

01;09

## Моды „шепчущей галереи“ в полушаровом изотропном диэлектрическом резонаторе с идеально проводящей плоской поверхностью

© Ю.В. Прокопенко, Ю.Ф. Филиппов, И.А. Шипилова, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,  
61085 Харьков, Украина  
e-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 23 мая 2005 г.)

Исследованы собственные колебания полушарового изотропного диэлектрического резонатора, размещенного на идеально проводящей плоской поверхности. Показано, что в резонаторе существуют независимые  $E$  и  $H$  колебания. Для  $E$  и  $H$  мод суммы полярных и азимутальных индексов  $n + m$  имеют нечетные и четные значения соответственно. В результате собственным  $E$  и  $H$  колебаниям резонатора присущи  $n$  и  $n + 1$ -кратное частотное вырождение по азимутальному индексу  $m$ . Приведены распределения полей мод „шепчущей галереи“ на поверхности полушара и проводящей плоскости вне него. Изучено распределение энергии между модами исследуемого резонатора для собственных колебаний с полярным индексом  $n = 36$ . Получены численные зависимости полярного угла, соответствующего максимуму поля, и полярной угловой ширины области распределения энергии мод „шепчущей галереи“. Сопоставлены количества вариаций поля по сферическим координатам с модовыми индексами собственных колебаний резонатора. Приведены зависимости собственных частот и добротностей резонатора, расположенного в изотропной среде, состоящей из различных веществ, в восьмимиллиметровом диапазоне длин волн.

PACS: 42.25.-p

### Введение

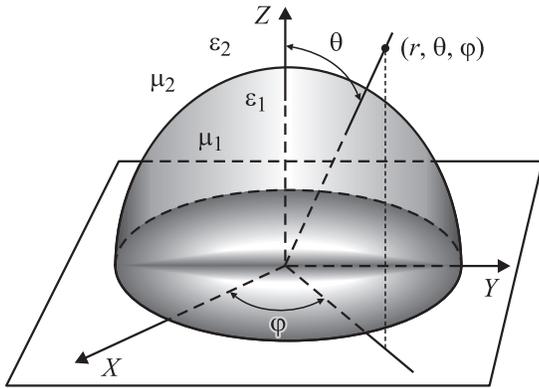
Интерес к исследованию открытых диэлектрических резонаторов с колебаниями „шепчущей галереи“ во многом обусловлен их практическим применением при неразрушающем измерении комплексной диэлектрической проницаемости веществ [1–3], для определения поверхностного импеданса металлов и тонких пленок высокотемпературных сверхпроводников [3–5], для фильтрации сигналов [6] и стабилизации частоты генераторов [7]. Слабое излучение энергии колебаний „шепчущей галереи“ из резонатора объясняется полным внутренним отражением их от цилиндрической или сферической поверхности. Это явление впервые было объяснено на примере звуковых колебаний, возникающих в цилиндрической галерее [8].

Спектральные и энергетические характеристики резонаторов и распределение полей их собственных колебаний являются основополагающими при проектировании радиоэлектронных устройств. Электродинамический анализ изотропного диэлектрического шара проведен в работах [9,10]. Радиальные и угловые по полярному углу структуры полей колебаний „шепчущей галереи“ изотропного диэлектрического шара описаны в работе [11]. В работе [1] исследован шаровой диэлектрический резонатор, погруженный в изотропную среду. Широкое применение одноосных монокристаллов рубина, сапфира, кварца, обладающих малыми диэлектрическими потерями, привело к необходимости исследования собственных колебаний анизотропного шара, погруженного в изотропную среду [12].

Трудности использования диэлектрического шара в качестве резонансной системы генератора вызывали необходимость модернизации его формы. Существенно расширенными функциональными возможностями обладает полушаровой диэлектрический резонатор, расположенный на плоской проводящей поверхности [13]. Кроме того, такой резонатор позволяет изучать поверхностные свойства проводников, в том числе и сверхпроводников. Теоретическое изучение полушарового диэлектрического резонатора с плоским металлическим зеркалом, расположенного в вакуумной среде, проведено в [14]. Однако исследования распределений полей собственных колебаний такого резонатора отсутствуют, не выработана методика определения модовых индексов собственных колебаний резонатора. Ясно, что применение диэлектрического полушара для определения микроволновых свойств среды требует детального изучения характеристик резонатора, погруженного в эту среду.

### Собственные колебания резонатора

В работе рассмотрен полушаровой диэлектрический резонатор, расположенный на идеально проводящей плоской неограниченной поверхности (рис. 1). Полушар изготовлен из изотропного и однородного вещества с комплексными значениями диэлектрической  $\epsilon_1$  и магнитной  $\mu_1$  проницаемостей. Резонатор помещен в среду с комплексными проницаемостями  $\epsilon_2$  и  $\mu_2$ . Радиус полушара —  $r_0$ .



**Рис. 1.** Полусферовой диэлектрический резонатор с неограниченной проводящей плоскостью.

Система уравнений Максвелла в сферической системе координат для компонентов поля имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r E_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} E_r &= ikr\mu_\nu H_\varphi; \\ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta E_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\theta \right) &= ikr\mu_\nu H_r; \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r - \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi &= ikr\mu_\nu H_\theta; \\ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta H_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\theta \right) &= -ikr\varepsilon_\nu E_r; \quad (1) \\ \frac{\partial}{\partial r} r H_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} H_r &= -ikr\varepsilon_\nu E_\varphi; \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_r - \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi &= -ikr\varepsilon_\nu E_\theta, \end{aligned}$$

где  $\nu = 1$  при  $r \leq r_0$  и  $\nu = 2$  при  $r > r_0$ ;  $k = \omega/c$ , где  $c$  — скорость света и  $\omega = \omega' - i\omega''$  ( $\omega'' \geq 0$ ) — собственная частота резонатора. Все компоненты поля содержат временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , который в дальнейших соотношениях не приводится.

После исключения из (1)  $E_\theta$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\theta$  и  $H_\varphi$  компонентов система уравнений Максвелла приводится к решению однородных дифференциальных уравнений относительно радиальных компонентов  $H_r$  и  $E_r$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) r^2 + \Delta_\perp \right] H_r(r, \theta, \varphi) &= 0; \\ \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) r^2 + \Delta_\perp \right] E_r(r, \theta, \varphi) &= 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь оператор  $\Delta_\perp = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  и  $\chi_\nu = k\sqrt{\varepsilon_\nu \mu_\nu}$ .

Введя функции  $U(r, \theta, \varphi)$  и  $V(r, \theta, \varphi)$  соотношениями для радиальных компонентов поля

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \varphi) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) U(r, \theta, \varphi) \\ \text{и} \\ H_r(r, \theta, \varphi) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) V(r, \theta, \varphi), \quad (3) \end{aligned}$$

уравнения (2) получаем в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 + \frac{\Delta_\perp}{r^2} \right) U(r, \theta, \varphi) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 + \frac{\Delta_\perp}{r^2} \right) V(r, \theta, \varphi) &= 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Тангенциальные компоненты полей собственных колебаний резонатора выражаются через функции  $U(r, \theta, \varphi)$  и  $V(r, \theta, \varphi)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} r E_\varphi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r} - ik\mu_\nu \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \\ r H_\varphi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 V(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r} + ik\varepsilon_\nu \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \\ r E_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial^2 U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r} + \frac{ik\mu_\nu}{\sin \theta} \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ r H_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial^2 V(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r} - \frac{ik\varepsilon_\nu}{\sin \theta} \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (5) \end{aligned}$$

Решения уравнений (4) находятся в виде

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varphi) &= R_n^U(\chi_\nu r) Y_{nm}(\theta, \varphi), \\ V(r, \theta, \varphi) &= R_n^V(\chi_\nu r) Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (6) \end{aligned}$$

где  $Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$  — собственные функции оператора  $\Delta_\perp$ ,  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра, отличные от нуля при  $m \leq n$ , что означает отсутствие полей колебаний с индексами  $m > n$ . Подставляя (6) в уравнения (4) и разделяя переменные, получаем однородные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R_n^{U(V)}(\chi_\nu r) &= 0, \\ \Delta_\perp Y_{nm}(\theta, \varphi) + n(n+1) Y_{nm}(\theta, \varphi) &= 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Так как  $m$  и  $n$  характеризуют зависимости  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  от азимутальной  $\varphi$  и полярной  $\theta$  координат соответственно, то  $m$  является азимутальным, а  $n$  — полярным индексом. Причем, в силу однозначности полей (4), (5)

в каждой точке пространства, как внутри так и вне полушара,  $m$  являются целыми числами ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Из выражений (3), (4), (6) и (7) следуют зависимости  $E_r(r, \theta, \varphi)$  и  $H_r(r, \theta, \varphi)$  компонентов поля в виде

$$E_r(r, \theta, \varphi) = \frac{n(n+1)}{r^2} U(r, \theta, \varphi)$$

и

$$H_r(r, \theta, \varphi) = \frac{n(n+1)}{r^2} V(r, \theta, \varphi). \quad (8)$$

Одновременное обращение  $E_r(r, \theta, \varphi)$  и  $H_r(r, \theta, \varphi)$  компонентов поля в нуль происходит при  $n = 0$ , при этом, согласно (1), электромагнитное поле в резонаторе также равно нулю. Таким образом, в полушаровом, как и в шаровом [15], диэлектрическом резонаторе индекс  $n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Функции  $R_n^{U(V)}(\chi_{vr})$ , представляющие собой решение дифференциального уравнения (7), в общем случае, имеют вид

$$R_n^{U(V)}(\chi_{vr}) = C_v^{U(V)} j_n(\chi_{vr}) + B_v^{U(V)} h_n^{(1)}(\chi_{vr}).$$

Здесь  $C_v^{U(V)}$  и  $B_v^{U(V)}$  — постоянные величины;  $j_n(z) = \sqrt{\pi z/2} J_{n+1/2}(z)$  и  $h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\pi z/2} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ , где  $J_{n+1/2}(z)$  и  $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$  — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно. Электромагнитное поле является конечным в центре полушара и удовлетворяет условию излучения волны на бесконечности. Следовательно, учитывая свойства цилиндрических функций, внутри полушара  $B_2^{U(V)} \equiv 0$ , а вне —  $C_1^{U(V)} \equiv 0$ . Удовлетворяя условию непрерывности тангенциальных компонентов напряженностей электромагнитных полей ( $E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ ) на сферической поверхности резонатора  $r = r_0$ , получаем для вспомогательных функций  $U(r, \theta, \varphi)$  и  $V(r, \theta, \varphi)$  следующие выражения:

$$U(r, \theta, \varphi) = C_1^U P_n^m(\cos \theta) \times \exp(im\varphi) \begin{cases} j_n(\chi_1 r), & r \leq r_0 \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{j_n(\chi_1 r_0)}{h_n^{(1)}(\chi_2 r_0)} h_n^{(1)}(\chi_2 r), & r \geq r_0 \end{cases}; \quad (9)$$

$$V(r, \theta, \varphi) = C_1^V P_n^m(\cos \theta) \times \exp(im\varphi) \begin{cases} j_n(\chi_1 r), & r \leq r_0 \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{j_n(\chi_1 r_0)}{h_n^{(1)}(\chi_2 r_0)} h_n^{(1)}(\chi_2 r), & r \geq r_0 \end{cases}.$$

Постоянные  $C_1^{U(V)}$  определяются из условий возбуждения резонатора.

Для функций  $P_n^m(\cos \theta)$  и  $\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta)$  на проводящей поверхности ( $\theta = \pi/2$ ) справедливы соотношения [16]

$$P_n^m(0) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+m)\right) \frac{\Gamma((n+m+1)/2)}{\Gamma((n-m+2)/2)};$$

$$\left. \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+m)\right) \times \frac{\Gamma((2+n+m)/2)}{\Gamma((1+n-m)/2)}, \quad (10)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. На проводящей поверхности резонатора  $E_r(r, \theta, \varphi)$  и  $E_\varphi(r, \theta, \varphi)$  компоненты поля обращаются в нуль. Из выражений (5) и (10) следует, что данные граничные условия выполняются в случае, когда сумма индексов  $n$  и  $m$  принимает нечетные значения,  $V(r, \theta, \varphi) \equiv 0$ , т.е.  $H_r(r, \theta, \varphi) = 0$ . Таким образом, если  $n+m$  имеет нечетные значения, то существуют только колебания  $E$  типа. Когда  $n+m$  принимает четные значения,  $E_r(r, \theta = \pi/2, \varphi) = E_\varphi(r, \theta = \pi/2, \varphi) = 0$  только при  $U(r, \theta, \varphi) \equiv 0$ , т.е.  $E_r(r, \theta, \varphi) = 0$ . В этом случае существуют только колебания  $H$  типа. Следовательно, в резонаторе азимутально-однородных  $H$  колебаний ( $m = 0$ ) с нечетным полярным индексом  $n$  не существует. В свою очередь, азимутально-однородных  $E$  колебаний с четным полярным индексом  $n$  также не существует. Диэлектрический изотропный полушаровой резонатор с идеально проводящей плоской поверхностью не имеет азимутальных  $E$  колебаний ( $m = n$ ).

Собственные частоты изотропного диэлектрического полушара с идеально проводящей плоской поверхностью, погруженного в изотропную среду, определяются решениями независимых дисперсионных уравнений: для  $E$  колебаний

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \frac{j_n'(\chi_1 r_0)}{j_n(\chi_1 r_0)} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \frac{h_n^{(1)' }(\chi_2 r_0)}{h_n^{(1)}(\chi_2 r_0)}, \quad (11)$$

для  $H$  колебаний

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{j_n'(\chi_1 r_0)}{j_n(\chi_1 r_0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{h_n^{(1)' }(\chi_2 r_0)}{h_n^{(1)}(\chi_2 r_0)}. \quad (12)$$

Штрих обозначает дифференцирование функции по аргументу. В исследуемом резонаторе существуют независимые  $H$  ( $E_r(r, \theta, \varphi) = 0$ ) и  $E$  ( $H_r(r, \theta, \varphi) = 0$ ) колебания.

В дисперсионных уравнениях (11) и (12) азимутальный индекс  $m$  отсутствует. Это приводит к частотному вырождению собственных колебаний резонатора по индексу  $m$ . С учетом особенности сумм полярных и азимутальных индексов ( $n+m$ ) собственных колебаний исследуемого резонатора  $E$  и  $H$  колебания имеют  $n$ -кратное и  $n+1$ -кратное вырождение по частоте соответственно. При этом собственные моды резонатора отличаются различной зависимостью от угловых координат  $\theta$  и  $\varphi$ .

При четном значении полярного индекса  $n$  существует  $n/2 E$  мод и  $n/2 + 1 H$  мод с различными индексами  $m$ . Количество  $E$  и  $H$  мод при заданом нечетном значении  $n$  равно  $(n + 1)/2$ . Все моды с  $m \neq 0$  являются двукратно вырожденными по частоте. Имеющееся частотное вырождение собственных колебаний по  $m$  обусловлено угловой зависимостью функций  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  и соблюдением граничных условий на идеально проводящей плоской поверхности.

Таким образом, наличие плоской идеально проводящей поверхности приводит к разделению типов собственных колебаний и, следовательно, к частичному снятию частотного вырождения собственных колебаний исследуемого резонатора по сравнению с изотропным шаром.

Каждая мода резонатора в общем случае характеризуется тремя индексами  $n, m$  и  $s$ . Физический смысл этих индексов определяется структурой распределения  $E_r(r, \theta, \varphi)$  или  $H_r(r, \theta, \varphi)$  компонента поля моды резонатора. Азимутальный индекс  $m$  соответствует половине числа вариаций поля по азимутальному углу  $\varphi$ . Количество вариаций поля  $p$  по полярному углу  $\theta$  определяется из условия

$$p \geq (n - m + 1)/2 \quad (13)$$

округлением до целого числа в сторону увеличения. В частности, полярный индекс  $n$  однозначно определяет число вариаций поля ( $p \geq (n + 1)/2$ ) по координате  $\theta$  для азимутально-однородных колебаний ( $m = 0$ ). Радиальный индекс  $s$ , который соответствует порядковому номеру корня дисперсионного уравнения (11) или (12), определяет число вариаций поля по радиальной координате  $r$ .

Плотность энергии собственного колебания резонатора в любой точке наблюдения определяется соотношением [17]

$$w = (\varepsilon_v \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \mu_v \mathbf{H}\mathbf{H}^* + \text{к.с.})/16\pi,$$

где звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину, а к.с. — на комплексно-сопряженное выражение. Компоненты векторов электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей определяются соотношениями (5) и (8) с учетом (9). Добротность резонатора с собственным колебанием определяется выражением  $Q = \omega'/2\omega''$  [15].

## Моды „шепчущей галереи“

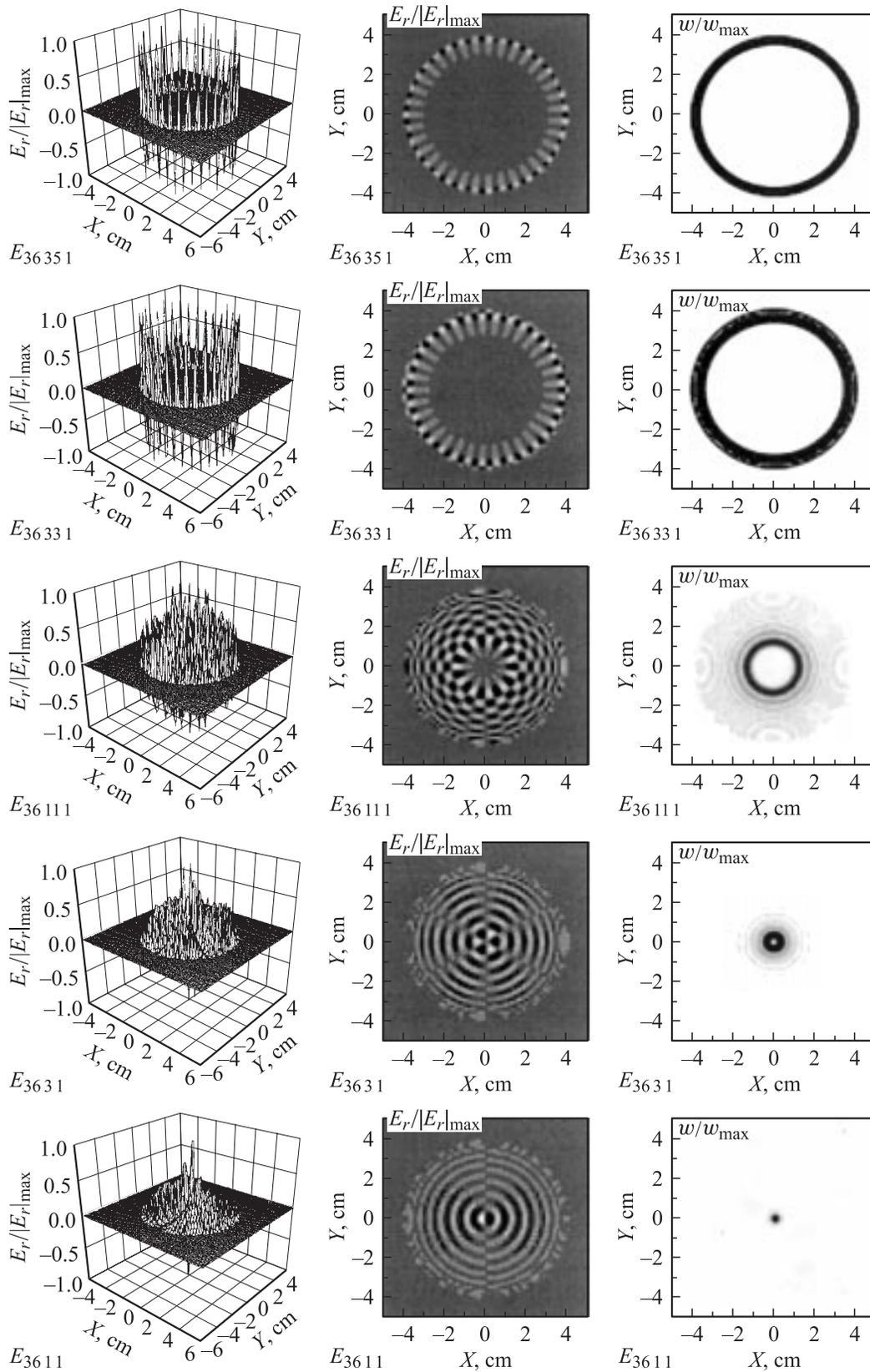
Численные исследования были проведены для полушарового резонатора из фторопласта ( $\varepsilon_1 = 2.04 \times (1 + 1.7 \times 10^{-4}i)$ ,  $\mu_1 = 1$ ) с радиусом  $r_0 = 3.9$  см, расположенного на идеально проводящей плоскости. Резонатор помещался в среду  $\varepsilon_2 = \mu_2 = 1$ . Проводились исследования независимых собственных  $E_{36ms}$  и  $H_{36ms}$  колебаний резонатора с радиальными индексами  $s = 1, 2$ . Частоты собственных мод  $f = \omega'/2\pi$  и добротности  $Q$  исследуемого резонатора с соответствующими

Моды	$E_{36m1}$	$E_{36m2}$	$H_{36m1}$	$H_{36m2}$
$f, \text{GHz}$	35.989	40.139	35.445	39.743
$Q$	4678.4	304.04	5017.7	498.65

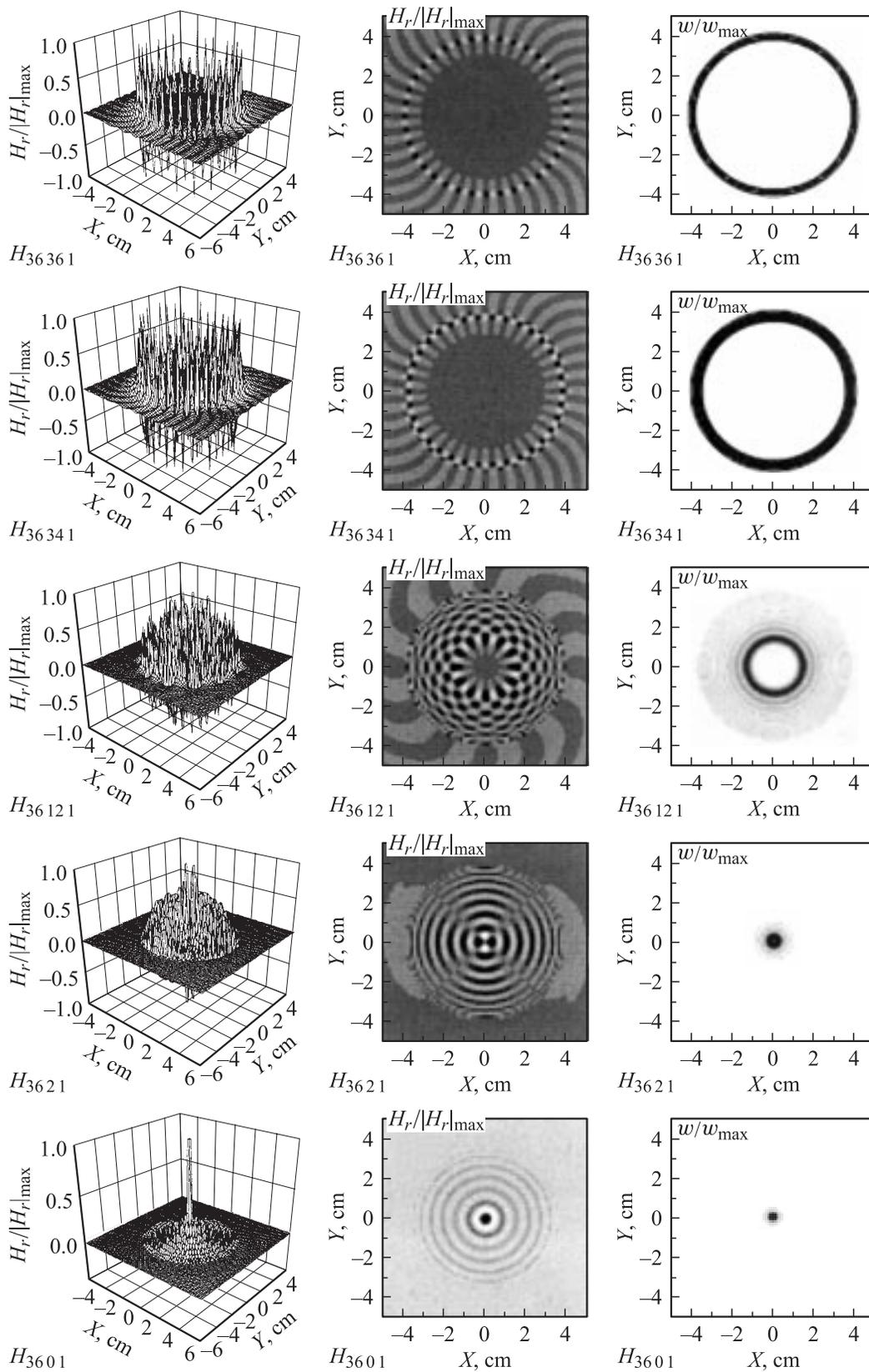
модами приведены в таблице. Добротности резонатора с  $H$  колебаниями выше, чем с  $E$  колебаниями при одинаковых значениях радиальных индексов  $s$ , несмотря на более низкие собственные частоты.

Распределения радиальных компонентов и плотностей энергий полей собственных  $E_{36m1}$  и  $H_{36m1}$  колебаний на поверхности полушара и проводящей плоскости вне области диэлектрика приведены на рис. 2 и рис. 3 соответственно. При получении численных результатов использовалось нормирование соответствующих величин на их максимальные значения для каждой моды резонатора, что позволило решить проблему определения постоянных  $C_1^{U(V)}$  в соотношениях (9). Трехмерное представление модовых радиальных компонентов полей отображает их распределение на поверхности полушара и проводящей плоскости с учетом функциональной зависимости от углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Двумерные представления радиальных компонентов и плотностей энергий электромагнитных полей отображают их топологии на плоскости  $(x, y)$ . Значения соответствующих величин представлены уровневой градацией белого и черного цветов. Черный цвет соответствует максимальным значениям радиального компонента и плотности энергии поля, белый — минимальным на поверхности полушара и проводящей плоскости вне области диэлектрика. Фактически топологическое представление поля отображает его реальное распределение по угловым координатам  $\theta$  и  $\varphi$  на поверхности исследуемого резонатора. Мелкомасштабное представление слегка скрывает реальное распределение поля по полярному углу  $\theta$ . Исследования показали, что это распределение поля по углу  $\theta$  для каждой моды полностью соответствует характеру присоединенной функции Лежандра  $P_n^m(\cos \theta)$  в диапазоне  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . В результате затемненные области указывают на локализации поля соответствующей моды. Например, поле собственного азимутального колебания  $H_{nn1}$  ( $n = 36$ ) с одной вариацией по углу  $\theta$  сосредоточено в виде „пояска“, расположенного вблизи проводящей поверхности и параллельно ей (рис. 3). Экспериментальное наблюдение такого энергетического распределения поля резонансного  $H$  колебания отмечено в работе [18]. В эксперименте при возбуждении исследуемого резонатора диэлектрическим волноводом на его полосу обнаружено резонансное  $E$  колебание с распределением поля в виде „пояска“, проходящего через полюс полушара [13]. Наблюдаемое сосредоточение поля соответствует собственной моде резонатора  $E_{3611}$  (рис. 2).

Аналогичный характер нормированных распределений полей на поверхности полушара и проводящей



**Рис. 2.** Распределение  $E_r$  компонента и плотности энергии поля  $w$  на поверхности полушара и проводящей плоскости вне полушара.



**Рис. 3.** Распределение  $H_r$  компонента и плотности энергии поля  $w$  на поверхности полушара и проводящей плоскости вне полушара.

плоскости вне области диэлектрика наблюдается и для собственных мод резонатора с радиальными индексами  $s = 2$ , отличие в том, что плотности энергии этих мод гораздо меньше, несмотря на более высокие частоты (таблица). Максимумы полей мод с  $s = 2$  более удалены от поверхности диэлектрика к центру полушара. Из двух вариаций поля по радиусу вариация, расположенная ближе к центру, имеет большую плотность энергии и радиальную ширину.

## Пространственная селекция собственных мод полушара

Зависимости полярного угла  $\theta_{\max}$ , соответствующего максимуму поля, и полярной угловой ширины  $\Delta\theta$  области локализации энергии мод „шепчущей галереи“ исследуемого резонатора приведены на рис. 4. Наименьшей угловой шириной  $\Delta\theta$  обладает  $H_{nn1}$  мода резонатора с одной вариацией по  $\theta$ , максимум поля которой расположен под углом  $\theta_{\max} = \pi/2$ , т.е. на поверхности проводящей плоскости. Для  $H_{36361}$  моды  $\Delta\theta = 21.4^\circ$ . Распределение нормированной плотности энергии  $w/w_{\max}$  между модами „шепчущей галереи“ резонатора приведено на рис. 5. Собственная  $H_{nn1}$  мода резонатора имеет наибольшую плотность энергии. Следующей по плотности энергии собственной модой резонатора является  $E_{nn-11}$  мода. Максимум поля  $E_{36351}$  моды, имеющей одну вариацию по углу  $\theta$  с шириной  $\Delta\theta = 28.9^\circ$ , расположен под углом  $\theta_{\max} = 86^\circ$ . В порядке уменьшения плотностей энергий полей следующими собственными модами резонатора с двумя вариациями поля по полярному углу  $\theta$  являются  $H_{nn-21}$  и  $E_{nn-31}$  соответственно. С уменьшением азимутального индекса  $m$  поля собственных мод резонатора обладают меньшей плотностью энергии и имеют большую угловую ширину  $\Delta\theta$ . Кроме того, увеличивается количество вариаций поля по углу  $\theta$ . Для любой собственной моды исследуемого резонатора из всех вариаций поля по полярному углу вариация, расположенная ближе к полюсу полушара, имеет наибольшую угловую ширину  $\Delta\theta$  и обладает наибольшей плотностью энергии. Собственная азимутально-однородная мода резонатора ( $m = 0$ ) имеет угловую ширину локализации поля  $\Delta\theta = \pi/2$ , т.е. энергия данной моды распределена по всей поверхности полушара с максимумом внутри диэлектрика вблизи поверхности. Основное сосредоточение энергии данной моды наблюдается на полюсе полушара ( $\theta_{\max} = 0$ ). Максимумы энергий мод „шепчущей галереи“ исследуемого резонатора с азимутальными индексами  $m \rightarrow 0$  перемещаются к полюсу полушара.

Из особенности распределения поля мод „шепчущей галереи“ полушарового диэлектрического резонатора с идеально проводящей плоской поверхностью по угловым координатам следует, что для выделения и наиболее эффективного возбуждения конкретной собственной моды резонатора источник возбуждения необхо-

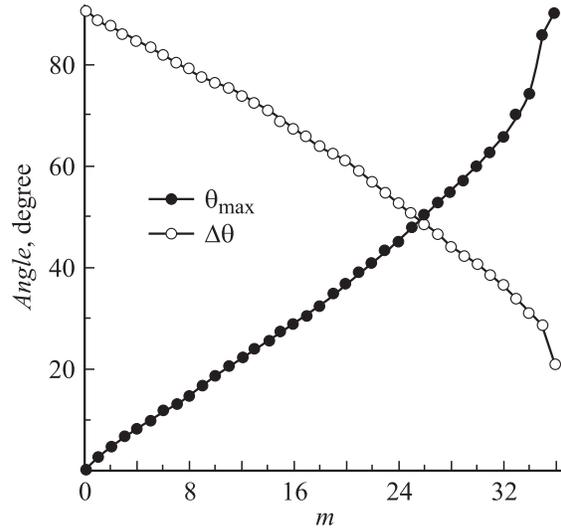


Рис. 4. Зависимость  $\theta_{\max}$  и  $\Delta\theta$  полей мод „шепчущей галереи“ с полярным индексом  $n = 36$  на поверхности полушара.

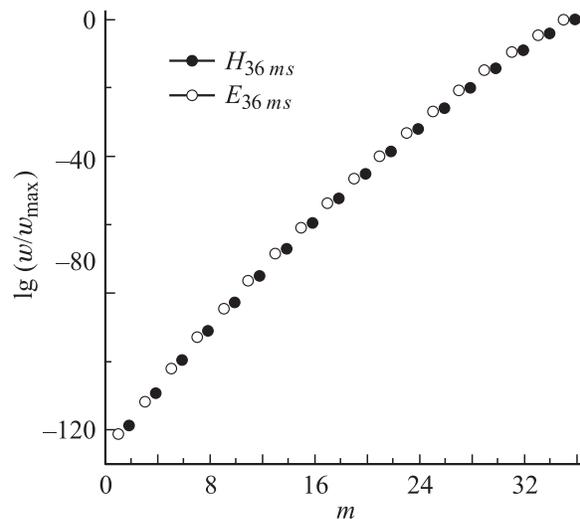


Рис. 5. Распределение энергии между модами „шепчущей галереи“ резонатора с полярным индексом  $n = 36$ .

димо располагать у поверхности полушара в точке с полярной координатой  $\theta_{\max}$ . Наиболее эффективным возбуждение резонатора будет при выделении  $H_{nn1}$  моды или ближайших мод по азимутальному индексу  $m$  как  $H$ , так и  $E$  типов. При расположении источника возбуждения в поле вырожденных мод „шепчущей галереи“ резонатора возможно снятие их вырождения из-за внесения неоднородности [19]. Снятие вырождения приведет к распределению мод резонатора по частоте в диапазоне между частотами, соответствующими модам с полярными индексами  $n$  и  $n \pm 1$  в зависимости от типа колебания. В этом случае из-за резонансного характера возбуждения будет осуществляться угловая селекция мод „шепчущей галереи“ по полярному углу  $\theta_{\max}$ .

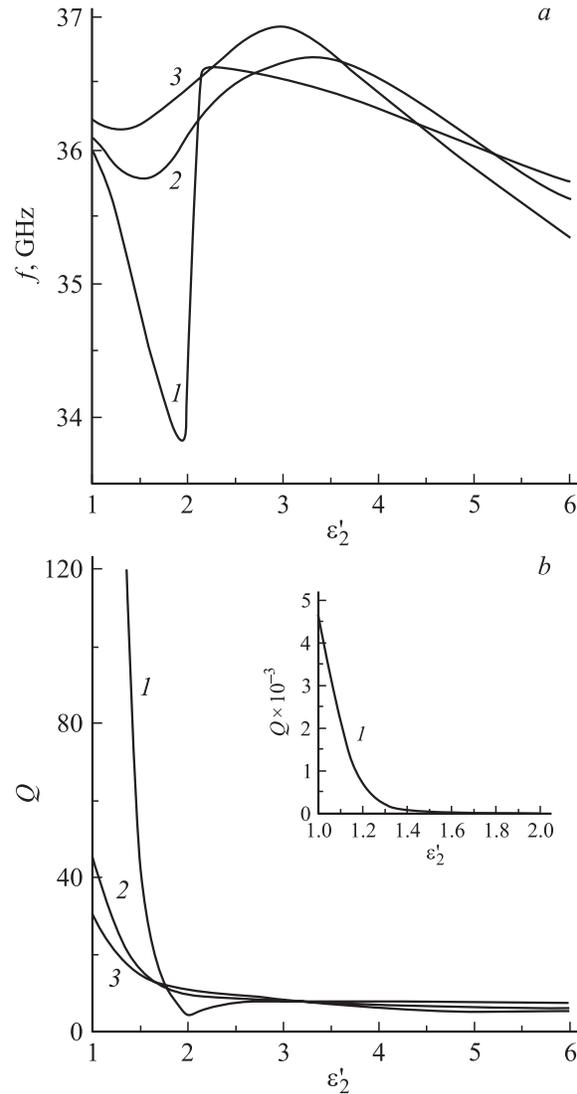
## Шаровой пояс

Из распределения поля  $H_{nn1}$  колебания следует, что полушаровой резонатор может быть модернизирован в резонатор в виде шарового пояса, у которого радиус кривизны боковой поверхности равен  $r_0$ , а ее угловой размер  $\sim 22^\circ$ . В таком резонаторе при экспериментальных исследованиях не будет наблюдаться частотное расщепление, поскольку отсутствуют условия существования мод с азимутальными индексами  $m \neq n$ . Кроме того, при возбуждении  $H_{nn1}$  колебания в резонаторе отпадает необходимость применения плоской проводящей поверхности, что, с одной стороны, приведет к уменьшению энергетических потерь в проводнике, а с другой стороны, к увеличению радиационных потерь, которые значительно меньше первых [4]. Спектральные и энергетические характеристики такого резонатора будут практически соответствовать характеристикам полушарового резонатора с радиусом  $r_0$  и  $H_{nn1}$  колебанием.

## Спектральные и энергетические характеристики резонатора, погруженного в изотропную среду

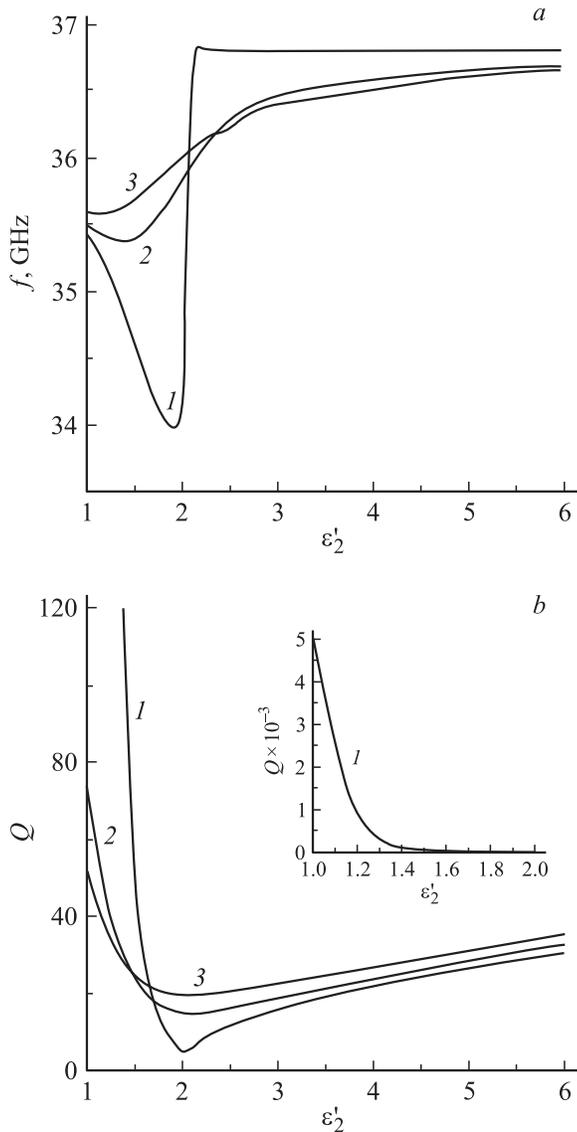
Исследовался полушаровой фторопластовый резонатор с идеально проводящей плоскостью, погруженный в изотропную среду (рис. 1). В качестве внешней среды использовались различные вещества с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2 = \epsilon'_2(1 + i \operatorname{tg} \delta_2)$ . Численные исследования проводились для собственных  $H_{36m1}$  ( $m = 2l - 36$ ;  $l = 18, 19, \dots, 36$ ) и  $E_{36m1}$  ( $m = 2l - 35$ ;  $l = 18, 19, \dots, 35$ ) мод резонатора. Структуры распределения полей этих мод на поверхности полушара и проводящей плоскости вне диэлектрика полностью соответствуют структурам для резонатора, расположенного в вакууме (рис. 2 и 3). На рис. 6 и 7 приведены спектральные и энергетические характеристики исследованного резонатора. Значения проницаемостей различных веществ находились в диапазоне  $\epsilon'_2 = 1 \div 6$  и  $\operatorname{tg} \delta_2 = 0; 0,3; 0,5$ .

Применение веществ с проницаемостью  $\epsilon'_2 \neq 1$  приводит к тому, что с увеличением  $\epsilon'_2$  нарушается условие полного внутреннего отражения и происходит проникновение полей собственных колебаний резонатора во внешнюю среду. В результате увеличивается область локализации полей, что сопровождается уменьшением собственных частот резонатора. С увеличением доли полей, проникающих во внешнюю среду с потерями ( $\operatorname{tg} \delta_2 \neq 0$ ), происходит уменьшение области локализации полей вследствие потерь энергии собственных колебаний резонатора и сосредоточения полей у границы раздела сред. Это приводит к увеличению собственных частот резонатора. С увеличением значений тангенса угла потерь  $\operatorname{tg} \delta_2$  внешней среды данный эффект проявляется при меньших значениях проницаемости  $\epsilon'_2$ . В результате при  $\epsilon'_2 < \epsilon'_1$  на спектральных характеристиках резонатора



**Рис. 6.** Собственная частота (а) и добротность (б) резонатора, погруженного в изотропную среду, с  $E$  колебаниями: 1)  $\operatorname{tg} \delta_2 = 0$ ; 2)  $\operatorname{tg} \delta_2 = 0,3$ ; 3)  $\operatorname{tg} \delta_2 = 0,5$ .

формируются минимумы. В резонаторе, погруженном в среду без потерь (или с малыми потерями, т.е.  $\operatorname{tg} \delta_2 \ll \operatorname{tg} \delta_1$ ), минимальное значение его собственной частоты наблюдается при проницаемости среды  $\epsilon'_2$ , близкой к проницаемости диэлектрика полушара  $\epsilon'_1$ . Максимальное смещение собственной частоты исследуемого резонатора относительно частоты, которую он имеет при нахождении в вакууме, составляет более 2 GHz. С увеличением потерь энергии во внешней среде данное смещение частоты резонатора имеет меньшие значения. При этом минимальную собственную частоту резонатор имеет при погружении в среду с меньшими значениями проницаемости  $\epsilon'_2$ . Увеличение проницаемости  $\epsilon'_2 > \epsilon'_1$ , которое сопровождается перераспределением полей колебаний резонатора во внешнюю среду и уменьшением областей их локализаций у поверхности диэлектрика, приводит к увеличению собственных частот резонатора.



**Рис. 7.** Собственная частота (а) и добротность (б) резонатора, погруженного в изотропную среду, с  $H$  колебаниями: 1)  $\text{tg } \delta_2 = 0$ ; 2)  $\text{tg } \delta_2 = 0.3$ ; 3)  $\text{tg } \delta_2 = 0.5$ .

В резонаторе с  $H$  колебаниями его собственная частота стремится к значению, характерному для резонатора, погруженного в вакуум. При  $\epsilon_2' > \epsilon_1'$  на спектральных характеристиках резонатора с  $E$  колебаниями формируются максимумы, обусловленные увеличением областей локализаций полей из-за увеличения их доли проникновения во внешнюю среду. Увеличение  $\text{tg } \delta_2$  внешней среды уменьшает долю локализаций полей в ней, что приводит к увеличению смещения максимальной частоты резонатора при  $\epsilon_2'$ , приближающейся к  $\epsilon_1'$ . Формирование максимума на спектральных характеристиках резонатора, расположенного в изотропной среде без потерь, при  $\epsilon_2' = \epsilon_1'$  объясняется потерями в полушаре, которые приводят к локализации низкоэнергетических полей у границы диэлектрика. При  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  резонатор

превращается в полубесконечное пространство с вытекающими последствиями.

Применение веществ с проницаемостью  $\epsilon_2' \neq 1$  в качестве сред, в которые погружается полушаровой диэлектрический резонатор с проводящей плоской поверхностью, приводит к снижению его добротности. Следует отметить, что, несмотря на малые значения, добротность резонатора с  $H$  колебаниями имеет тенденцию роста при его погружении в среду с  $\epsilon_2' > \epsilon_1'$ . Резонатор обладает высокой добротностью только при его погружении в среду с малыми потерями ( $\text{tg } \delta_2 \ll \text{tg } \delta_1$ ) и проницаемостью значительно меньшей, чем проницаемость вещества полушара ( $\epsilon_2' \ll \epsilon_1'$ ). Причем малые изменения проницаемости внешней среды  $\epsilon_2$ , например, вызванные изменением температуры, приводят к значительным изменениям собственной частоты и добротности резонатора. Данный эффект свидетельствует, с одной стороны, о малой пригодности использования такого резонатора в генераторах стандарта частоты, так как они будут иметь высокий температурный коэффициент частоты. Для обеспечения высокой стабильности частоты генератора необходимо диэлектрический резонатор располагать в вакууме. С другой стороны, исследуемый резонатор пригоден для использования в качестве измерительного элемента диэлектрических проницаемостей веществ, в частности, для измерения влажности воздуха.

## Заключение

Исследованы собственные колебания в изотропном диэлектрическом полушаре, размещенном на идеально проводящей плоской поверхности. Получены дисперсионные уравнения такого резонатора, погруженного в изотропную среду, и определены компоненты полей независимых  $E$  и  $H$  колебаний. Численные исследования проведены для собственных колебаний резонатора, расположенного в среде из различных веществ, как без потерь, так и с ними.

Из граничного условия на проводящей поверхности следует разделение  $E$  и  $H$  колебаний и их мод. В резонаторе для  $H$  мод сумма полярного и азимутального индексов  $n + m$  имеет четные значения, а для  $E$  мод — нечетные. В результате собственным  $H$  колебаниям присуще  $n + 1$ -кратное частотное вырождение по азимутальному индексу  $m$ .  $E$  колебания имеют  $n$ -кратное вырождение по частоте, поскольку в резонаторе азимутальной  $E$  моды ( $m = n$ ) не существует. Тип собственного азимутально-однородного колебания ( $m = 0$ ) в резонаторе задается четностью полярного индекса  $n$ .

Модовые угловые индексы  $n$  и  $m$  определяются характером распределения поля по угловым координатам  $\theta$  и  $\varphi$ . Азимутальный индекс  $m$  однозначно соответствует половине вариаций поля по углу  $\varphi$ . Полярный индекс  $n$  определяется с учетом вариаций поля по углу  $\theta$ , согласно неравенству (13).

Проведены численные исследования собственных колебаний с полярным индексом  $n = 36$  полушарового фторопластового резонатора, расположенного на идеально проводящей плоскости. Обнаружено сходство распределения полей некоторых мод „шепчущей галереи“ на поверхности полушара с экспериментально наблюдаемыми полевыми „поясками“ в работах [13,18].

Предложен диэлектрический резонатор в виде шарового пояса с интенсивным колебанием  $H_{nn1}$ .

Авторы выражают благодарность А.Я. Кириченко за обсуждение особенностей полей собственных колебаний диэлектрического полушара.

Работа выполнена при частичной поддержке НТЦУ по проекту № 2051.

## Список литературы

- [1] *Derkach V.N., Filippov Yu.F., Plevako A.S.* et al. // Int. J. of Infrared and Millimeter Waves. 2004. Vol. 25. N 1. P. 139–148.
- [2] *Прокопенко Ю.В., Смирнова Т.А., Филиппов Ю.Ф.* и др. // Вопросы атомной науки и техники. 2004. № 4. С. 87–90.
- [3] *Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. № 6. С. 79–84.
- [4] *Баранник А.А., Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф.* и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 5. С. 99–103.
- [5] *Cherpak N.T., Barannik A.A., Prokopenko Yu.V.* et al. // IEEE Trans. on Appl. Superconductivity. 2003. Vol. 33. N 2. P. 3570–3573.
- [6] *Boriskina S.V., Nosich A.I.* // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2. № 3. С. 333–341.
- [7] *Kharkovsky S., Kirichenko A., Kogut A.* // Microwave and optical technology letters. 1996. Vol. 12. N 4. P. 210–213.
- [8] *Lord Rayleigh* // Phil. Mag. 1910. Vol. 20. P. 1001–1004.
- [9] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [10] *Gastine N., Courtois L., Dormann J.L.* // IEEE Trans. on MTT. 1967. Vol. 15. N 12. P. 694–706.
- [11] *Ораевский А.Н.* // Квантовая электроника. 2003. Т. 32. № 5. С. 377–397.
- [12] *Прокопенко Ю.В., Смирнова Т.А., Филиппов Ю.Ф.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 4. С. 82–88.
- [13] *Харьковский С.Н., Козут А.Е., Солодовник В.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. № 18. С. 38–42.
- [14] *Козут А.Е., Кутузов В.В., Филиппов Ю.Ф., Харьковский С.Н.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997. Т. 40. № 2. С. 19–26.
- [15] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.
- [16] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1996. Т. 2. 296 с.
- [17] Основные формулы физики / Под ред. Д. Мензела. М.: ИЛ, 1957. 658 с.
- [18] *Голубничная Г.В., Кириченко А.Я., Козут А.Е.* и др. // Докл. НАН Украины. 2004. № 11. С. 80–84.
- [19] *Взятых В.Ф., Калиничев В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 4. С. 475–482.