

01;03

## К вопросу о влиянии внутреннего тепловыделения на движение нагретой твердой частицы в вязкой жидкости

© Н.В. Малай, А.А. Плесканев, Е.Р. Щукин<sup>1</sup>Белгородский государственный университет,  
308015 Белгород, Россия<sup>1</sup> Институт высоких температур РАН,

Москва, Россия

e-mail: malay@bsu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г.)

В стоковском приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле получено приближенное аналитическое решение задачи о влиянии внутреннего тепловыделения на движение нагретой твердой сферической частицы в вязкой жидкости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. При решении уравнений гидродинамики использовался степенной вид зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры и экспоненциально-степенной вид зависимости вязкости жидкости от температуры. Обсуждается возможность экспериментального наблюдения эффекта.

PACS: 44.05.+e

### Введение

В статье рассматривается установившееся движение твердой неравномерно нагретой сферической частицы радиуса  $R$  в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Нагрев гидрозольной частицы происходит за счет неоднородно распределенных в ее объеме внутренних источников тепла плотностью  $q_i(r, \theta)$ , где  $r$  и  $\theta$  — сферические координаты ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Наличие источников тепла внутри гидрозольной частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции; с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников (стоков) тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей жидкости вдали от нее. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики жидкости и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности. Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости наиболее сильно зависит от температуры [1]. Для учета зависимости динамической вязкости от температуры воспользуемся формулой (1), позволяющей описывать изменение вязкости жидкости в широком интервале температур (при  $F_n = 0$  эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [1]):

$$\mu_e = \mu_\infty \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left( \frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right)^n \right] \exp \left\{ -A \left( \frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $A$  и  $F_n$  — постоянные,  $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$ ,  $T_\infty$  — температура жидкости вдали от частицы. Например, для воды  $A = 5.779$ ,  $F_1 = -2.318$ ,  $F_2 = 9.118$ ,  $T_\infty = 273$  К,

а для глицерина  $A = 17.29$ ,  $F_1 = -1.228$ ,  $F_2 = 7.022$ ,  $T_\infty = 303$  К. Относительная погрешность формулы (1) в этом случае не превышает 3%. Коэффициенты  $F_n$  рассчитывались с помощью математического пакета Maple VIII. Здесь и далее индексы „e“ и „i“ будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом „ $\infty$ “ обозначены параметры жидкости на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Жидкость, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением. Тепловое скольжение вызывает появление дополнительной силы, которую мы обозначим через  $F_q$ . Когда величина этой силы становится равной величине силы вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Таким образом, в случае значительных относительных перепадов температуры в окрестности частицы, т.е. когда  $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \sim O(1)$ , где  $T_{is}$  — средняя температура поверхности частицы в вязкой жидкости, может возникнуть установившееся движение твердой частицы.

Если нагрев частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения, то в газе это явление хорошо известно, и оно называется фотофорезом [2,3]. При этом касательная составляющая скорости удовлетворяет на поверхности твердой аэрозольной частицы ( $r = R$ ) условию скольжения [4]:

$$U_\theta = K_{ts} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}. \quad (2)$$

Здесь  $U_\theta$  — касательная компонента массовой скорости  $\mathbf{U}$  в сферической системе координат;  $v_e$  — коэффициент кинематической вязкости газа;  $T_e$  — температура газа;  $K_{ts}$  — коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газа. При коэффициентах аккомодации танген-

циального импульса  $\alpha_\tau$  и энергии  $\alpha_E$ , равных единице, газокинетический коэффициент  $K_{\text{ts}} = 1.152$  [4].

Впервые задача о скольжении жидкости по поверхности твердой гидрозольной частицы была решена Бассе [5]. Он предположил, что тангенциальная скорость жидкости относительно твердого тела на его поверхности пропорциональна тангенциальным напряжениям. Постоянную пропорциональности  $K_{\text{ts}}$ , связывающую эти две величины, он назвал коэффициентом скольжения. Если этот коэффициент отличен от нуля, то предполагается, что он зависит только от природы жидкости и твердой поверхности. В случае если сфера находится в покое, и жидкость обтекает ее, эта гипотеза для осесимметричных течений принимает вид (гипотеза Бассе)

$$U_e = K_{\text{ts}} \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right).$$

Построение теории влияния внутреннего тепловыделения на движение твердой гидрозольной частицы сферической формы в вязкой неизотермической жидкости является достаточно сложная задача. Это связано с тем, что, во-первых, в жидкости движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями, так и объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей; во-вторых, это движение возникает за счет скольжения жидкости вдоль твердой поверхности. Теория теплового скольжения жидкости вдоль твердой поверхности к настоящему времени изучена недостаточно полно. Причина этого в том, что отсутствует строгая математическая теория неоднородных жидкостей и, в-третьих, это — механизм распределения тепловой энергии внутри твердого тела, за счет которого и происходит неравномерный нагрев поверхности частицы. В последнем случае произошел существенный прогресс как в теоретическом, так и в экспериментальном плане [6,7].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается установившееся движение твердой неравномерно нагретой сферической частицы радиуса  $R$  в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Нагрев гидрозольной частицы происходит за счет неоднородно распределенных в ее объеме внутренних источников тепла плотностью  $q_i(r, \theta)$ . При рассмотрении движения частицы предполагается, что фазовый переход отсутствует; коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности жидкости и степенной вид зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры:  $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\varphi$ . Здесь  $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$ ,  $t_i = T_i/T_\infty$ . Движение частицы описывается в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре частицы.

В рамках сформулированных допущений в сферической системе координат уравнения и граничные условия для скорости  $\mathbf{U}_e$ , давления  $P_e$  и температур  $T_e, T_i$

запишутся в виде [8,9]

$$\begin{aligned} \nabla P_e &= \mu_e \Delta \mathbf{U}_e + 2(\nabla \mu_e \nabla) \mathbf{U}_e + [\nabla \mu_e \times \text{rot} \mathbf{U}_e], \\ \text{div} \mathbf{U}_e &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} r = R: \quad U_r &= 0, \quad U_\theta = K_{\text{ts}} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}, \quad T_e = T_i, \\ \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} &= \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_\infty^4), \\ r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{U}_e &\rightarrow U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ P_e &\rightarrow P_\infty, \quad T_e \rightarrow T_\infty, \\ r \rightarrow 0: \quad T_i &\neq \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $U_r$  и  $U_\theta$  — радиальная и касательная компоненты массовой скорости  $\mathbf{U}_e$ ;  $\mathbf{U}_\infty$  — скорость плоскопараллельного потока жидкости, обтекающего частицу ( $\mathbf{U}_\infty \parallel OZ$ );  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — единичные векторы сферической системы координат;  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ ;  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана;  $\sigma_1$  — интегральная степень черноты.

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты  $\rho_e, \mu_\infty, \lambda_e$  и сохраняющиеся в процессе движения сферической частицы величины —  $R, T_\infty$  и  $U_\infty$ . Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию — число Рейнольдса  $\text{Re}_\infty = (\mu_\infty U_\infty R)/\rho_e \ll 1$ . Обезразмерим уравнения (1.1)–(1.3) и граничные условия (1.4) следующим образом:  $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U_\infty$ ,  $t_k = T_k/T_\infty$ ,  $p_e = P_e/P_\infty$ ,  $P_\infty = (\mu_\infty U_\infty)/R$ ,  $k = e, i$ .

При  $\varepsilon = \text{Re}_\infty \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики и теплопереноса следует искать в виде

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots,$$

$$p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, \quad t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots \quad (1.5)$$

## 2. Определение полей температур. Вывод выражения для силы и скорости установившегося движения гидрозольной частицы

Подставляя (1.5) в систему уравнений (1.1)–(1.3) и разделяя переменные в конечном итоге, были получены следующие выражения для компонентов массовой скорости и полей температур:

$$V_r(y, \theta) = \cos \theta (1 + A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y)),$$

$$t_e(y, \theta) = t_e^{(0)}(y) + \varepsilon t_e^{(1)}(y, \theta), \quad (2.1)$$

$$V_\theta(y, \theta) = -\sin \theta (1 + A_1 G_3(y) + A_2 G_4(y)),$$

$$t_i(y, \theta) = t_i^{(0)}(y) + \varepsilon t_i^{(1)}(y, \theta), \quad (2.2)$$

где

$$G_1 = -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)y^n},$$

$$G_2 = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)}}{(n+1)y^n} - \frac{\alpha}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+3) \ln \frac{1}{y} - 1 \right] \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)^2 y^n},$$

$$G_3 = G_1 + \frac{y}{2} G_1', \quad G_4 = G_2 + \frac{y}{2} G_2',$$

$$t_e^{(0)}(y) = 1 + \frac{\gamma}{y}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$t_i^{(0)}(y) = \left( B_0 + \frac{1+\omega}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_{\infty} y} \int_V q_i dV + \int_V \frac{f_0}{y} dy - \frac{1}{y} \int_V f_0 dV \right)^{\frac{1+\omega}{\omega}}, \quad y = r/R, \quad (2.3)$$

$$t_i^{(1)}(y) = \frac{\cos \theta}{(1+\omega)t_{i0}^{\omega}} \left( B y + \frac{(1+\omega)RJ}{3\lambda_{i\infty} T_{\infty} y^2} + \frac{1}{3} \left[ y \int_1^y \frac{f_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y f_1 dy \right] \right), \quad t_e^{(1)} = \frac{\Gamma}{y^2} \cos \theta,$$

$$f_n(y) = -\frac{R^2(1+\omega)y^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) P_n(x) dx,$$

$$J = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$$

— дипольный момент плотности тепловых источников,  $P_n(x)$  — полиномы Лежандра,  $x = \cos \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ .

В (2.3)  $G_k^I, G_k^{II}$  — первая и вторая производные по  $y$  от соответствующих функций ( $k = 1, 2$ ). Значения коэффициентов  $\Delta_n^{(1)}$  ( $n \geq 1$ ) и  $\Delta_n^{(2)}$  ( $n \geq 3$ ) находятся с помощью рекуррентных соотношений:

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)} \sum_{k=1}^{\infty} [(n+4-k)(\alpha_k^{(1)}(n+5-k) - \alpha_k^{(2)}) + \alpha_k^{(3)}] \gamma^k \Delta_{n-k}^{(1)},$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+3)(n-2)} \left[ -6\alpha_n^{(4)} \gamma^{(n)} + \sum_{k=1}^n \left\{ (n+2-k) \times [(n+2-k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)} \right\} \gamma^k \Delta_{n-k}^{(2)} + \alpha \sum_{k=0}^n [(2n+5-2k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] \gamma^k \Delta_{n-k-2}^{(1)} \right].$$

При вычислении коэффициентов  $\Delta_n^{(1)}$  и  $\Delta_n^{(2)}$  по вышеприведенным формулам необходимо учитывать, что

$$\Delta_0^{(1)} = -3, \Delta_0^{(2)} = -1, \Delta_2^{(2)} = 1, \alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(4)} = 1, \alpha_0^{(3)} = -4, \alpha_n^{(1)} = F_n, \alpha_n^{(2)} = (4-n)F_n + AF_{n-1}, \alpha_0^{(2)} = 4, \alpha_n^{(4)} = A^n/n!, \alpha_n^{(3)} = 2AF_{n-1} - 2(n+2)F_n,$$

$$\Delta_1^{(2)} = -\frac{\gamma}{4} [6\alpha_1^{(4)} + 2(3\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}],$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{15} \left\{ -6\gamma\alpha_2^{(4)} + [3(4\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}] \Delta_1^{(2)} - [2(3\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}) + \alpha_2^{(3)}] \gamma \right\}.$$

Постоянные интегрирования, входящие в (2.1)–(2.2) определяются из граничных условий на поверхности частицы, и затем интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы получено следующее выражение для полной силы  $\mathbf{F}$ , действующую на гидрозольную частицу, которая аддитивно будет складываться из силы вязкого сопротивления  $\mathbf{F}_\mu$  и силы  $\mathbf{F}_q$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \varepsilon \mathbf{F}_q, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = -6\pi R \mu_\infty U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_q = 6\pi R \mu_\infty f_q \mathbf{J} \mathbf{n}_z,$$

$$f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1} \exp\{-A\gamma\}, \quad f_q = K_{is} \frac{4\nu_{es}}{3t_{es}} \frac{G_1}{N_1 \delta \lambda_{is} T_{\infty}} \exp\{-A\gamma\},$$

$$N_1|_{y=1} = G_1 G_2' - G_2 G_1', \quad N_2|_{y=1} = -G_1', \quad t_{es} = t_e^{(0)}|_{y=1},$$

$$\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_{e\infty}}{\lambda_{is}} + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{is}} T_{\infty}^3 t_{es}^3, \quad \lambda_{is} = \lambda_{i\infty} t_{es}^\omega, \quad \mathbf{n}_z$$

— единичный вектор в направлении оси  $Z$ . Индексом „s“ здесь обозначены значения физических величин, взятых при средней относительной температуре поверхности гидрозольной частицы  $t_{es} = T_{es}/T_{\infty}$ , определяемой из решения трансцендентного уравнения (2.5):

$$\frac{T_{es}}{T_{\infty}} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_{e\infty} T_{\infty}} \int_V q_i(r, \theta) dV - \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_{\infty}^3}{\lambda_{e\infty}} \left[ \left( \frac{T_{es}}{T_{\infty}} \right)^4 - 1 \right]. \quad (2.5)$$

В (2.5) интегрирование ведется по всему объему частицы.

При выполнении условия  $\lambda_e \ll \lambda_i$  в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу  $\theta$  в системе частица–жидкая среда и считать, что  $\mu_e(t_e) \approx \mu_e(t_e^{(0)})$ . С учетом этого выражение (1) принимает вид

$$\mu_e = \mu_\infty \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right] \exp\left\{ -A \frac{\gamma}{y} \right\}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) позволяет рассматривать по отдельности тепловую задачу и гидродинамическую. Сшивка решений происходит с помощью граничных условий на поверхности гидрозольной частицы.

Приравнивая общую силу  $\mathbf{F}$  к нулю, получаем выражение для скорости установившегося движения твердой частицы сферической формы в вязкой неизотермической жидкости:

$$\mathbf{U}_q = -\varepsilon \frac{f_q}{f_\mu} \mathbf{Jn}_z. \quad (2.7)$$

### 3. Анализ полученных результатов

Формулы (2.4) и (2.7) позволяют оценить влияние внутреннего тепловыделения при экспоненциально-степенном виде зависимости вязкости окружающей жидкости от температуры на величину силы и скорости установившегося движения гидрозольной частицы.

Выражения (2.4) и (2.7) показывают, что на величину и направление  $\mathbf{F}_q$  и  $\mathbf{U}_q$  будут оказывать влияние величина и направление дипольного момента плотности тепловых источников и теплопроводность частицы. При  $\lambda_i \rightarrow \infty$  значения  $\mathbf{F}_q$  и  $\mathbf{U}_q$  при фиксированной величине дипольного момента плотности тепловых источников стремятся к нулю.

Чтобы оценить, какой вклад могут оказать тепловые источники, неоднородно распределенные в объеме гидрозольной частицы на скорость ее установившегося движения, необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда плотность тепловых источников обусловлена поглощением частицей электромагнитного излучения, и при этом частица поглощает излучение как черное тело. В этом случае поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной  $\delta R \ll R$ , прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы, и плотность тепловых источников внутри слоя толщиной  $\delta R$  определяется с помощью следующей формулы [10]:

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad R - \delta R \leq r \leq R \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего излучения.

В этом случае

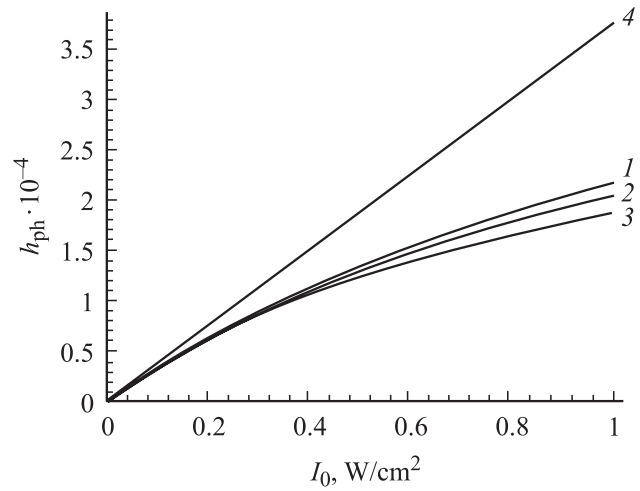
$$\int_V q_i(r, \theta) z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I_0, \quad \int_V q_i(r, \theta) dV = \pi R^2 I_0$$

и получаем следующие выражения влияния внутреннего тепловыделения на величину силы и скорости установившегося движения абсолютно черной твердой частицы сферической формы:

$$F_{ph} = -\varepsilon 6\pi R \mu_\infty K_{ts} f_{ph}, \quad U_{ph} = \varepsilon K_{ts} h_{ph},$$

где

$$f_{ph} = \frac{2}{3} \frac{v_{es}}{t_{es}} \frac{G_1}{N_1 \delta \lambda_{is} T_\infty} \exp\{-A\gamma\} I_0, \\ h_{ph} = \frac{v_{es}}{t_{es}} \frac{G_1}{N_2 \delta \lambda_{is} T_\infty} I_0. \quad (3.1)$$



Зависимость функции  $h_{ph}$  от интенсивности падающего излучения  $I_0$ ,  $\omega = 0.5$  (1); 0.7 (2) и 1 (3). Кривая 4 соответствует малым перепадам температуры.

Для иллюстрации вклада внутреннего тепловыделения в скорость  $U_{ph}$  движения твердой гидрозольной частицы (см. рисунок) приведены значения функции  $h_{ph}$  от интенсивности падающего излучения  $I_0$ . Численные оценки проводились для частиц борированного графита, взвешенных в воде при  $T_\infty = 273$  К,  $\lambda_{i\infty} = 55$  W/m·degree и  $\omega = 0.5$  (кривая 1); 0.7 (кривая 2) и 1 (кривая 3). Кривая 4 построена при малых относительных перепадах температуры ( $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\omega = 0$ ), но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности частицы. Расчеты показали, что учет внутреннего тепловыделения оказывает существенное влияние на скорость установившегося движения гидрозольной частицы.

### Заключение

Получены выражения для силы, действующей на гидрозольную частицу сферической формы и скорости ее установившегося движения при произвольных перепадах температуры между ее поверхностью и жидкости вдали от нее, за счет нагрева поверхности частицы внутренними источниками тепла неоднородно распределенных в ее объеме. Результаты работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение гидрозольных частиц; при оценке скорости осаждения гидрозольных частиц в каналах; при анализе процессов переноса гидрозольных частиц в зоне протекания химических реакций и т.д. Количественное исследование обсуждаемого явления для твердых частиц представляет собой вполне реальную экспериментальную задачу.

## Список литературы

- [1] *Бретшнайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
- [2] *Кутуков В.Б., Шукин Е.Р., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1975. Т. 46. С. 626–627.
- [3] *Шукин Е.Р., Малай Н.В.* // ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 628–635.
- [4] *Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 1047–1050.
- [5] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
- [6] *Береснев С.А., Кочнева Л.Б.* // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 2. С. 134–141.
- [7] *Домбровский Л.А.* // ТВТ. 2004. Т. 42. № 42. С. 961–971.
- [8] *Ландву Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [9] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
- [10] *Борен К.Ф., Хафмен Д.Р.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.