

01;12

Исследование возможности левитации сверхпроводящего тела в поле N магнитных полюсов

© С.И. Кузнецов, Ю.М. Урман

Нижегородский государственный педагогический университет,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: urman@unn.ac.ru

(Поступило в Редакцию 31 мая 2005 г.)

Современные магнитные технологии позволяют создавать на основе редкоземельных веществ постоянные магниты, создающие достаточно сильное магнитное поле для осуществления левитации. В предлагаемой работе исследована возможность осуществления левитации в поле, созданном произвольным дискретным или непрерывным распределением магнитных полюсов. Магнитный полюс является моделью длинного тонкого постоянного магнита. Полученные результаты позволяют осуществить расчет подвеса для произвольного распределения магнитов. Рассмотрены некоторые конкретные конфигурации магнитных полюсов. Установлена область изменения параметров подвеса, соответствующая устойчивому равновесию ротора в поле магнитов.

PACS: 74.70.-b, 84.71.Ba

Введение

„Левитацией“ называется состояние, при котором твердое тело „парит“ в силовом поле подвеса без механического контакта с окружающими телами. Первые теоретические исследования в области электромагнитной левитации датируются 1839 годом (основоположником можно считать английского ученого Ирншоу). Подвесы индукционного типа для бестигельной плавки сверхчистых металлов, магнитный подвес ферритовых тел были реализованы в тридцатых годах прошлого столетия.

Открытие в 1933 г. Мейснером и Оксенфельдом способности сверхпроводников выталкивать из себя магнитное поле послужило толчком к созданию сверхпроводящего подвеса. В 1939 г. немецкий физик В. Браунбек обнаружил теоретически и экспериментально подтвердил эффект, состоящий в возможности достижения устойчивого равновесия свободного тела при наличии в магнитной системе диамагнитных тел [1]. В нашей стране впервые магнитная левитация сверхпроводника была осуществлена в 1945 г. профессором МГУ В.К. Аркадьевым. В 1958 г. фирма „General Electric“ демонстрирует ряд электродвигателей со сверхпроводящими опорами. В начале 60-х появились первые сообщения об использовании магнитных подвесов в различных системах инерциальной навигации: гироскопах, акселерометрах и т.д.

В настоящее время принцип магнитной левитации взят на вооружение многими фирмами и институтами и применяется на практике в самых различных областях человеческой деятельности.

В большинстве сверхпроводящих подвесов вывешивающее магнитное поле создается с помощью электромагнитов или сверхпроводящих контуров, при этом часто используются системы автоматического управления [2,3]. Однако создание подвеса возможно и на основе магнитного поля, образованного постоянными

магнитами. Важным достоинством таких подвесов является пассивное, не требующее управления, удержание ротора, при котором не происходит затрат энергии. Ротор, вывешенный в таком подвесе, может висеть практически неограниченно долго. В настоящее время благодаря развитию техники появилась возможность создавать постоянные магниты с использованием редкоземельных веществ, создающие достаточно сильное магнитное поле для осуществления левитации. Соединения SmCo_5 , NdCo_5 при соответствующей технологической обработке позволяют получить рекордные для подобных материалов коэрцитивные силы (до 1.4Т) и огромные магнитные энергии для постоянных магнитов (до 10^4 TA/m), что на два порядка больше, чем соответствующие энергии для магнитов из металлов группы Fe. Это, в свою очередь, дает возможность изготавливать магниты в несколько десятков раз сильнее магнитов на основе металлов группы Fe [4]. Такие магниты получили широкое применение там, где требуется создавать сильные магнитные поля при минимальном весе и габаритах. Они могут быть использованы и для создания неконтактных подвесов с пассивным вывешиванием ротора. Поэтому расчет сверхпроводящего подвеса на постоянных магнитах очень актуален.

Целью работы является теоретическое исследование возможности устойчивого удержания сверхпроводящего ротора в поле, образованном постоянными магнитами при действии гравитационных сил и сил инерции, и рассмотрение некоторых конкретных магнитных конфигураций, а также определение оптимальных конструктивных параметров, обеспечивающих максимальную устойчивость. Для этого, следуя работе [2], проводятся вычисления потенциальной энергии взаимодействия сферического ротора с произвольным полем подвеса, силы, действующей на сферический ротор со стороны поля подвеса, и жесткости (отношение приращения силы к смещению ротора от состояния равновесия) при фикс-

сированных источниках поля. Далее рассматриваются частные случаи магнитных подвесов.

При вычислении силовых характеристик подвеса всегда предполагается, что магнитное поле в каждой точке поверхности шара меньше критического поля.

Магнитное поле в объеме подвеса

Для вычисления потенциальной энергии взаимодействия сферического ротора с произвольным полем подвеса необходимо найти поле в объеме подвеса в присутствии шарового ротора. Поле может быть найдено из решения системы дифференциальных уравнений Максвелла с неоднородными граничными условиями на поверхности ротора.

Пусть некоторое тело S с магнитной проницаемостью μ помещено в заданное в его отсутствие магнитное поле \mathbf{H}_0 . Полное магнитное поле \mathbf{H} , создаваемое некоторой системой токов \mathbf{j} при наличии в пространстве тела S , есть сумма „первичного“ поля \mathbf{H}_0 и „вторичного“ поля \mathbf{H}'_0 , обязанного своим происхождением присутствию тела S . Это поле в самом общем случае любого магнетика с непрерывно изменяющимися от точки к точке свойствами описывается уравнениями [5,6]:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \operatorname{rot}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \quad (1.1)$$

тогда как „первичное“ поле \mathbf{H}_0

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}_0) = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{H}_0) = 0. \quad (1.2)$$

Вычитая первое уравнение (1.2) из соответствующего уравнения (1.1), получим

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}') = 0, \quad (1.3)$$

т.е. вторичное поле при всех обстоятельствах имеет потенциальный характер и это верно для каких угодно тел. Поэтому всегда можно положить

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \varphi', \quad (1.4)$$

где φ' — магнитный потенциал „вторичного“ поля, и задача его определения в объеме подвеса при заданном внешнем поле сводится к нахождению скалярной функции.

Будем считать проницаемость тела S постоянной, а пространства вне тела — равной единице. Тогда потенциал внутри и вне тела будет удовлетворять уравнению Лапласа, а из условия непрерывности нормальных составляющих индукции и касательных составляющих поля на S вытекают следующие граничные условия:

$$\varphi'_i = \varphi'_e, \quad \mu \frac{\partial \varphi'_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'_e}{\partial n} = \mu_0(1 - \mu)(\mathbf{H}_0 \mathbf{n}), \quad (1.5)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к S , φ'_i , φ'_e — потенциалы „вторичного“ поля внутри и вне шара

соответственно. Кроме того, необходимо, чтобы на бесконечности $\varphi' \rightarrow 0$, а в начале координат оно не имело особенностей.

Получим интегральное уравнение для определения „вторичного“ поля вне и внутри тела S . Для этого прибавим к обеим частям второго условия (1.5) $\partial \varphi'_i / \partial n$ и представим его в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'_e}{\partial n} = (1 - \mu) \left[\mu_0(\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) + \frac{\partial \varphi'_j}{\partial n} \right]. \quad (1.6)$$

Если правую часть (1.6) формально считать поверхностной плотностью магнитных зарядов, то с учетом первого условия (1.5) придем к задаче определения поля внутри тела S , на котором распределен заряд с плотностью $\sigma_\mu = 4\pi(1 - \mu)[\mu_0(\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) + (\partial \varphi'_i / \partial n) / \mu_0]$. Решение этой задачи для потенциала φ'_i внутри тела S имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \varphi'_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_\mu}{r_{QM}} ds = \mu_0(1 - \mu) \int_S \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{n})}{r_{QM}} ds \\ + (1 - \mu) \int_S \frac{1}{r_{QM}} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где r_{QM} — расстояние между точкой Q внутри тела, которой определяется потенциал, и переменной точкой интегрирования M на поверхности S .

На основании второй формулы Грина и тождества $\Delta(1/r_{QM}) = -4\pi\delta(Q-M)$, где Δ — лапласиан, δ — дельта-функция Дирака [5] имеем:

$$\int_S \frac{1}{r_{QM}} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial n} ds = 4\pi\varphi'_i(Q) + \int_S \varphi'_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{QM}} ds. \quad (1.8)$$

Подставив (1.8) в (1.7), получим

$$\begin{aligned} \varphi'_i(Q) = \frac{\mu_0(1 - \mu)}{\mu} \int_S \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{n})}{r_{QM}} ds \\ + \frac{1 - \mu}{\mu} \int_S \varphi'_i(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{QM}} \right) ds. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, определение вторичного поля внутри тела S сводится к решению интегрального уравнения (1.9).

Аналогичным образом можно получить интегральное уравнение для определения „вторичного“ поля вне тела S :

$$\begin{aligned} \varphi'_e(Q) = \mu_0(1 - \mu) \int_S \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{n})}{r_{QM}} ds \\ + (1 - \mu) \int_S \varphi'_e(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{QM}} \right) ds. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь r_{QM} — расстояние от точки Q вне тела S до точки M на его поверхности.

При выводе интегральных уравнений (1.9) и (1.10) ограничений на форму тела S не делалось. Теперь будем считать, что тело S представляет собой шар. Определим сначала потенциал вторичного поля внутри шара. Выбрав за начало координат его центр, разложим r_{QM}^{-1} в ряд по сферическим функциям [2]

$$\frac{1}{r_{QM}} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{r^l}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'), \quad (1.11)$$

где сферические координаты со штрихом отвечают точке M , а без штриха — точке Q . Подставив (1.11) в (1.9), получим

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= 4\pi \frac{1-\mu}{\mu} \sum_{l,m} \frac{r^l Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1)R^{l-1}} \int_S \mu_0 (\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) Y_{l,m}^*(\Omega') ds \\ &\quad - 4\pi \frac{1-\mu}{\mu} \sum_{l,m} \frac{(l+1)}{2l+1} \frac{r^l Y_{lm}(\Omega)}{R^l} \int_S \varphi'_i Y_{l,m}^*(\Omega') ds \\ &= 4\pi \frac{1-\mu}{\mu} \sum_{l,m} \frac{r^l Y_{l,m}(\Omega)}{(2l+1)R^{l+1}} E_{lm}^i \\ &\quad - 4\pi \frac{1-\mu}{\mu} \sum_{l,m} \frac{(l+1)}{2l+1} \frac{r^l}{R^{l+2}} Y_{l,m}(\Omega) C_{lm}^i, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$E_{lm}^i = \int_S \mu_0 (\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) Y_{l,m}^*(\Omega^*) ds, \quad (1.13)$$

$$C_{lm}^i = \int_S \varphi'_i Y_{l,m}^*(\Omega') ds, \quad (1.14)$$

R — радиус шара, Ω — совокупность углов θ, φ .

Для определения C_{lm}^i подставим (1.12) в (1.14) и проинтегрируем по единичной сфере. Имеем $C_{lm}^i = \frac{E_{lm}^i R}{2l+1} - \frac{1-\mu}{\mu} \frac{l+1}{2l+1} C_{lm}^i$, откуда

$$C_{lm}^i = \frac{(1-\mu)E_{lm}^i R}{\mu l + l + 1}. \quad (1.15)$$

Тогда потенциал запишется

$$\varphi'_i = \int_S (1-\mu) (\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) \Phi^i(Q, M) ds, \quad (1.16)$$

где

$$\Phi^i(Q, M) = \sum_{l,m} \frac{4\pi\mu_0}{l\mu + l + 1} \frac{r^l}{R^{l+1}} Y_{lm}(\Omega_Q) Y_{l,m}^*(\Omega_M) \quad (1.17)$$

представляет собой потенциал поля, создаваемый единичным точечным зарядом в присутствии шара с проницаемостью μ в точках внутри него, если заряд расположен на его поверхности.

Для внешнего потенциала вторичного поля формула будет такой:

$$\varphi'_e(Q) = \int_S (1-\mu) (\mathbf{H}_0 \mathbf{n}) \Phi^e(Q, M) ds, \quad (1.18)$$

где $\Phi^e(Q, M)$ получается из $\Phi^i(Q, M)$, если R и r поменять местами. В простейшем случае, когда внешнее поле однородно, из формул (1.16) и (1.18) следует [8]

$$\varphi'_i = 4\pi\mu_0 \frac{1-\mu}{\mu+2} (\mathbf{H}\mathbf{r}), \quad \varphi'_e = 4\pi\mu_0 \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{R^3}{r^3} (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Чтобы найти потенциал „вторичного“ поля от шара с магнитной проницаемостью μ в произвольном внешнем поле, представим потенциал невозмущенного поля, созданного системой источников, закрепленных на корпусе гироскопа радиуса R_K , вне источников поля в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{l=0}^{\infty} r^l \left\{ A_l P_l(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^l (A_{lm} \cos m\varphi + B_{lm} \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Такое разложение всегда возможно, т.к. вне источников потенциал внешнего поля удовлетворяет уравнению Лапласа [7].

Коэффициенты A_{lm} при заданных источниках поля могут быть рассчитаны аналитически или на ЭВМ и зависят от геометрии источников поля, расстояния до них от начала координат и величин токов. Если поле имеет ось симметрии, с которой совпадает полярная ось сферической системы координат, то $A_{lm} = 0$.

В практических расчетах удобно представлять потенциал невозмущенного поля в виде разложения по ортонормированным сферическим функциям

$$\varphi_0 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\Omega), \quad (1.21)$$

коэффициенты ряда (1.20) связаны с (1.21) следующими формулами:

$$\begin{aligned} a_{l0} &= A_l, \quad a_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{2} (A_{lm} - iB_{lm}), \\ a_{l,-m} &= (-1)^m a_{lm}^*. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Подставив (1.21) в (1.13) и вычислив интеграл, найдем

$$E_{lm}^i = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} l R^{l+1}, \quad (1.23)$$

$E_{lm}^l = E_{lm}^i$. Таким образом, потенциал полного поля внутри шара имеет вид

$$\varphi^i = \varphi_0 + \varphi'_i = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{2l+1}{l+1+l\mu} a_{lm} r^l Y_{lm}(\Omega), \quad (1.24)$$

вне шара:

$$\begin{aligned} \varphi^e &= \varphi_0 + \varphi'_e \\ &= \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} \left(r^l + \frac{(1-\mu)l}{l\mu+l+1} \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\Omega). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Случай сверхпроводника следует из этих формул при $\mu = 0$, ферромагнетика при $\mu = \infty$. Следует отметить, что при $\mu = 0$ физический смысл имеет только потенциал вне шара [2].

Потенциальная энергия сферического ротора, находящегося во внешнем поле

Вычисление силовых характеристик подвеса (сил и жесткостей) можно провести, если известна потенциальная энергия ротора, находящегося в поле подвеса.

Потенциальная энергия W магнетика во внешнем поле определяется выражением [9]

$$W = -\frac{1}{2} \int_V 4\pi\mu_0 \mathbf{I} \mathbf{H}_0 dV, \quad (2.1)$$

где \mathbf{I} — намагниченность единицы объема магнетика. Для линейных изотропных сред $\mathbf{I} = -(1-\mu)\mathbf{H}$, где μ — магнитная проницаемость, которая может быть функцией координат. \mathbf{H} — полное поле после внесения шара, и (2.1) можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mu_0(1-\mu) \mathbf{H} \mathbf{H}_0 dV. \quad (2.2)$$

Будем считать $\mu = \text{const}$ и выразим поля через градиенты потенциалов, тогда

$$W = \frac{(1-\mu)}{2\mu_0} \int_V \nabla \varphi^i \nabla \varphi_0 dV. \quad (2.3)$$

Используя формулу Грина $\int_V \nabla \varphi^i \nabla \varphi_0 dV = \int_S \varphi^i (\partial \varphi_0 / \partial n) dS - \int \varphi^i \Delta \varphi_0 dV$ и условие $\Delta \varphi_0 = 0$ внутри шара, представим потенциальную энергию формулой

$$W = \frac{1-\mu}{\mu_0 2} \int_S \varphi^i \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS. \quad (2.4)$$

Для определения потенциальной энергии взаимодействия сферического ротора с вывешивающим полем магнитного подвеса можно использовать (2.2) или (2.4). Воспользуемся формулой (2.4). Подставим в нее (1.21) и (1.24) и, произведя интегрирование по сфере с учетом ортогональности сферических функций, получим

$$W = \frac{2\pi(1-\mu)}{\mu_0} \sum_{l,m} \frac{lR^{2l+1}}{l+1+l\mu} a_{lm} a_{lm}^*. \quad (2.5)$$

Силовая функция шара в поле подвеса, образованного N точечными магнитными полюсами

Ниже рассматривается силовая функция шара в поле подвеса, образованного постоянными магнитами. Магниты обращены одним полюсом в сторону вывешиваемого тела. Магнитное поле в объеме подвеса (до внесения ротора источников поля нет) может быть описано с помощью скалярного потенциала [5,6]. Как известно, в природе магнитных зарядов не существует, но часто для облегчения расчетов вводят фиктивные магнитные заряды. Поле, создаваемое тонким цилиндрическим магнитом (магнитной иглой, рис. 1), можно рассматривать как поле диполя [1,6,9], при этом, для достаточно длинных магнитов, вблизи одного из полюсов полем второго полюса можно пренебречь (выделенная область на рис. 1). Поэтому будем считать, что поле в рассматриваемой области создается N точечными магнитными полюсами.

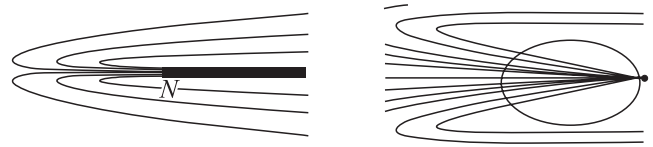


Рис. 1.

Потенциал φ_0 N -магнитных полюсов, расположенных в точках со сферическими координатами b_i, θ_i, φ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ и началом в центре шара, в некоторой точке B пространства вне шара можно записать в виде [5,7]

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{BA_i}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + b_i^2 - 2rb_i(\cos\theta \cos\theta_i + \sin\theta \sin\theta_i \cos(\varphi - \varphi_i))}} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l,m} \frac{\mu_0}{(2l+1)} r^l \frac{q_i}{b_i^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*(\theta_i, \varphi_i) \\ &= \sum_{l,m} \sqrt{\frac{1}{2l+1}} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \left\{ \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \frac{\mu_0 q_i}{b_i^{l+1}} Y^*(\theta_i, \varphi_i) \right\} \\ &= \sum_{l,m} a_{l,m}^* \sqrt{\frac{1}{(2l+1)}} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$a_{l,m}^* = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{(2l+1)}} \frac{\mu_0 q_i}{b_i^{l+1}} Y^*(\theta_i, \varphi_i), \quad (3.2)$$

здесь r, θ, φ — текущие сферические координаты произвольной точки B поля.

В силу принципа суперпозиции N -полюсами можно создать поле допольно сложной геометрии. Так, например, из формул (3.1) и (3.2) легко получить потенциал поля, созданного магнитным кольцом, который можно считать состоящим из бесконечного числа полюсов, или набором магнитных колец. Для этого нужно проинтегрировать (3.2) по φ от нуля до 2π , считая, что полюса распределены вдоль колец с постоянной плотностью. Выражение для коэффициента (3.2) будет

$$a_{l0} = \frac{\mu_0}{\sqrt{4\pi}} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{b_i^{l+1}} P_l(\cos \theta_i). \quad (3.3)$$

Таким же способом можно получить и более сложные конфигурации полей. Подставив (3.2) в формулу (2.5), получим

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0(1-\mu)}{2} \sum_{l,m} \frac{lR^{2l+1}}{l+1+l\mu} \\ &\times \sum_{i,k} \frac{1}{2l+1} \frac{q_i q_k}{(b_i b_k)^{l+1}} Y_{l,m}^*(\theta_i, \varphi_i) Y_{l,m}(\theta_k, \varphi_k) \\ &= \frac{\mu_0(1-\mu)}{8\pi} \sum_{i,k} \sum_l \frac{lR^{2l+1}}{l+1+l\mu} \frac{q_i q_k}{(b_i b_k)^{l+1}} P_l(\cos \theta_{ik}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\cos \theta_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k)$.

Для сверхпроводящего ротора $\mu = 0$, тогда

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} q_i q_k \frac{R}{b_i b_k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{l+1} \left(\frac{R^2}{b_i b_k} \right)^l P_l(\cos \theta_{ik}). \quad (3.5)$$

Используя сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n/(n+1) a^n P_n(\cos \varphi)$ (см. Приложение), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{l+1} \left(\frac{R^2}{b_i b_k} \right)^l P_l(\cos \theta) &= \frac{b_i b_k}{\sqrt{(b_i b_k)^2 - 2R^2 b_i b_k \cos \theta_{ik} + R^4}} \\ &- \frac{b_i b_k}{R^2} \ln \frac{\sqrt{(b_i b_k)^2 - 2R^2 b_i b_k \cos \theta_{ik} + R^4} + R^2 - b_i b_k \cos \theta_{ik}}{b_i b_k (1 - \cos \theta_{ik})}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Исключив $\cos \theta_{ik}$ и подставив (3.6) в (3.5), получим

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N q_i^2 R \left\{ \frac{1}{b_i^2 - R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{b_i^2}{b_i^2 - R^2} \right\} \\ &+ \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i < k} q_i q_k R \left\{ \frac{1}{\sqrt{(b_i^2 - R^2)(b_k^2 - R^2) + \eta_{ik}^2 R^2}} \right. \\ &\left. - \frac{1}{R^2} \ln \frac{2\sqrt{(b_i^2 - R^2)(b_k^2 - R^2) + \eta_{ik}^2 R^2} - (b_i^2 + b_k^2) + 2R^2 + \eta_{ik}^2}{\eta_{ik}^2 - (b_i - b_k)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $\eta_{ik}^2 = b_i^2 + b_k^2 - 2b_i b_k \cos \theta_{ik}$ — расстояние между i -м и k -м полюсами.

Силовые характеристики некоторых частных случаев подвесов

Постоянные магниты характеризуются остаточной намагниченностью B_r , которая для современных магнитов достигает значений 1.4 Т [4,10]. Для получения численного значения заряда, соответствующего одному из полюсов цилиндрического магнита, воспользуемся формулой $q = \pi a^2 M$ [1,9], где a — радиус магнита, M — намагниченность. Намагниченность цилиндрического магнита с остаточной индукцией связана соотношением $M = B_r / \mu_0$ [5,8,9], откуда получим формулу, связывающую заряд полюса магнита с остаточной намагниченностью

$$q = \frac{\pi a^2 B_r}{\mu_0}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим сверхпроводящий шар в поле двух магнитных полюсов, находящихся на расстоянии $2d$ друг от друга (рис. 2). Гравитационное поле учитывать пока не будем.

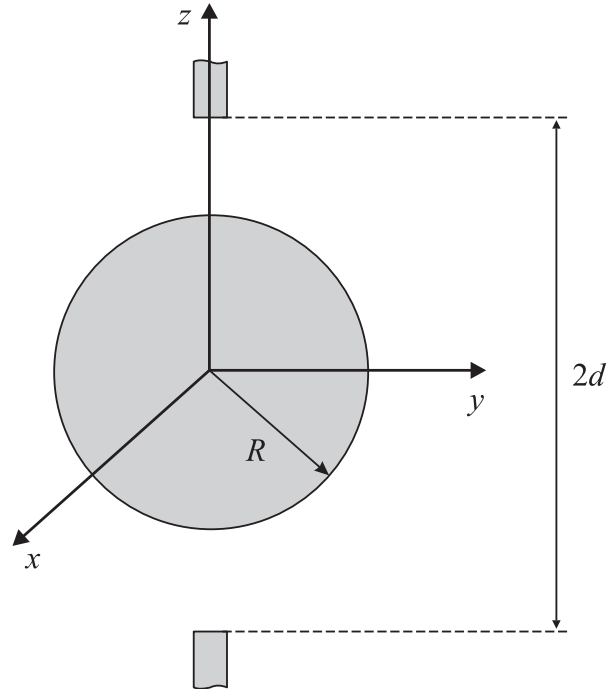


Рис. 2.

Пусть координаты этих полюсов $z_1 = d$, $z_2 = -d$. Потенциальная энергия сверхпроводящего шара в поле двух полюсов при его смещении перпендикулярно оси z

в направлении оси y имеет вид

$$W_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(q^2 R \left\{ \frac{1}{d^2 + y^2 - R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{d^2 + y^2}{d^2 + y^2 - R^2} \right\} + q^2 R \left\{ \frac{1}{\sqrt{(d^2 + y^2 - R^2)^2 + 4d^2 R^2}} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{\sqrt{(d^2 + y^2 - R^2)^2 + 4d^2 R^2} + R^2 + d^2 - y^2}{2d^2} \right\} \right). \quad (4.2)$$

В безразмерном виде эта формула запишется следующим образом:

$$w_{\perp} = \frac{W_{\perp}}{W_0} = \left\{ \frac{\gamma}{1 - \gamma^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \gamma^2 + \varepsilon^2} + \frac{\gamma}{\sqrt{(1 - \gamma^2 + \varepsilon^2)^2 + 4\gamma^2}} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\sqrt{(1 - \gamma^2 + \varepsilon^2)^2 + 4\gamma^2} + 1 + \gamma^2 - \varepsilon^2}{2} \right\}, \quad (4.3)$$

где $\gamma = \frac{R}{d}$, $\varepsilon = \frac{y}{d}$, $W_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2}{d^2}$, тогда сила

$$f_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{F_0} = -\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{2\gamma\varepsilon}{(1 - \gamma^2 + \varepsilon^2)} + \frac{\left(\frac{2\varepsilon}{1 - \gamma^2 + \varepsilon^2} - \frac{2(1 + \varepsilon^2)\varepsilon}{(1 - \gamma^2 + \varepsilon^2)^2} \right) (1 - \gamma^2 + \varepsilon^2)}{\gamma(1 + \varepsilon^2)} + \frac{\gamma(4\varepsilon - 4\gamma^2\varepsilon + 4\varepsilon^3)}{2(1 + 2\gamma^2 + 2\varepsilon^2 + \gamma^4 - 2\gamma^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{4\varepsilon - 4\gamma^2\varepsilon + 4\varepsilon^3}{4\sqrt{1 + 2\gamma^2 + 2\varepsilon^2 + \gamma^4 - 2\gamma^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4}} - \varepsilon}{\gamma \left(\frac{\sqrt{1 + 2\gamma^2 + 2\varepsilon^2 + \gamma^4 - 2\gamma^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \right)} \right), \quad (4.4)$$

здесь $F_0 = \mu_0 q^2 / (4\pi d^2)$, и жесткость

$$k_{\perp} = \frac{K_{\perp}}{K_0} = \frac{\partial^2 w_{\perp}}{\partial \varepsilon^2}, \quad K_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2}{d^3}. \quad (4.5)$$

Выражение для k_{\perp} при любых ε получено в пакете Maple, но вследствие громоздкости здесь не приводится. Приведем лишь первый член разложения жесткости по степеням ε :

$$k_{\perp} = \frac{2\gamma^3(1 - 7\gamma^2 + \gamma^4 + \gamma^6)}{(\gamma^2 - 1)^2(\gamma^2 + 1)^3}. \quad (4.6)$$

Выражения (4.5), (4.6) позволяют получить зависимость жесткости k_{\perp} от конструктивного параметра γ . Эта зависимость приведена на рис. 3. Видно, что жесткость k_{\perp} положительна при $\gamma < 0.37$.

Действительно, подстановка значений $\gamma > 0.37$ дает отрицательную жесткость, подстановка значений

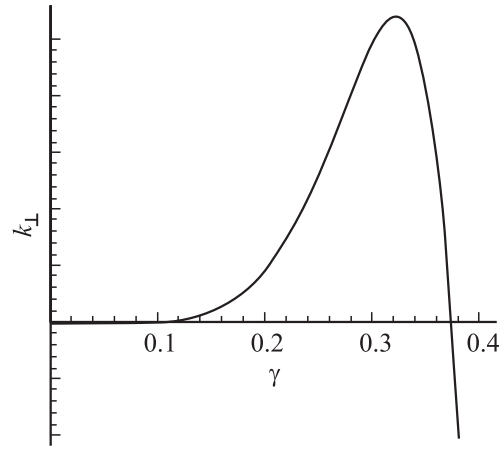


Рис. 3.

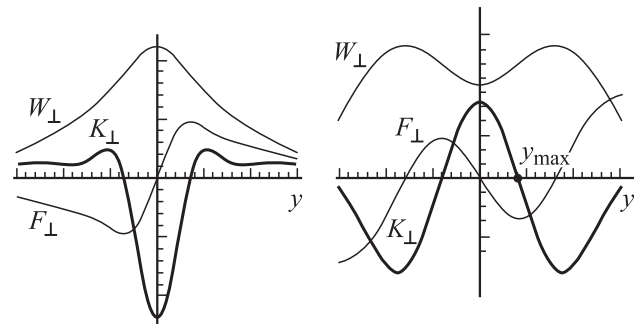


Рис. 4.

$\gamma < 0.37$ — положительную. Зависимость поперечной жесткости от смещения по оси y при $\gamma = 0.5$ и $\gamma = 0.32$ ($q = 3.5 \text{ Am}$, $R = 0.01 \text{ m}$, $d = 0.03 \text{ m}$) приведена на рис. 4. Величина заряда $q = 3.5 \text{ Am}$ получена по формуле (4.1), при этом взяты значения $B_r = 1.4 \text{ T}$, $a = 0.001 \text{ m}$, здесь a мало по сравнению с радиусом ротора и расстоянием от него до магнитов, поэтому заряд можно считать точечным.

При создании подвеса параметры следует выбирать так, чтобы ротор оставался в устойчивом состоянии при действии сил инерции. Максимальная устойчивость достигается при максимальной жесткости. Из анализа соотношения (4.6) и рис. 4 видно, что максимум жесткости достигается при значении параметра $\gamma = 0.32$.

Жесткость также зависит от радиуса ротора. Если в (4.5), (4.6) d выразить через R , то получим

$$K_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2}{R^3} 2\gamma^6 \left(\frac{2}{(1 + \gamma^2)^3} + \frac{1}{(1 - \gamma^2)^2} \right). \quad (4.7)$$

Из формулы (4.7) видно, что K_{\perp} увеличивается при уменьшении радиуса ротора пропорционально $1/R^3$.

Рассмотрим теперь силовые характеристики подвеса сверхпроводящего ротора при продольном смещении:

$$W_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{2} q^2 R \left\{ \frac{1}{(d-z)^2 - R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{(d-z)^2}{(d-z)^2 - R^2} \right\} + \frac{1}{2} q^2 R \left\{ \frac{1}{(d+z)^2 - R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{(d+z)^2}{(d+z)^2 - R^2} \right\} + q^2 R \left\{ \frac{1}{d^2 - z^2 + R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{d^2 - z^2 + R^2}{d^2 - z^2} \right\} \right), \quad (4.8)$$

или в безразмерном виде:

$$w_{\parallel} = \frac{W_{\parallel}}{W_0} = \frac{1}{2} \gamma \left\{ \frac{1}{(1-\xi)^2 - \gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2} \ln \frac{(1-\xi)^2}{(1-\xi)^2 - \gamma^2} + \frac{1}{(1+\xi)^2 - \gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2} \ln \frac{(1+\xi)^2}{(1+\xi)^2 - \gamma^2} + \frac{2}{1-\xi^2 + \gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \ln \frac{1-\xi^2 + \gamma^2}{1-\xi^2} \right\}, \quad (4.9)$$

где $\xi = z/d$.

$$f_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{F_0} = \frac{8\gamma^3 \xi (3\xi^4 - 2\xi^2 - 6\xi^2 \gamma^2 - 1 - 2\xi^2 + 3\gamma^4)}{(\xi^2 - \gamma^2 - 1)^2 (1 + 2\xi + \xi^2 - \gamma^2)^2 (1 - 2\xi + \xi^2 - \gamma^2)^2}, \quad (4.10)$$

$$k_{\parallel} = \frac{K_{\parallel}}{K_0} 2\gamma^3 \left[\frac{5 - \gamma^3}{(1 - \gamma^2)^3} - \frac{1}{(1 + \gamma^2)^2} \right]. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) приближенное, соответствует малым ξ , точное выражение не приводится ввиду громоздкости. Из (4.11) следует, что при любом γ жесткость положительна. На рис. 5 приведена зависимость продольной жесткости k_{\parallel} от γ . Из (4.11) видно, что, как и в случае поперечных смещений, жесткость увеличивается при уменьшении радиуса ротора пропорционально $1/R^3$. На рис. 6 приведен график зависимости жесткости от продольного смещения (по оси z) при некотором фиксированном значении γ .

Таким образом, если $\gamma < 0.37$, то состояние равновесия в точке $x = y = z = 0$ будет устойчивым для зарядов одного знака. На рис. 6 представлено соотношение поперечной и продольной жесткостей, видно, что продольная жесткость превосходит по величине поперечную и всегда положительна. Поэтому определяющей для выбора параметра γ будет поперечная жесткость. Для достижения максимальной устойчивости следует выбирать $\gamma = 0.32$. Если выбрать заряды разных знаков, то состояние будет неустойчивым, в этом случае поперечная жесткость k_{\perp} отрицательна при всех γ .

Изучим теперь поведение ротора при действии гравитационных сил или сил инерции. Пусть сила \mathbf{F} действует

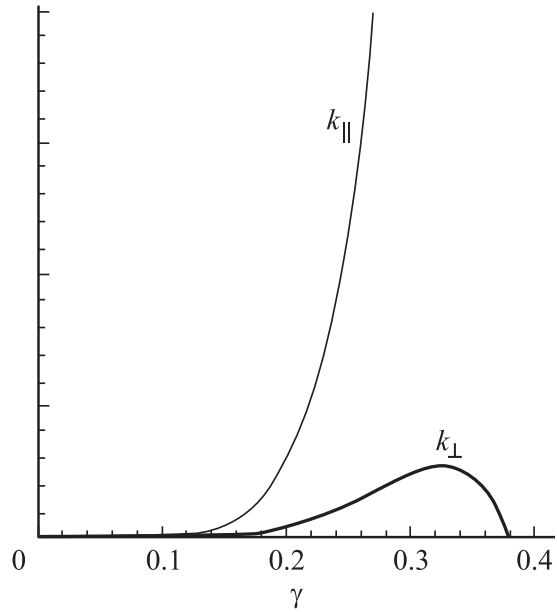


Рис. 5.

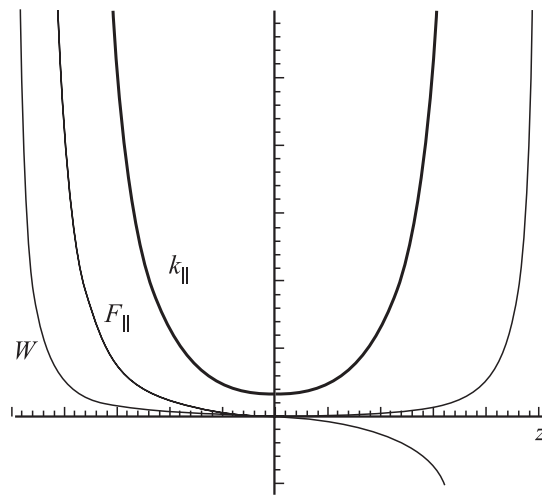


Рис. 6.

как показано на рис. 7. При действии силы \mathbf{F} состояние равновесия сместится и ротор „провиснет“. Координаты нового состояния равновесия определяются из

$$F = F_{\parallel}(z_0), \quad (4.12)$$

$$mg = \frac{8\gamma^3 \xi (3\xi^4 - 2\xi^2 - 6\xi^2 \gamma^2 - 1 - 2\gamma^2 + 3\gamma^4)}{(\xi^2 - \gamma^2 - 1)^2 (1 + 2\xi + \xi^2 - \gamma^2)^2 (1 - 2\xi + \xi^2 - \gamma^2)^2} F_0, \quad (4.13)$$

где g — ускорение.

Соотношения (4.12), (4.13) при известных R, d, q позволяют вычислить координату z_0 , в которой сила тяжести или инерции уравновешивается силой, действующей на ротор со стороны поля подвеса.

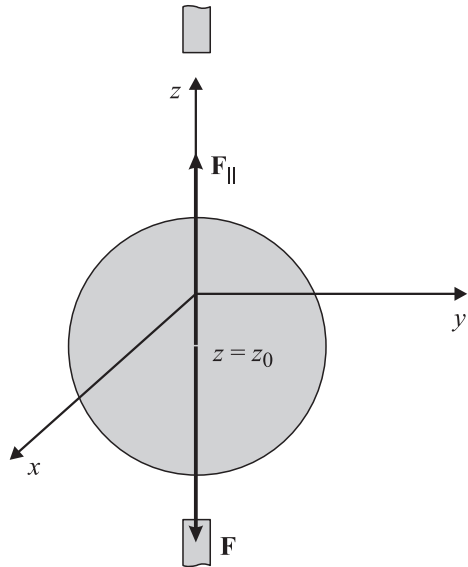


Рис. 7.

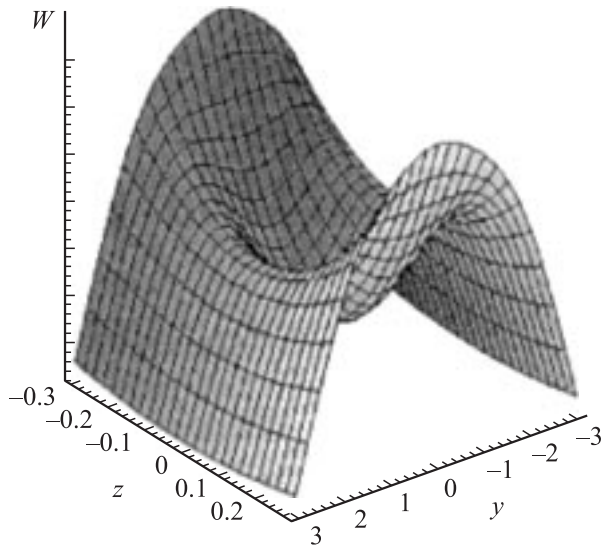


Рис. 8.

Зная новое состояние равновесия необходимо решить вопрос об его устойчивости. Вопрос о продольной устойчивости решается положительно, т.к. продольная жесткость всегда положительна. Для определения поперечной устойчивости в новом состоянии равновесия необходимо сначала получить выражение для энергии в этой точке, а затем вычислить жесткость. Для этого воспользуемся общей формулой для энергии (3.7) с $b_1 = \sqrt{y^2 + (d - z)^2}$, $b_2 = \sqrt{y^2 + (d + z)^2}$, $\eta_{12} = 2d$, $x = 0$. На рис. 8 приведен график зависимости энергии W при изменении координат ротора z и y , полученный с помощью формулы (3.7). Вторая производная от энергии по y при $z = z_0$ определяет жесткость. Из рис. 8 видно, что при некотором критическом продольном сме-

щении z_{cr} поперечная устойчивость теряется, жесткость меняет знак с плюса на минус. Вычислить z_{cr} можно, решив следующее уравнение относительно z :

$$\left. \frac{\partial^2 W(y, z)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0. \quad (4.14)$$

Конфигурация, представленная на рис. 7 будет устойчива при $z_0 < z_{cr}$. Решить уравнение (4.14) в общем случае не удастся, результат можно получить при конкретных значениях параметров q , R , d . Например, при $q = 3.5 \text{ Am}$, $d = 0.03 \text{ m}$, $R = 0.01 \text{ m}$, получим $z_{cr} = \pm 0.0025 \text{ m}$.

4. Рассмотрим теперь сверхпроводящий шар в поле шести магнитных полюсов, расположенных симметрично на осях $0x$, $0y$, $0z$, т.е. подвес с магнитными полюсами, расположенными в точках с координатами (рис. 9):

	1	2	3	4	5	6
X	d	$-d$	0	0	0	0
Y	0	0	d	$-d$	0	0
Z	0	0	0	0	d	$-d$

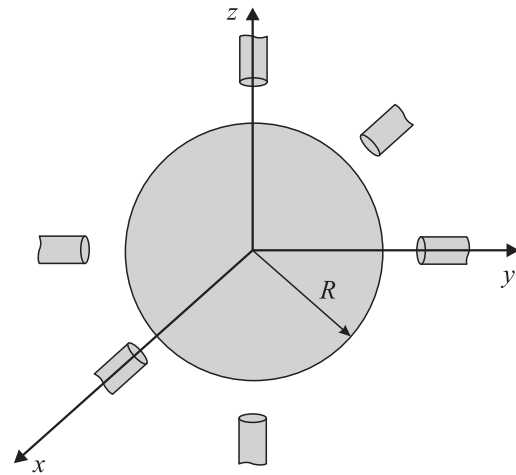


Рис. 9.

Силловая функция в случае шести точечных зарядов имеет вид

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 q_i^2 R \left\{ \frac{1}{b_i^2 - R^2} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{b_i^2}{b_i^2 - R^2} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i < k} q_i q_k R \left\{ \frac{1}{\sqrt{(b_i^2 - R^2)(b_k^2 - R^2) + \eta_{ik}^2 R^2}} - \frac{1}{R^2} \ln \frac{2\sqrt{(b_i^2 - R^2)(b_k^2 - R^2) + \eta_{ik}^2 R^2} - (b_i^2 - R^2) + 2R^2 + \eta_{ik}^2}{\eta_{ik}^2 - (b_i - b_k)^2} \right\} \right). \quad (4.15)$$

Вычисления силы и жесткости по этой формуле довольно громоздки, но легко проводятся аналитически в математическом пакете Maple. Кривая зависимости жесткости от расстояния до магнитов при смещении ротора по любой из осей совпадает с продольной жесткостью для подвеса с двумя зарядами, рассмотренного выше (рис. 5). Жесткость остается положительной при любых значениях d и возрастает с уменьшением зазора. Поэтому при конструировании подвеса с шестью магнитными полосами следует делать зазор как можно меньшим.

Таким образом, возможно устойчивое удержание сверхпроводящего ротора в поле, образованном двумя или шестью постоянными магнитами. При этом в подвесе на двух магнитах параметр γ (отношение радиуса ротора к половине расстояния между противоположными магнитами) следует выбирать равным 0.32. В подвесе на шести магнитах следует зазор между ротором и магнитами делать минимально возможным, при этом учитывая деформации ротора и возможные колебания. Кроме того, большая устойчивость достигается при уменьшении радиуса ротора.

Для увеличения массы вывешиваемого тела необходимо увеличить силу магнитов или изменить конфигурацию поля, т.е. рассматривать не точечные заряды, а некоторые распределенные конфигурации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00963).

Приложение

Вычисление ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n}{n+1} P_n(\cos \varphi) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a^n P_n(\cos \varphi) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n+1} P_n(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Первая сумма

$$\sum a^n P_n(\cos \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2}},$$

интегрируя это равенство по a в пределах от 0 до a , получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} P_n(\cos \varphi) &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2}} \\ &= \ln \left\{ 2\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2} + 2x - 2 \cos \varphi \right\}_0^a \\ &= \ln \frac{\sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2} + a - \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} a^n P_n(\cos \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2}} \\ &- \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1 - 2a \cos \varphi + a^2} + a - \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Михалевич В.С. и др. Магнитная потенциальная яма — эффект стабилизации динамических систем. Киев: Наук. думка, 1991. 335 с.
- [2] Урман Ю.М. К расчету силовых характеристик внешнего сферического подвеса криогенного гироскопа // Изв. вузов. Приборостроение. 1973. № 8. С. 72–74.
- [3] Левин Л.А., Жидков А.А., Малтинский М.И. Физические основы, элементы и устройство криогенного гироскопа. Л.: Румб, 1979.
- [4] Белов К.П. Редкоземельные металлы, сплавы и соединения — новые магнитные материалы для техники // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 1. С. 94–99.
- [5] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
- [6] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 660 с.
- [7] Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд. АН СССР, 1948. 727 с.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [9] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [10] Постоянные магниты. Справочник / Под ред. Ю.М. Пятина. М.: Энергия, 1980. 376 с.