alpha_v)\tau_\omega = \alpha_v\frac{\Delta T_s}{T_0},$$

$$4\sqrt{\pi}\, Q^v_\omega(1-\alpha_\omega)\tau_v + \left(4\sqrt{\pi}Q^\omega_\omega(1-\alpha_\omega)+\alpha_\omega\right)\tau_\omega = \alpha_\omega\frac{\Delta T_s}{T_0}. \quad (13)$$

Здесь

$$\tau_v = \frac{T^1_v - T^2_v}{T_0} = \tau^1_v - \tau^2_v, \quad \tau_\omega = \frac{T^1_\omega - T^2_\omega}{T_0} = \tau^1_\omega - \tau^2_\omega.$$

Под Q^v_v и Q^v_ω понимаются значения Q_v и Q_ω на поверхности первой (более нагретой) пластины, вычисленные при $\tau_v = 1$, $\tau_\omega = 0$, а Q^ω_v и Q^ω_ω — при $\tau_v = 0$, $\tau_\omega = 1$. В качестве равновесных приняты значения температуры и концентрации при $z = 0$.

Решая (13), находим

$$\tau_v = \frac{\Delta_v}{\Delta}\frac{\Delta T_s}{T_0}, \qquad \tau_\omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta}\frac{\Delta T_s}{T_0},$$

где

$$\Delta_v = \alpha_v\left(4\sqrt{\pi}Q_\omega^\omega(1-\alpha_\omega)+\alpha_\omega\right) - 2\alpha_\omega\sqrt{\pi}Q_v^\omega(1-\alpha_v),$$

$$\Delta_\omega = \alpha_\omega\left(2\sqrt{\pi}Q_v^v(1-\alpha_v)+\alpha_v\right) - \alpha_v 4\sqrt{\pi}Q_\omega^v(1-\alpha_\omega),$$

$$\Delta = \left(2\sqrt{\pi}Q_v^v(1-\alpha_v)+\alpha_v\right)\left(4\sqrt{\pi}Q_\omega^\omega(1-\alpha_\omega)+\alpha_\omega\right) - 8\pi Q_v^\omega Q_\omega^v(1-\alpha_v)(1-\alpha_\omega).$$

Результирующий поток тепла определяется соотношением

$$Q = (Q_v^v + Q_\omega^v)\,\tau_v + (Q_v^\omega + Q_\omega^\omega)\tau_\omega.$$

Значение потока тепла в промежуточном диапазоне определяется из решения кинетического уравнения, которое в силу принятого условия линейности и симметрии задачи может быть представлено в виде

$$C_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = I_{\text{st}}[\varphi]. \tag{14}$$

Следует заметить, что любой численный метод решения подобного рода уравнений по существу состоит в аппроксимации искомой функции на конечном множестве точек фазового пространства. При этом необходимо учитывать тот факт, что основное изменение функции распределения происходит на расстояниях порядка длины свободного пробега. Данное обстоятельство приводит к необходимости соответствующего дробления шага. Указанной проблемы можно избежать в рамках моментных методов, когда функция распределения представляется в виде ряда по заданным полиномам скорости, коэффициенты которого являются функциями координат и определяются из соответствующей системы дифференциальных уравнений. Причем, в случае плоской геометрии последняя может быть решена в аналитической форме.

Для анализа рассмотрим простейшую модель интеграла столкновений [7]:

$$I_{\text{st}}[\varphi] = \sum_{i=1}^{3} P_i M_i - \varphi. \tag{15}$$

Здесь

$$M_i = 2\pi^{-3/2}\int P_i\varphi\exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C;$$

$$P_1 = 1; \quad P_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(C^2+\gamma^2-\frac{5}{2}\right); \quad P_3 = \sqrt{2}C_z.$$

В этом случае зависимость функции распределения от модуля скорости поступательного и вращательного движения молекул определяется соотношением

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 C^2 + \varphi_3\gamma^2, \tag{16}$$

где φ_i зависит только от z и C_z.

В силу (16) решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (2), может быть представлено в виде

$$\varphi = \varphi^+ H(C_x) + \varphi^- H(-C_x),$$

где

$$\varphi^\pm = \sum_{k=0}^{N}\left(a_{1,k}^\pm + a_{2,k}^\pm C^2 + a_{3,k}^\pm\gamma^2\right)C_z^k, \tag{17}$$

$H(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ — стандартная функция Хевисайда.

Коэффициенты $a_{i,k}$ определяются из системы дифференциальных уравнений, для составления которой кинетическое уравнение следует последовательно умножить на все входящие в (17) моменты и проинтегрировать по всему пространству скоростей.

Опуская достаточно громоздкие выкладки, которые могут быть выполнены в любой среде символьного программирования, такой как Maple, отметим, что результирующее решение задается выражением

$$\varphi = \varphi_{\text{Ch.}E.} + \tilde{\varphi},$$

где

$$\varphi_{\text{Ch.}E.} = K_1 + K_2\left(C^2+\gamma^2-\frac{5}{2}\right) + K_3 C_z + K_4\left(C^2+\gamma^2-\frac{7}{2}\right)(z-C_z)$$

представляет собой газодинамическое решение кинетического уравнения (функцию Чепмена–Энскога), определяющее распределение молекул на достаточно большом (порядка нескольких длин свободного пробега) удалении от каждой из пластин. А функция

$$\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{N-4} K_{k+4}\varphi_k\exp(\alpha_k z)$$

описывает поведение газа в непосредственной близости от каждой из пластин.

Значения потоков энергии определяются соотношениями

$$Q_v = \frac{5}{4}K_4 + \tilde{Q}, \qquad Q_\omega = \frac{1}{2}K_4 - \tilde{Q},$$

где

$$\tilde{Q} = \frac{2}{\pi^{3/2}}\int C_z C^2\tilde{\varphi}\exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma d\gamma d^3C = -\frac{2}{\pi^{3/2}}\int C_z\tilde{\varphi}\exp\left(-C^2-\gamma^2\right)\gamma^3 d\gamma d^3C.$$

При этом в свободномолекулярном режиме, т. е. в случае, когда расстояние между пластинами много меньше средней длины свободного пробега молекул, изменением функции распределения в объеме газа можно пренебречь и считать ее равной

$$\varphi = \Phi_r^1 H(C_z) + \Phi_r^2 H(-C_z),$$

Таблица 1. Значения Q_v^v

$d\backslash N$	1	2	3	4	5
0.01	0.55987	0.55988	0.55989	0.55990	0.55990
0.1	0.52515	0.52606	0.52663	0.52701	0.52726
0.5	0.42706	0.43336	0.43535	0.43584	0.43586
1	0.36186	0.36840	0.36899	0.36879	0.36866
1.25	0.33953	0.34501	0.34509	0.34485	0.34479
1.5	0.32108	0.32542	0.32521	0.32503	0.32503
1.75	0.30543	0.30874	0.30842	0.30832	0.30835
2	0.29191	0.29437	0.29404	0.29401	0.29405
2.5	0.26961	0.27090	0.27068	0.27073	0.27077
3	0.25189	0.25255	0.25246	0.25253	0.25255
4	0.22547	0.22569	0.22575	0.22579	0.22579
5	0.20673	0.20691	0.20698	0.20700	0.20700
7	0.18193	0.18211	0.18214	0.18215	0.18215
10	0.16026	0.16036	0.16038	0.16039	0.16039
100	0.10102	0.10105	0.10106	0.10106	0.10106

Таблица 2. Значения $Q_v^\omega = Q_\omega^v$

$d\backslash N$	1	2	3	4	5
0.01	-7.4×10^{-8}	-1.1×10^{-7}	-1.4×10^{-7}	-1.7×10^{-7}	-1.9×10^{-7}
0.1	-5.8×10^{-5}	-7.6×10^{-5}	-8.8×10^{-5}	-9.5×10^{-5}	-9.8×10^{-5}
0.5	−0.00282	−0.00281	−0.00264	−0.02502	−0.02422
1	−0.00922	−0.00818	−0.00766	−0.07500	−0.07480
1.25	−0.01247	−0.01096	−0.01044	−0.01035	−0.01037
1.5	−0.01554	−0.01373	−0.01329	−0.01327	−0.01331
1.75	−0.01841	−0.01647	−0.01614	−0.01617	−0.01621
2	−0.02110	−0.01915	−0.01894	−0.01900	−0.01903
2.5	−0.02601	−0.02428	−0.02426	−0.02433	−0.02434
3	−0.03040	−0.02904	−0.02912	−0.02917	−0.02916
4	−0.03798	−0.03730	−0.03741	−0.03741	−0.03740
5	−0.04424	−0.04398	−0.04404	−0.04403	−0.04402
7	−0.05372	−0.05375	−0.05375	−0.05375	−0.05375
10	−0.06292	−0.06296	−0.06296	−0.06296	−0.06296
100	−0.08920	−0.08922	−0.08923	−0.08923	−0.08923

Таблица 3. Значения Q_ω^ω

$d\backslash N$	1	2	3	4	5
0.01	0.27963	0.27963	0.27964	0.27964	0.27965
0.1	0.26002	0.26050	0.26079	0.26097	0.26109
0.5	0.20759	0.21032	0.21095	0.21099	0.21093
1	0.17606	0.17778	0.17757	0.17740	0.17736
1.25	0.16595	0.16684	0.16650	0.16639	0.16640
1.5	0.15787	0.15811	0.15777	0.15774	0.15778
1.75	0.15125	0.15103	0.15078	0.15080	0.15084
2	0.14571	0.14524	0.14508	0.14514	0.14517
2.5	0.13704	0.13642	0.13644	0.13651	0.13652
3	0.13064	0.13015	0.13025	0.13030	0.13029
4	0.12208	0.12196	0.12208	0.12208	0.12208
5	0.11679	0.11692	0.11698	0.11697	0.11697
7	0.11078	0.11100	0.11099	0.11099	0.11100
10	0.10620	0.10631	0.10631	0.10632	0.10632
100	0.09445	0.09448	0.09449	0.09449	0.09449

что дает

$$Q_v^v = 2Q_\omega^\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad Q_v^\omega = Q_\omega^v = 0,$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_v}{2-\alpha_v} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_\omega}{2-\alpha_\omega} \right) \frac{\Delta T_s}{T_0}.$$

Таким образом, при $\alpha_\omega = 0$, т.е. когда в результате отражения от пластин возбуждаются только поступательные степени свободы молекул газа, поток тепла (в рассматриваемом пределе) совпадает, а при полной аккомодации энергии оказывается в полтора раза больше значения, рассчитанного для атомарного газа.

В газодинамическом пределе и при условии полной аккомодации энергии на поверхности каждой из пластин, т.е. в случае $d \gg 1$ и $\alpha_v = \alpha_\omega$, суммарный поток энергии может быть представлен в виде

$$Q = \frac{7}{4d} \frac{1}{1 + 2KnC_t} \frac{\Delta T_s}{T_0},$$

здесь $Kn = \lambda/d$; $C_t = 2.07\,013,\ 2.06\,022,\ 2.0\,586,\ 2.05\,822$ и $2.05\,808$ для $N = 1, 2, 3, 4$ и 5 соответственно. Напомним, что аналитическое решение [7] дает значение $C_t = 2.05\,798$.

Результаты расчетов в промежуточном диапазоне значений d приведены в табл. 1–3.

Проведенный анализ позволяет утверждать, что погрешность полученных в рамках изложенного подхода к решению кинетического уравнения результатов не превышает 0.01% во всем диапазоне значений числа Кнудсена.

Авторы выражают признательность доктору физико-математических наук, профессору А.А. Юшканову за обсуждение результатов и ценные рекомендации.

Список литературы

[1] *Ларина И.Н., Рыков В.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 141–148.
[2] *Bassanini P., Cercingnani C., Pagani C.D.* // J. Heat and Mass Transfer. 1967. Vol. 10. N 4. P. 447–460.
[3] *Черемисин Ф.Г.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 5. С. 190–193.
[4] *Hsu S.K., Morse T.F.* // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. P. 584–591.
[5] *Cipolla J.W.* // J. Heat and Mass Transfer. 1970. Vol. 14. N 10. P. 1599–1610.
[6] *Pazooki N., Loyalka S.K.* // J. Heat and Mass Transfer. 1985. Vol 28. N 11. P. 2019–2026.
[7] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Теор. и мат. физика. 1993. Т. 95. № 3. С. 530–540.