01;10

О катастрофах сгустка заряженных частиц

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 30 ноября 2004 г. В окончательной редакции 31 мая 2005 г.)

На основе самосогласованной модели инжекции холодного газа заряженных частиц получены выражения для оценки средней плотности частиц при временных катастрофах сгустка частиц. Найдены аналитические решения для инжекции электронного сгустка в постоянное и переменное электрические поля.

PACS: 41.75.-i

Постановка задачи

Теоретический анализ поведения системы заряженных частиц во внешних электромагнитных полях на основе решения самосогласованных уравнений движения представляет собой непростую задачу. При инжекции частиц возникает дополнительное усложнение задачи, обусловленное зависимостью полного числа частиц от времени. Поэтому аналитические результаты можно получить лишь на основе упрощенной постановки задачи.

В данной работе рассматривается самосогласованная модель одномерной инжекции холодного газа заряженных частиц. Пусть в течение промежутка времени $0 \le t \le T$ с поверхности $x = 0$ в область пространства $x > 0$ происходит стационарная инжекция малоэнергетического сгустка нерелятивистских электронов; обозначим j_0, и соответственно плотность тока инжекции и скорость частиц на выходе из инжектора. На движение инжектированных частиц влияет как внешнее поле E_{ext}, так и коллективное поле E, под которым понимается нестационарное электрическое поле, создаваемое инжектируемым электронным газом; при этом пренебрегается влиянием полей „изображений“ возникающих в металлических поверхностях реальных устройств.

Основная трудность при решении нестационарной самосогласованной задачи связана с учетом влияния на движение частиц коллективного поля, которое заранее неизвестно и изменяется при распространении сгустка. Эта проблема упрощается, если слои электронов перемещаются друг за другом, без обгонов. Соответственно, область применимости получаемого решения рассматриваемой задачи ограничена тем моментом времени, когда в сгустке впервые происходит обгон одного слоя газа другим.

Возникновение обгона одного слоя газа другим можно рассматривать как временную катастрофу [1]. В связи с этим возникает ряд вопросов. Например, какого типа катастрофы возможны при движении сгустка и всегда ли временные катастрофы связаны с обгонами? Можно ли движение холодного газа при наличии обгонов, что возможно, например, при колебаниях моноэнергетических электронных сгустков в различных устройствах, трактовать как непрерывную последовательность временных катастроф?

Лагранжево описание движения

При движении слоев газа друг за другом, без обгонов, величина коллективного поля, действующего на инжектированный в момент времени $t = t'$ слой электронного газа, равна

$$E(t') = E_2 - E_1, \tag{1}$$

где $E_1 = 2\pi e j_0 t'$ — напряженность электрического поля, создаваемого частицами, инжектированными до момента времени $t = t'$"; $E_2 = 2\pi e j_0 (t - t')$ — напряженность электрического поля, создаваемого инжектируемыми после этого момента времени частицами.

Поэтому при $0 \le t \le T$ уравнение движения рассматриваемого слоя имеет вид

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{e}{m} E_{ext} + \frac{1}{2} u\omega^2 (t - 2t'). \tag{2}$$

Это уравнение следует решать для следующих начальных условий: $s_1(t', t') = 0$, $v_1(t', t') = u$. Здесь $v_1(t, t') = \partial s_1/\partial t$ — скорость слоя, а также введено обозначение: $\omega^2 = 4\pi j_0 e^2/mu$.

Однако E_2 в (1) будет зависеть от времени только в течение процесса инжекции; после ее окончания $E_2 = 2\pi e j_0 (T - t')$. Поэтому при $t > T$ движение инжектированного в момент времени $t = t'$ слоя описывается решением уравнения

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = \frac{e}{m} E_{ext} + \frac{1}{2} u\omega^2 (T - 2t'), \tag{3}$$

начальные условия для которого определяются положением и скоростью слоя в момент окончания инжекции: $s_2(T, t') = s_1(T, t')$, $v_2(T, t') = v_1(T, t')$.

В итоге для закона движения слоя частиц, инжектированных в момент времени $t = t'$, получим

$$s(t, t') = \begin{cases} s_1(t, t'), & 0 \le t \le T; \\ s_2(t, t'), & t > T. \end{cases} \tag{4}$$

Скорость слоя равна $v(t, t') = \partial s/\partial t$.

Изменение числа частиц в сгустке равно числу частиц, инжектированных от момента времени $t = t'$ до более позднего момента времени $t = t' + dt'$, т.е. $nds = j_0[t' - (t' + dt')]$. Отсюда для плотности частиц найдем

$$n = \frac{j_0}{\omega(t, t')}, \tag{5}$$

где $\omega(t, t') = -\partial s/\partial t'$.

Таким образом, при отсутствии обгонов распределение плотности частиц для момента времени t можно построить, последовательно вычисляя с небольшим шагом по t' координату $x = s(t, t')$ и значение выражения (5). Очевидно, что условие движения слоев частиц без обгонов будет выполняться, если с течением времени функция $s(t, t')$ остается невозрастающей функцией переменной t', т.е. в любой момент времени $w(t, t') \geq 0$ при $0 \leq t' \leq T$. Если это условие нарушается в некоторый момент времени $t = t_c$, то выражение (1) нельзя использовать для описания коллективного поля сгустка. Поэтому этот момент времени является границей области применимости предлагаемой модели.

В качестве конкретного примера рассмотрим инжекцию электронного сгустка в постоянное ускоряющее поле $E_{ext} = -E_0$. В этом случае решения уравнений (2), (3) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_1(\tau, \tau') = \tau - \tau' + \frac{1}{2}\Big(\alpha - \frac{1}{2}\tau'\Big)(\tau - \tau')^2 + \frac{1}{12}(\tau - \tau')^3,$$

$$\sigma_2(\tau, \tau') = \sigma_1(\theta, \tau') + \nu(\tau - \theta) + \frac{1}{4}(\theta - 2\tau')(\tau - \theta)^2. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения:

$$\sigma(\tau, \tau') = \frac{\omega}{u} s(t, t'), \quad \tau = \omega t, \quad \theta = \omega T,$$

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \Omega = -\frac{eE_0}{mu}, \quad \nu = \frac{\partial \sigma_1(\tau, \tau')}{\sigma \tau}\bigg|_{\tau=\theta}.$$

Рассматривая условие $\omega(t, t') = 0$ как уравнение относительно τ

$$\tau^2 + (2\alpha - 3\tau')\tau + 2(\tau'^2 - \alpha\tau' + 1) = 0, \tag{7}$$

нетрудно видеть, что оно не имеет корней, если длительность инжекции меньше величины $\theta_0 = 2(\alpha + \sqrt{2})$. В этом случае при движении сгустка у плотности частиц не возникает сингулярностей; они появляются, если длительность инжекции удовлетворяет условию $\theta \geq \theta_0$.

В частности, при $T = T_0$ из (7) найдем $t_c = (2\alpha + 3\sqrt{2})/\omega$, причем сингулярность возникает на задней границе сгустка, когда она вследствие расширения сгустка под влиянием пространственного заряда достигает плоскости инжекции.

Эйлерово описание движения

Чтобы проанализировать поведение плотности частиц с точки зрения теории катастроф, рассмотрим эйлерово описание движения инжектируемого сгустка. Для этого можно использовать кинетическое описание, так как функция распределения холодного газа заряженных частиц выражается через его газодинамические характеристики [2].

Для задачи инжекции функция распределения $F = F(X)$ удовлетворяет кинетическому уравнению с источником

$$\mathrm{L}F(X) = S(X),$$

$$\mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m}(E_0 + E)\frac{\partial}{\partial p}, \tag{8}$$

где E_0, E — напряженности внешнего и коллективного полей,

$$S(X) = j_0\delta(x)H(t)H(t - T)\delta(p - mu),$$

$\mathrm{H}(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда; для краткости через X обозначается совокупность переменных x, p, t.

Нетрудно видеть, что (8) соответствует уравнению Власова для функции распределения $f(X)$ системы с фиксированным числом частиц, если источник имеет следующий вид: $S(X) = \delta(t) f(X)$; при этом $F(X) = H(t) f(X)$.

Используя функцию Грина оператора L

$$G(X, X') = H(t - t')\delta\left(x - q(t, X')\right)\delta\left(p - m\dot{q}(t, X')\right),$$

$$\mathrm{L}G(X, X') = \delta(X - X'),$$

можно записать решение уравнения (8) в следующем виде:

$$F(X) = \int G(X, X')S(X')dX'. \tag{9}$$

Здесь $q(t, X')$ — закон движения частицы в совокупности внешнего и коллективного полей, удовлетворяющий условиям $q(t', X') = x'$, $\dot{q}(t', X') = p'/m$; точкой обозначено дифференцирование по времени.

После интегрирования в (9) по x', p' получим

$$F(X) = j_0 \int dt' H(t - t')H(t')\delta\big(x - s(t, t')\big)\delta\big(p - mv(t, t')\big),$$

где $s(t, t')$ — лагранжева координата (4), инжектированного в момент времени $t = t'$ слоя газа. В итоге для функции распределения электронного сгустка найдем

$$F(X) = n(x, t)\delta\left(p - mV(x, t)\right),$$

где газодинамические характеристики имеют вид

$$n(x, t) = \frac{j_0}{W(x, t)} H\big(r(x, t)\big) \times H\big(t - r(x, t)\big)H\big(T - r(x, t)\big), \tag{10}$$

$$V(x, t) = v\left(t, r(x, t)\right). \tag{11}$$

Здесь $r = r(x, t)$ — корень уравнения $s(t, r) = x$, т.е, $s\left(t, r(x, t)\right) \equiv x$, а также введено обозначение $W(x, t) = w\left(t, r(x, t)\right)$. Коллективное поле внутри сгустка равно $E = E\left(r(x, t)\right)$, где $E(t')$ определяется выражением (1). В частности, для рассмотренного выше примера инжекции сгустка в постоянное поле r является корнем кубического уравнения.

Катастрофы сгустка

Для анализа особенностей, возникающих у плотности частиц $n(x,t)$, удобно использовать функцию $N(x,t)$, характеризующую зависимость от времени числа частиц в слое толщиной x (на единицу поперечной площади)

$$N(x,t) = \int_0^x n(x,t)dx. \quad (12)$$

Дифференцируя по x условие $s(t, r(x,t)) = x$, получим следующее соотношение: $W(x,t)\partial r(x,t)/\partial x = -1$. Далее, из условия $s(t, r(0,t)) = 0$ с учетом начального условия $s(t',t') = 0$ следует, что $r(0,t) = t$. Используя эти соотношения и подставляя в (12) выражение (10), для функции $N(x,t)$ найдем

$$N(x,t) = j_0\big[tH(t)H(T-t) - r(x,t)H(r(x,t)) \times H(t - r(x,t))H(T - r(x,t))\big]. \quad (13)$$

Как уже отмечалось выше, если до момента времени $t = t_c$ выполняется условие $w(t,t') > 0$, а в момент времени $t = t_c$ существует такое значение $t' = t'_c$, что $w(t_c, t'_c) = 0$, то плотность частиц (5) обращается в бесконечность, т.е. координата слоя газа $x_c = s(t_c, t'_c)$ является критической. Выражение (13) позволяет проанализировать поведение средней плотности частиц вблизи критической точки.

Для этого рассмотрим функцию $R(t') = s(t_c, t')$. Очевидно, что при движение слоев газа друг за другом, без обгонов, функция $R(t')$ является невозрастающей. При выполнении условии $w(t_c, t'_c) = 0$ возможность такого поведения функции $R(t')$ определяется значением $Q(t'_c) = Q_c$, где $Q(t') = d^2R/dt'^2$.

Если $Q_c \neq 0$, то при выполнении условия $w(t_c, t'_c) = 0$ точка $t' = t'_c$ будет точкой экстремума функции $R(t')$. Тогда эта функция может быть невозрастающей функцией своего аргумента только в том случае, если критическая точка совпадает с границей сгустка. Разложение функции $R(t')$ в ряд Тейлора вблиз точки $t' = t'_c$ с точностью до первого малого члена имеет вид

$$R(t') \approx x_c + \frac{1}{2}Q_c(t' - t'_c)^2. \quad (14)$$

Учитывая, что из равенства $s(t, r(s(t,t'),t)) = s(t,t')$ следует соотношение $r(s(t,t'),t) = t'$, с помощью разложения (14) найдем

$$r(x,t_c) \approx t'_c + Q_c^{-1/2}(x - x_c)^{1/2}.$$

Используя этот результат и выражение (13), в итоге получим следующую оценку числа частиц вблизи точки $x = x_c$:

$$\Delta N \approx j_0\sqrt{2\left|\frac{x - x_c}{Q_c}\right|}, \quad (15)$$

т.е. в момент времени $t = t_c$ на расстоянии ε от критической точки средняя плотность частиц $\sim \varepsilon^{-1/2}$. Такое поведение плотности частиц означает, что в момент времени $t = t_c$ на границе сгустка происходит временная катастрофа и возникает точка складки [3].

В частности, в случае инжекции сгустка в постоянное электрическое поле особенность типа точки складки возникает в момент времени $\tau_c = \varphi(\theta)$, где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left[3\xi - 2\alpha - \sqrt{(\xi - 2\alpha)^2 - 8}\right], \quad (16)$$

если длительность инжекции удовлетворяет условию $\theta_0 \le \theta < \theta_1 = 3 + 2\alpha$. Поэтому для оценки средней плотности частиц вблизи границы сгустка применимо выражение (15).

При $Q_c = 0$ точка $t' = t'_c$ является точкой перегиба графика функции $R(t')$. В этом случае разложение этой функции в ряд Тейлора вблизи точки $t' = t'_c$ с точностью до первого малого члена имеет вид

$$R(t') \approx x_c + P_c(t' - t'_c)^3,$$

где $P_c = P(t'_c)$, $P(t') = (1/6)dQ/dt'$. Аналогичным образом можно получить следующую оценку числа частиц вблизи точки $x = x_c$:

$$\Delta N = \big|N(x,t_c) - N(x_c,t_c)\big| \approx j_0\big|P_c^{-1/3}(x - x_c)^{1/3}\big|, \quad (17)$$

т.е. в момент времени $t = t_c$ на расстоянии ε от критической точки средняя плотность частиц $\Delta N/\varepsilon \sim \varepsilon^{-2/3}$. Такой порядок средней плотности характерен для ребра возврата [3].

Для рассматриваемого примера инжекции сгустка в постоянное поле возникновение особенности типа ребра возврата возможно в том случае, если длительность инжекции удовлетворяет условию $\theta_1 \le \theta \le \theta_2 = 4 + 2\alpha$. При $\theta = \theta_1$ такая особенность появляется на границе сгустка в момент времени $\tau_c = \theta_2$, когда граница сгустка находится на расстоянии $u/4\omega$ от плоскости инжекции. При увеличении длительности инжекции критическая точка возникает в тот же момент времени, но она расположена внутри сгустка, поэтому при $\theta = \theta_2$ появление особенности типа ребра возврата совпадает с моментом окончания инжекции; при этом $x_c = u/3\omega$.

Инжекция в нестационарное поле

Полученные выше аналитические результаты можно обобщить на случай инжекции сгустка частиц в нестационарное внешнее поле, которое линейно зависит от времени в течение инжекции, а после ее окончания обращается в нуль:

$$E_{ext} = \begin{cases} -E_0\tau, & 0 \le \tau \le \theta; \\ 0, & \tau > \theta. \end{cases} \quad (18)$$

Анализ движения частиц в подобных полях представляет определенный интерес для практических задач пространственно-временно́й фокусировки электронных сгустков с помощью нестационарного электрического поля [4].

В этом случае в решении (4)

$$\sigma_1(\tau,\tau') = \tau - \tau' - \frac{1}{4}\left[\tau' + \alpha(\tau+\tau')\right](\tau-\tau')^2 + \frac{1}{12}(1+\alpha)(\tau-\tau')^3.$$

При наличии внешнего поля (18) сохраняются те же закономерности формирования временных катастроф, что и в случае постоянного поля, однако характерные выражения изменяются:

$$\theta_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1+2\alpha}, \quad \theta_1 = \frac{3+2\alpha}{(1+2\alpha)\sqrt{1+\alpha}}, \quad \theta_2 = \frac{4\sqrt{1+\alpha}}{1+2\alpha},$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}[(3+2\alpha)\xi - \sqrt{\xi^2(1+2\alpha)^2 - 8}]. \qquad (19)$$

Уменьшение пороговой длительности инжекции $T_0 = \theta_0/\omega$, при превышении которой в сгустке возникают катастрофы, обусловлено тем, что частицы в передней части сгустка испытывают тормозящее воздействие внешнего поля в течение более длительного промежутка времени по сравнению с частицами, испущенными в конце инжекции. Поэтому происходит частичная компенсация расталкивающего действия пространственного заряда, что создает более благоприятные условия для возникновения обгонов.

Отметим также, что в случае длительности инжекции T_0 условие $\omega(t,t') = 0$ выполняется только для одного слоя газа, расположенного на границе сгустка. Поэтому в этом случае временна́я катастрофа не сопровождается нарушением исходного предположения о движении слоев газа без обгонов. Так как в отличие от инжекции в постоянное поле положение критической точки не совпадает с плоскостью инжекции: $x_c = 2u\alpha\sqrt{2}/\omega(1+2\alpha)$, то результаты (10), (11), (13) применимы и при $t > t_c$.

Как уже указывалось, при $T_0 < T < T_1$ условие $w(t,t') = 0$ впервые выполняется на заднем фронте сгустка, т. е. при $t_c = \varphi(\theta)/\omega$, $t' = T$, где $\varphi(\xi)$ определяется выражением (19). В этот момент времени задний фронт сгустка находится в точке $s_f = u\sigma_2(\tau_c,\theta)/\omega$, а слой частиц, инжектированных на промежуток времени Δt раньше, в этот же момент времени находится в точке $s' = u\sigma_2(\tau_c, \theta - \omega\Delta t)/\omega$. Существует такая область значений Δt, при которых выполняется условие

$$\frac{m}{2}\left(v_f^2 - v'^2\right) > 2\pi j_0 e^2 \Delta t(s' - s_f),$$

где v', v_f — скорости частиц в рассматриваемом слое и на заднем фронте в момент времени $t = t_c$.

Это означает, что разность кинетических энергий частиц на заднем фронте сгустка и частиц в слое, инжектированном в более ранний момент времени, больше разности потенциалов между точками их положения. Поэтому эти слои преодолевают расталкивающее действие коллективного поля между ними. Таким образом, начиная с момента времени $t = t_c$, в течение некоторого промежутка времени в сгустке происходят обгоны, т. е. непрерывная последовательность временных катастроф.

Список литературы

[1] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.

[2] *Быков В.П., Герасимов А.В., Турин В.О.* // УФН. 1995. Т. 165. № 8. С. 955–966.

[3] *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.

[4] *Андреев С.В., Монастырский М.А., Тарасов В.А., Щелев М.Я., Гринфельд Д.Э.* // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 20–31.