01;04

# Об электрических полях в компактных скоплениях параллельных токовых каналов

© В.И. Карелин, А.А. Тренькин

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров Нижегородская область, Россия
e-mail: karelin@ntc.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2005 г.)

Для модели пучка параллельных длинных цилиндрических проводников выполнен расчет электрического поля в компактных скоплениях параллельных токовых каналов. Показано, что в скоплении большого количества микроканалов в результате взаимного ослабления их полей максимальная напряженность радиального поля может быть ниже критической, необходимой для ионизационного размножения и расширения. Это позволяет объяснить существование групп микроканалов радиуса менее $10\,\mu$m в высоковольтных наносекундных диффузном и искровом разрядах.

PACS: 52.80.Tn

## Введение

В ряде работ [1–3] по исследованию высоковольтных наносекундных разрядов в воздухе атмосферного давления обнаружена микроструктура токовых каналов, представляющая собой совокупность тонких каналов микронного диаметра. Так в [1,2] при исследовании высоковольтного диффузного разряда обнаружены микроканалы диаметром $\Delta_{\text{mic}} = 1-10\,\mu$m, объединенные в скопления $N \sim 1000$ штук при среднем расстоянии $D \sim 100\,\mu$m между ними. Микроструктура обнаружена в искровом разряде наносекундного диапазона, формируемом в однородном и резко-неоднородном промежутках [3], где искровой канал диаметром 0.4 mm представляет собой компактное скопление большого числа ($N = 600-900$) микроканалов диаметром $5-10\,\mu$m при среднем расстоянии между ними $20\,\mu$m. В качестве механизма формирования микроструктуры предложено развитие неустойчивости на фронте волны ионизации [2–4]. Отдельные микроканалы с $\Delta_{\text{mic}} \leq 10\,\mu$m обнаружены и в барьерном разряде в воздухе атмосферного давления в однородном поле [5]. В связи с этим представляется, что в высоковольтных разрядах наносекундного диапазона микроструктура токовых каналов — явление не редкое. Вместе с тем, как неоднократно отмечалось в литературе, возможность существования одиночных каналов микронного диаметра маловероятна, поскольку высокие радиальные поля вызовут ионизацию газа на поверхности и расширение микроканала [6,7].

В данной работе показано, что в случае компактных групп микроканалов благодаря суперпозиции их полей происходит ослабление поля в скоплении и максимальная напряженность поля может быть ниже критической $E_{\text{cr}}$, необходимой для ионизационного размножения и расширения.

## Расчет электрического поля в системе микроканалов

В соответствии с экспериментальными данными рассмотрим два приближения для расчета электрического поля в скоплении микроканалов радиуса $r_0$, с характерным расстоянием $D$ между ними, соответствующих плотному ($r_0 \sim D$), в случае искрового разряда [3], и менее плотному ($r_0 \ll D$), при высоковольтном диффузном разряде [1,2], распределению микроканалов в канале.

1. Расчет поля скопления микроканалов малой плотности

Моделью системы микроканалов служил пучок $N$ параллельно расположенных длинных проводящих цилиндров радиуса $r_0$, с одинаковым потенциалом $U_0$. В плоскости, перпендикулярной оси, цилиндры равномерно распределены в области радиуса $R_0$ с характерным расстоянием $D = R_0\sqrt{\frac{\pi}{N}}$ между ними (рис. 1). На окружности радиуса $R$ потенциал полагается равным нулю. При выполнении условий

$$r_0 \ll R_0 \ll R, \tag{1}$$

$$D \gg r_0 \text{ или } N \ll \pi\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2 \tag{2}$$

взаимным влиянием цилиндров можно пренебречь и вычислять суммарное поле как суперпозицию полей одиночных заряженных цилиндров. Из (2) получаем ограничение сверху для числа каналов $N \leq 10^4$. Полученные экспериментальные значения $N \sim 10^3$ удовлетворяют данному ограничению, а значения $r_0$, $R_0$, $R$ удовлетворяют (1). Таким образом, распределение напряженности электрического поля $E_i(r)$, создаваемого каждым микроканалом, приближенно можно описать функцией $\mathbf{E}_i(r) = C\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)^2}$, где радиус вектор $r_i \leq R_0$

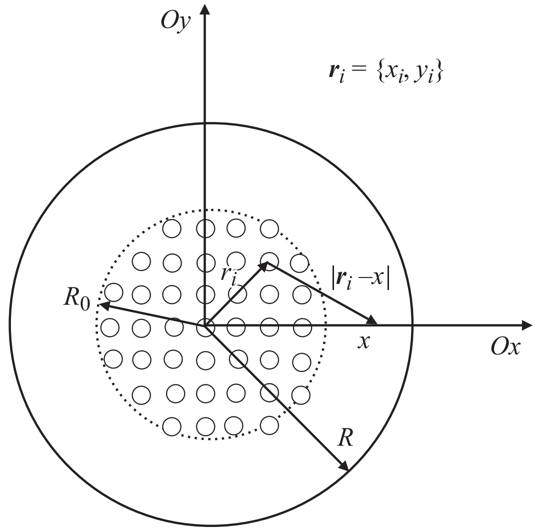


**Рис. 1.** Схема расчета электрического поля скопления микроканалов с малой плотностью распределения.

характеризует положение $i$-го микроканала, $C$ — константа. Тогда суммарное поле равно

$$\mathbf{E}(r) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i,$$

здесь суммирование ведется по всем элементам. Условие постоянства потенциала каждого элемента запишется как

$$\int_{r_i}^{R} E(r)dr = U_0.$$

С учетом условия (1) последнее выражение можно записать в виде

$$\int_{R_0}^{R} E(r)dr = U_0. \tag{3}$$

Поле вычислялось на положительной полуоси оси $Ox$ (рис. 1). В силу симметрии оно имеет только $x$-ю составляющую:

$$E(x) = C\sum_{i=1}^{N} \frac{x - x_i}{x^2 + r_i^2 - 2xx_i}.$$

Условие (3) позволяет определить $C$. В итоге получаем

$$E(x) = \frac{U_0}{\sum\limits_{i=1}^{N} \ln\left(\sqrt{\frac{R^2+r_i^2-2Rx_i}{R_0^2+r_i^2-2R_0x_i}}\right)} \sum_{i=1}^{N} \frac{x - x_i}{x^2 + r_i^2 - 2xx_i}. \tag{4}$$

Рассмотрим полученное выражение. При высоких значениях $N \sim 1000$ поле в скоплении существенно не изменится при переходе от круговой области радиуса $D\sqrt{\frac{N}{\pi}}$ к квадратной со стороной $D\sqrt{N}$ и обратно. Максимального по модулю значения поле достигает, очевидно, на поверхности микроканала. Рассмотрим поле на поверхности микроканала с номером $K$.

$$E_{r_0}(K) = \frac{U_0}{\sum\limits_{i=-M}^{M}\sum\limits_{j=-M}^{M} \ln\left(\sqrt{\frac{R^2+x_i^2+y_j^2-2Rx_i}{R_0^2+x_i^2+y_j^2-2R_0x_i}}\right)}$$
$$\times \sum_{i=-M}^{M}\sum_{j=-M}^{M} \frac{(x_K \pm r_0) - x_i}{(x_K \pm r_0)^2 + x_i^2 + y_j^2 - 2(x_K \pm r_0)x_i},$$

где $M = \frac{\sqrt{N}}{2}$. Знак „минус" перед $r_0$ соответствует полю на обращенной к центру скопления левой стороне микроканала, плюс — на противоположной, правой. С учетом условий (1) и (2) с точностью до членов порядка $R_0/R$ под знаком логарифма и $r_0/D^2$ в двойной сумме можно записать

$$E_{r_0}(K) = \frac{U_0}{\sum\limits_{i=-M}^{M}\sum\limits_{j=-M}^{M} \ln\left(\sqrt{\frac{R^2}{D^2\left(\left(\frac{R_0}{D}\right)^2+i^2+j^2-2\frac{R_0}{D}i\right)}}\right)}$$
$$\times\left(\pm\frac{1}{r_0} + \frac{1}{D}\sum_{i=-M}^{K-1}\sum_{j=-M}^{M}\frac{K-i}{(K-i)^2+j^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{D}\sum_{i=K+1}^{M}\sum_{j=-M}^{M}\frac{K-i}{(K-i)^2+j^2}\right).$$

Первое слагаемое в скобках — собственное поле микроканала, второе и третье характеризуют влияние остальных микроканалов скопления. На правой поверхности микроканала второе слагаемое усиливает, а третье ослабляет $(K - i < 0)$ собственное поле. На левой поверхности ситуация обратная.

Методом интегрального суммирования найдем приближенные выражения для полученных рядов, что позволит провести качественный анализ распределения поля в скоплении микроканалов

$$\sum_{i=-M}^{K-1}\sum_{j=-M}^{M}\frac{K-i}{(K-i)^2+j^2} = \int_{-M}^{K-1}dx\int_{-M}^{M}dy\,\frac{K-x}{(K-x)^2+y^2}$$
$$= \int_{1}^{M+K} rdr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\frac{r\cos\varphi}{r^2} = 2(K+M-1).$$

Аналогично

$$\sum_{i=K+1}^{M}\sum_{j=-M}^{M}\frac{K-i}{(K-i)^2+j^2} = -2(M-K-1).$$

При этом в первом и втором случаях мы заменили прямоугольные области интегрирования со сторонами $2M$,

$M+K$ и $2M$, $M-K$ кругами радиуса $M+K$ и $M-K$ соответственно. Данная замена не внесет существенной ошибки, поскольку подынтегральная функция убывает с расстоянием. Далее получаем

$$\sum_{i=-M}^{M}\sum_{j=-M}^{M}\ln\left(\sqrt{\frac{R^2}{D^2\left(\left(\frac{R_0}{D}\right)^2+i^2+j^2-2\,\frac{R_0}{D}\,i\right)}}\right)$$

$$=\sum_{i=-M}^{M}\sum_{j=-M}^{M}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{R}{D}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left[M^2+i^2+j^2-2Mi\right]\right)$$

$$=N\ln\left(\frac{R}{D}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=-M}^{M-1}\sum_{j=-M}^{M}\ln\left[(M-i)^2+j^2\right],$$

$$\sum_{i=-M}^{M-1}\sum_{j=-M}^{M}\ln\left[(M-i)^2+j^2\right]$$

$$\approx\int_{-M}^{M-1}dx\int_{-M}^{M}dy\ln\left[(M-x)^2+y^2\right]$$

$$=\int_{1}^{2M}dt\int_{-M}^{M}dy\ln[t^2+y^2]<\int_{1}^{2M}rdr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\ln(r^2)$$

$$=\pi\,\frac{(2M)^2}{2}\left(\ln(2M)^2-1\right).$$

Знак $<$ в последнем выражении отражает тот факт, что, переходя к полярным координатам, мы заменяем квадратную область интегрирования $(0,M)$, $(2M,M)$, $(2M,-M)$, $(0,-M)$ на больший по площади полукруг радиуса $2M$ при возрастающей подынтегральной функции. Для экспериментальных данных выполняется соотношение

$$\pi\,\frac{(2M)^2}{4}\left(\ln(2M)^2-1\right)<N\ln\left(\frac{R}{D}\right),$$

поэтому слагаемым $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=-M}^{M-1}\sum\limits_{j=-M}^{M}\ln\left[(M-i)^2+j^2\right]$ можно пренебречь. В итоге имеем

$$E_{r_0}(K)=\frac{U_0}{r_0}\,\frac{\pm1+4\frac{r_0}{D}K}{N\ln\left(\frac{R}{D}\right)}.$$

Видно, что поле минимально в центре скопления при $K=0$, растет по мере удаления от него и на правой стороне микроканала имеет только положительную компоненту. Максимального значения поле достигает на границе скопления при $K=M=\frac{\sqrt{N}}{2}$:

$$(E_N)^{\max}=\frac{U_0}{r_0}\,\frac{\pm1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{r_0}{R_0}\,N}{N\ln\left(\frac{R}{R_0}\sqrt{\frac{N}{\pi}}\right)}. \tag{5}$$

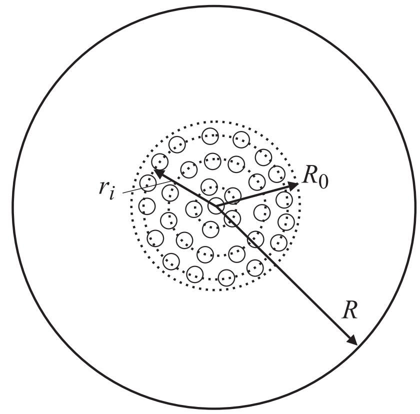


**Рис. 2.** Схема расчета электрического поля скопления микроканалов с высокой плотностью распределения.

На левой стороне микроканала поле отрицательно в центре скопления, обращается в ноль при

$$K_0=\frac{D}{4r_0} \tag{6}$$

и далее имеет только положительную составляющую. Скачок поля при переходе с левой границы микроканала на правую не зависит от $K$ и равен

$$\Delta E_{r_0}=\frac{2U_0}{r_0N\ln\left(\frac{R}{D}\right)}. \tag{7}$$

## 2. Расчет поля скопления микроканалов высокой плотности

Эксперименты [3] свидетельствуют о том, что в искровом разряде $r_0\sim D$ некоторые микроканалы сливаются друг с другом и их взаимным влиянием пренебрегать уже нельзя. В связи с этим можно, однако, попытаться представить их совокупность как систему концентрических цилиндров (рис. 2) с радиусами $r_i=iD$ $(i=1,2,\ldots M)$, где $M=\frac{R_0}{D}$, на каждом из которых находится заряд $Q_0$. Соответствующая система уравнений запишется как

$$\Delta\varphi(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{m=1}^{M}Q_0\delta(r-mD),$$

$$\int_{R_0}^{R}E(r)dr=U_0,\quad E(r)=-\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

где $\varepsilon_0$ — диэлектрическая постоянная, $\delta(\ldots)$ — дельта-функция Дирака. Задача имеет аналитическое решение

$$E(r)=\frac{1}{r}\,\frac{U_0S(r)\big(S(r)+1\big)}{M(M+1)\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}, \tag{8}$$

где

$$S(r)=\begin{cases}\left[\frac{r}{R_0}M\right], & \text{при } r\le R_0\\ M, & \text{при } r>R_0\end{cases},\quad [x] \text{ — целая часть числа } x.$$

## Результаты и их обсуждение

По данным экспериментов [2,3], из всех параметров микроструктуры, входящих в выражения (4) и (8), неопределенной является величина $U_0$. Это связано с тем, что при пробое напряжение на разрядном промежутке начинает резко спадать и его значение в фазе существования микроструктуры не известно. Для расчетов по (4) положим $U_0 = 30\,\mathrm{kV}$, по (8) $U_0 = 11\,\mathrm{kV}$. Ниже будет показано, что это верхние границы значений величины $U_0$, при которых максимальное поле в скоплении меньше критического.

1. Поле скопления микроканалов малой плотности

На рис. 3 представлены результаты численного расчета по формуле (4) для данных [2] $r_0 = 2\,\mu\mathrm{m}$, $R_0 = 0.175\,\mathrm{cm}$, $R = 20\,\mathrm{cm}$ и $N = 3000$. Видно, что поле ступенчатым образом спадает по мере продвижения внутрь скопления микроканалов и приобретает отрицательную компоненту в центральной части. Максимального значения поле достигает на границе $R_0$. На рис. 4 представлена зависимость максимального поля $(E_N)^{\max}$ от числа микроканалов в скоплении для разных значений $R_0$, а на рис. 5 — для разных значений $r_0$. Видно, что поле скопления убывает с увеличением $N$ и с ростом их радиуса $r_0$. Сравнение результатов численных расчетов с аналитическим приближением (5)–(7) показывает, что формула (5) правильно отражает основные закономерности распределения поля в скоплении микроканалов и дает близкие к расчетным числовые значения, например $(E_N)^{\max} = 30\,\mathrm{kV/cm}$, $\Delta E_{r_0} = 12\,\mathrm{kV/cm}$, $K_0 = 7$. Внутри скопления происходит взаимное ослабление полей микроканалов и общее поле значительно снижается по сравнению с полем уединенного микроканала того же радиуса, которое равно

$$(E_1)^{\max} \frac{U_0}{r_0 \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} \approx 13\,\mathrm{MV/cm}.$$

Поле на поверхности микроканала, находящегося в центре скопления, будет

$$(E_N)^c = \frac{U_0}{r_0 N \ln\left(\frac{R}{R_0}\sqrt{\frac{N}{\pi}}\right)}.$$

Поле на границе скопления при больших $N$ составляет

$$(E_N)^b = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{U_0}{R_0 \ln\left(\frac{R}{R_0}\sqrt{\frac{N}{\pi}}\right)}.$$

Сравнение последних выражений показывает, что напряженность поля на внешней поверхности скопления определяется диаметром канала, а в центре ослабляется примерно в N раз по сравнению с полем уединенного микроканала.

Для существования микроканалов необходимо, чтобы $(E_N)^{\max}$ стало меньше $E_{\mathrm{cr}}$. Величину $E_{\mathrm{cr}}$ можно оценить,

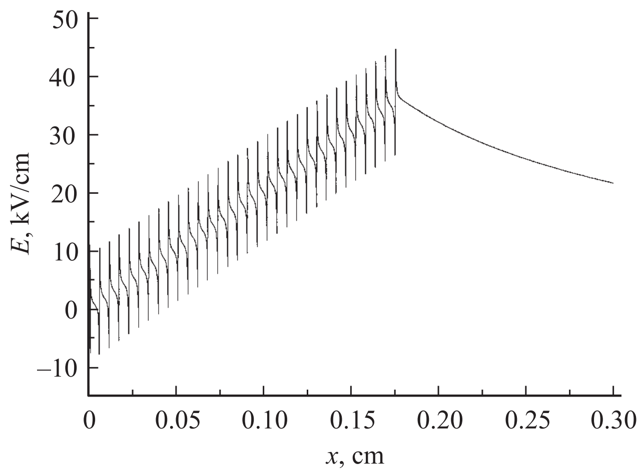


**Рис. 3.** Распределение напряженности поля.

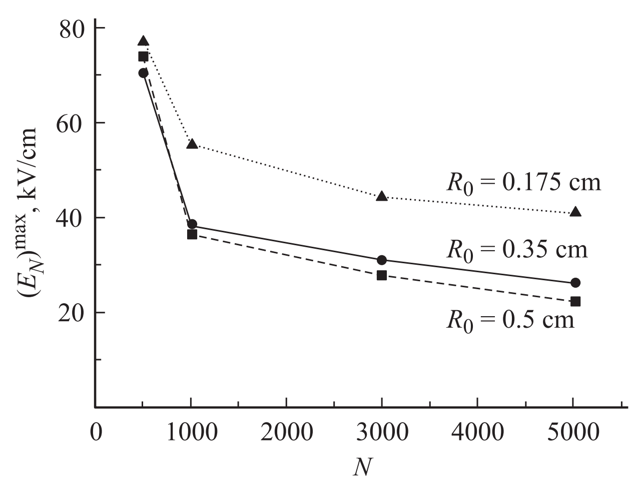


**Рис. 4.** Зависимость максимального поля скопления от числа микроканалов для разных значений $R_0$ ($U_0 = 30\,\mathrm{kV}$, $r_0 = 2\,\mu\mathrm{m}$, $R = 20\,\mathrm{cm}$).

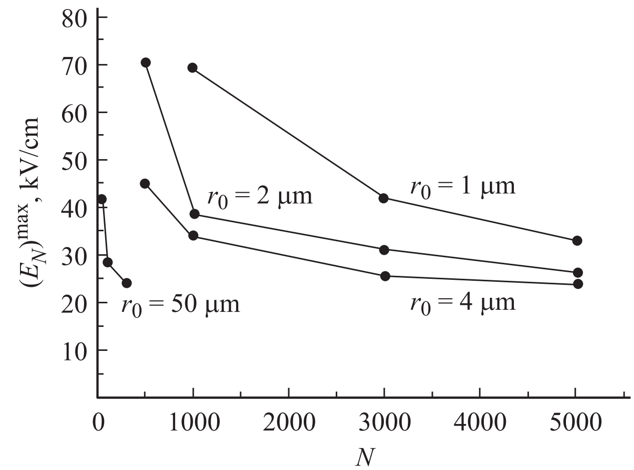


**Рис. 5.** Зависимость максимального поля скопления от числа микроканалов для разных значений $r_0$ ($U_0 = 30\,\mathrm{kV}$, $R_0 = 0.35\,\mathrm{cm}$, $R = 20\,\mathrm{cm}$).

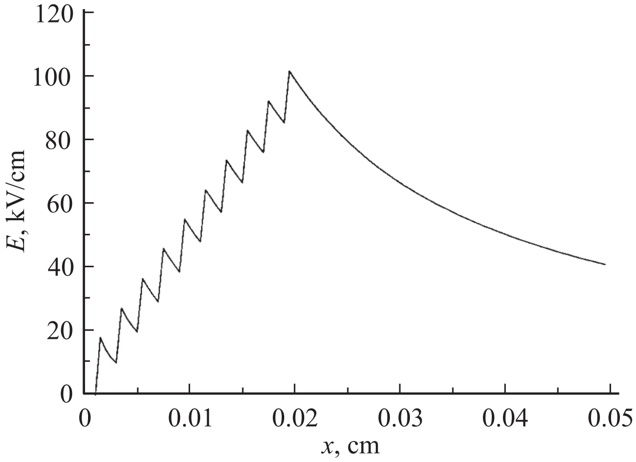


**Рис. 6.** Распределение напряженности поля.

заменяя скопление микроканалов сплошным проводником радиуса $R_0$. По аналогии с [6] воспользуемся эмпирической формулой Пика для порогового радиального поля у поверхности провода радиуса $R_0$, при котором около провода зажигается коронный разряд. Для воздуха при нормальных условиях

$$E_{cr} = 31\left(1 + \frac{0.308}{\sqrt{R_0}}\right)\,\text{kV/cm}. \qquad (9)$$

Отсюда для рассматриваемых $R_0$ получаем $E_{cr} = (44-54)$ kV/cm. Тогда в соответствии с (4) при $U_0 \le (30-36)$ kV выполняется условие $(E_N)^{\max} \le E_{cr}$. Отметим, что при $U_0 = 60$ kV условие $(E_N)^{\max} \le E_{cr}$ выполняется для $r_0 = 50\,\mu$m, начиная с $N = 500$, в то время как в [6] указанное условие для одиночного канала выполняется при $r_0 = 0.23$ cm.

2. Поле скопления микроканалов высокой плотности

В этом случае механизм ослабления поля в скоплении микроканалов аналогичен рассмотренному выше, однако использование формул (5)–(7), по-видимому, неправомерно в силу сделанных выше замечаний. Результаты расчета по формуле (8) для данных [3] $r_0 = 5\,\mu$m, $R_0 = 0.02$ cm, $R = 5$ cm и $N = 700$ представлены на рис. 6. Критическое поле (9) в этом случае составляет $E_{cr} = 100$ kV/cm и $(E_N)^{\max} \le E_{cr}$ при $U_0 \le 11$ kV.

Отметим, что в отличие от рассмотренных выше случаев, когда ослабление поля в скоплении микроканалов возможно благодаря большому количеству $N$, существование одиночных ($N = 1$) микроканалов в барьерном разряде [5], по-видимому, объясняется относительно низким значением $U_0$. Так, напряжение пробоя в указанных экспериментах составляло 4.5–9 kV. Однако оценка параметра $U_0$ с использованием формулы (9) неправомерна, поскольку данная формула неприменима для микронных $R_0 = r_0$ [8].

## Заключение

Взаимное ослабление радиального поля системы микроканалов до $E < E_{cr}$ допускает возможность существования групп микроканалов с $r_0 < 10\,\mu$m. Поле скопления убывает с ростом числа микроканалов $N$, что позволяет объяснить существование микроструктуры в высоковольтных наносекундных диффузном и искровом разрядах, где $N$ велико. Существование одиночных микроканалов в барьерном разряде, по-видимому, объясняется относительно низким значением напряжения $U_0$.

## Список литературы


[1] *Буранов С.Н., Горохов В.В., Карелин В.И.* и др. // Квантовая электроника. 1991. Т. 18. Вып. 7. С. 891–893.
[2] *Буранов С.Н., Горохов В.В., Карелин В.И.* и др. Микроструктура токовых каналов и убегание электронов в высоковольтных диффузных разрядах атмосферного давления. Исследования по физике плазмы / Под ред. В.Д. Селемира, А.Е. Дубинова. Саров, 1998. С. 39–67.
[3] *Перминов А.В., Тренькин А.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 52–55.
[4] *Лозанский Э.Д., Фирсов О.Б.* Теория искры. Атомиздат, 1975. 272 с.
[5] *Буранов С.Н., Горохов В.В., Карелин В.И.* и др. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 10. С. 40–44.
[6] *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* Искровой разряд. М.: Изд. МФТИ, 1997. 320 с.
[7] *Самойлович В.Г., Гибалов В.Ч., Козлов К.В.* Физическая химия барьерного разряда. М., 1989. 176 с.
[8] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.