

01;09;10

Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля

© Б.Г. Репин, А.Е. Дубинов

Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov@rol.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г.)

Представлены результаты численного исследования фазовой синхронизации трех СВЧ-генераторов типа „виркатор“ в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Для отображения динамики фазировки виркаторов предложено изображать фазовые портреты системы в треугольной системе координат. Найдены различные режимы фазировки осцилляторов.

PACS: 05.45.Xt, 07.57.-c

Введение

Для генерации сверхмощных импульсов СВЧ-излучения все чаще используются генераторы с виртуальным катодом — виркаторы [1,2], имеющие ряд преимуществ перед генераторами других типов. Большое число лабораторий мира уже достигли мультигигаваттный уровень мощности СВЧ-генерации в виркаторах, и можно констатировать, что этот уровень выводимой в дальнюю зону мощности СВЧ-излучения приблизился к порогу пробойной прочности выходного окна. Решение технической задачи предотвращения этого пробоя может быть получено путем суммирования выходной мощности сфазированных виркаторов сравнительно небольшой мощности, т.е. путем создания многоэлементных фазированных решеток виркаторов (ФРВ).

К настоящему времени в Physics International Company (США) [3] и Российском федеральном ядерном центре — Всероссийском научно-исследовательском институте экспериментальной физики (Россия) [4] достигнуты определенные успехи по созданию многоэлементных ФРВ. Эти экспериментальные работы сопровождаются моделированием процесса фазировки виркаторов.

Ранее было установлено [5], что одиночный виркатор как динамический объект ведет себя подобно известному осциллятору Ван-дер-Поля. Поэтому в работах группы из Physics International Company моделирование двухэлементной ФРВ производилось на основе исследования фазировки двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля [6] по методике, предложенной Р. Адлером [7].

В работах же российской группы [8] моделирование фазировки в двухэлементной ФРВ производилось методом крупных частиц самосогласованным образом (использовался известный PIC-код „КАРАТ“ [9]). Однако моделирование уже трехэлементной ФРВ с помощью этого кода для современных компьютеров не представляется возможным.

Целью данной работы является исследование режимов фазировки трехэлементной ФРВ на базе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля на основе работ Р. Адлера.

1. Модель синхронизации виркатора

Для наглядной демонстрации синхронизации такого элемента рассмотрим осциллятор Ван-дер-Поля, находящийся во взаимодействии с внешней неавтономной силой. Стартовое уравнение динамики осциллятора с частотой ω_0 , малым параметром μ и инкрементом изменения амплитуды колебаний γ под действием внешней периодической силы с частотой ω_i и амплитудой E_i применительно к виркатору записывается следующим образом:

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \mu(\gamma - E^2) \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E = \frac{\omega_i^2}{Q} E_i \sin \omega_i t, \quad (1)$$

где Q — добротность виркатора, E — электрическое поле в виркаторе.

Без внешнего воздействия осциллятор (1) — при $\gamma < 0$ имеет на фазовой плоскости в нуле состояние равновесия типа устойчивый фокус. При увеличении γ в системе происходит потеря устойчивости состояния равновесия через бифуркацию Андронова–Хопфа с образованием устойчивого предельного цикла. Стоит отметить, что осциллятор обладает мягким режимом самовозбуждения: дальнейшее увеличение γ приводит лишь к росту амплитуды колебаний у предельного цикла.

Поведение неавтономной системы схоже с описанным, но теперь вместо устойчивого состояния равновесия в фазовом пространстве имеется устойчивое периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\omega_i$.

Будем искать решение системы (1) в виде $E(t) = E_0(t) \cos(\omega_i t - \Phi(t))$, где $E_0(t)$ и $\Phi(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. При относительной разности частот порядка μ ($\mu \ll 1$) методом усреднения

получим систему укороченных уравнений (2), (3) для амплитуд и фаз:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_i - \omega_0 - \frac{\omega_0 \rho}{Q} \sin \Phi, \quad (2)$$

$$\frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dt} = \mu (\gamma - E_0^2) + \frac{\omega_0 \rho}{Q} \sin \Phi, \quad (3)$$

где $\rho = E_i/E_0 = \gamma(P_i/P_0)^{1/2}$ — коэффициент связи (P_i , P_0 — мощности соответствующих электромагнитных волн). Для постоянных ρ из уравнения (2) следует независимость фазы колебаний от амплитуды. Поэтому фазовая синхронизация, когда $d\Phi/dt = 0$, и уравнение (3) в совокупности дают условие на захват частоты. Обозначив $\Delta\omega = \omega_i - \omega_0$ и принимая во внимание ограниченность функции синуса, получаем, что захват частоты наступает при выполнении неравенства (4):

$$|\Delta\omega| \leq \omega_0 \rho / Q. \quad (4)$$

Для ρ , зависящих от времени, систему уравнений (2), (3) необходимо решать численно.

2. Синхронизация трех связанных между собой виркаторов

Рассмотрим взаимодействие трех виркаторов, связанных по принципу „каждый с каждым“ (см. рис. 1). Систему уравнений в этом случае легко можно получить, обобщая уравнения (2), (3) для каждого из виркаторов. Однако теперь нужно учитывать и время задержки между генераторами. Такая колебательная система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dE_i(t)}{dt} &= \mu (\gamma - E_i^2(t)) E_i(t) \\ &+ \frac{\omega_{0i}}{Q_i} E_i(t) \sum_{j \neq i} \rho_{ij}(t) \cos(\Phi_i(t) - \Phi_j(t - \tau_p)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi_i(t)}{dt} = \omega_{0i} - \frac{\omega_{0i}}{Q_i} \sum_{j \neq i} \rho_{ij}(t) \sin(\Phi_i(t) - \Phi_j(t - \tau_p)), \quad (6)$$

где $\rho_{ij} = \gamma(P_j(t - \tau_p)/P(t))^{1/2}$ — коэффициенты связи между виркаторами ($i, j = \overline{1, 3}, i \neq j$), а τ_p — время, затрачиваемое сигналом на преодоление расстояния между ними.

Изучению дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами посвящены многочисленные работы (см., например, [10–12]). Главной проблемой исследования таких систем является бесконечномерное фазовое пространство, поэтому основным анализом этих моделей, как правило, является численный расчет. Несмотря на это можно провести исследование стационарных периодических режимов синхронизованных колебаний, их устойчивость, а также процессы установления.

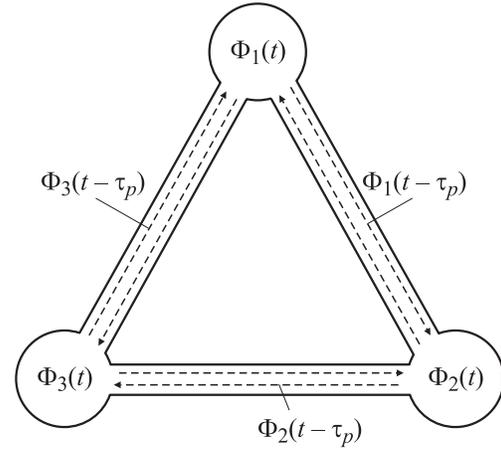


Рис. 1. Схематическое изображение модели трехэлементной ФРВ.

Нас прежде всего будут интересовать стационарные периодические режимы колебаний. Они получаются из системы уравнений (5), (6) при выполнении условий

$$\begin{aligned} E_i &= \text{const}, \quad \eta_1 = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}, \\ \eta_2 &= \Phi_2 - \Phi_3 = \text{const} \quad (i = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения стационарных периодических режимов мы должны положить

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dt} &= 0, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \frac{d\Phi_2}{dt} - \frac{d\Phi_3}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай идентичных генераторов

$$\rho_{i,j} = \rho, \quad Q_i = Q \quad (i, j = \overline{1, 3}, i \neq j);$$

и будем предполагать, что имеет место резонансное соотношение частот

$$\omega_{01} \approx \omega_{02} \approx \omega_{03} \approx \omega_0 = (\omega_{01} + \omega_{02} + \omega_{03})/3.$$

На основании этих условий для определения амплитуд и разности фаз в стационарном режиме получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu (\gamma - E_i^2(t)) E_i(t) \\ + \frac{\omega_{0i}}{Q_i} E_i(t) \sum_{j \neq i} \rho_{ij}(t) \cos(\Phi_i(t) - \Phi_j(t - \tau_p)) &= 0, \\ \frac{\omega_0 \rho}{Q} [(2 \sin \eta_1 + \sin(\eta_1 + \eta_2) - \sin \eta_2) \cos \Phi_c \\ + (\cos(\eta_1 + \eta_2) - \cos \eta_2) \sin \Phi_c] &= 0, \\ \frac{\omega_0 \rho}{Q} [(2 \sin \eta_2 + \sin(\eta_1 + \eta_2) - \sin \eta_1) \cos \Phi_c \\ + (\cos \eta_1 - \cos(\eta_1 + \eta_2)) \sin \Phi_c] &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_c — частота синхронизации, $\Phi_c = \omega_c \tau_p$.

Для исследования устойчивости стационарных режимов, которые получаются из системы (7), составляем для системы уравнений (5), (6) соответствующую систему уравнений в вариациях и получаем характеристическое уравнение и условия устойчивости. В силу громоздкости мы приведем только окончательное решение.

С учетом запаздывания получаем четыре типа стационарных режимов:

$$1. \quad \eta_1 = 2\pi k, \quad \eta_2 = 2\pi n, \quad E_i = \sqrt{\gamma + 2 \frac{\rho\omega_0}{\mu Q} \cos \Phi_c};$$

$$2. \quad \eta_1 = \pi(2k + 1), \quad \eta_2 = \pi(2n + 1), \quad E_i = \sqrt{\gamma};$$

$$3. \quad \eta_1 = 2\pi/3 \pm 2\pi k, \quad \eta_2 = 2\pi/3 \pm 2\pi n,$$

$$E_i = \sqrt{\gamma - \frac{\rho\omega_0}{\mu Q} \cos \Phi_c};$$

$$4. \quad \eta_1 = 4\pi/3 \pm 2\pi k, \quad \eta_2 = 4\pi/3 \pm 2\pi n,$$

$$E_i = \sqrt{\gamma - \frac{\rho\omega_0}{\mu Q} \cos \Phi_c},$$

где $k, n \in Z$.

Проведя исследование с помощью полученного характеристического уравнения и критерия Рауса–Гурвица, заключаем, что указанные стационарные режимы, кроме второго, являются асимптотически устойчивыми.

Эти устойчивые стационарные режимы синхронизированных периодических колебаний существуют лишь в следующей области расстроек частот:

$$|\omega_{0j} - \omega_{0j}| \leq \frac{\rho\omega_0}{Q} |3 \cos(\Phi_c) + \sin(\Phi_c)|. \quad (8)$$

Выражение для самой частоты синхронизации примет вид:

$$\omega_c = \omega_0 - \frac{2\rho\omega_0}{3Q} (\cos \eta_1 + \cos(\eta_1 + \eta_2) + \cos \eta_2) \sin \Phi_c. \quad (9)$$

3. Применение треугольной системы координат для отображения динамики фазировки виркаторов

Треугольная система координат является одним из примеров другой, более общей косоугольной системы координат. Одна из работ, посвященных анализу и способу построения таких систем, рассматривалась в [13].

Треугольные системы координат показали свою эффективность при решении задач, связанных с определением состава и свойств трехкомпонентных смесей, например, для определения теплотворной способности тройного газа, а также для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными и уравнений, представляющих собой произведение показательных функций трех переменных [14,15].

В данной работе предлагается впервые применить треугольную систему координат для иллюстрации динамики синхронизации фаз трех виркаторов. Преимущество такого подхода заключается в возможности отображения на одной диаграмме динамики процессов установления всех трех разностей фаз одновременно. Причем данная диаграмма будет двумерной, в отличие от обычного представления фазировки, где необходимо использовать трехмерное представление. Более того, по виду характеристической кривой можно следить за всеми особенностями динамики переходного процесса.

Прежде чем переходить к непосредственному построению фазовых диаграмм, приведем основные свойства треугольной системы координат. Каждая точка, расположенная в треугольной системе координат, имеет три координаты. Величина каждой координаты измеряется длиной отрезка, отсекаемого от начала координат на данной оси прямой, проведенной из заданной точки параллельно предыдущей оси координат, считая по направлению часовой стрелки.

Положение всякой точки определяется любой парой координат, но между всеми тремя координатами каждой точки существует зависимость: алгебраическая сумма трех координат для каждой точки данной системы координат есть величина постоянная. То есть, если из любой точки внутри треугольника провести последовательно три прямые, параллельные предыдущим сторонам треугольника, считая по часовой стрелке, то сумма отрезков, соответственно отсекаемых на сторонах треугольника, равна длине стороны треугольника. Это свойство треугольной системы координат и позволяет нам использовать ее при рассмотрении процессов фазировки в нашей модели. Так как генераторы связаны по принципу „каждый с каждым“, то набег фазы по замкнутому контуру равен 2π . Таким образом, если на сторонах треугольника откладывать разность фаз между соседними

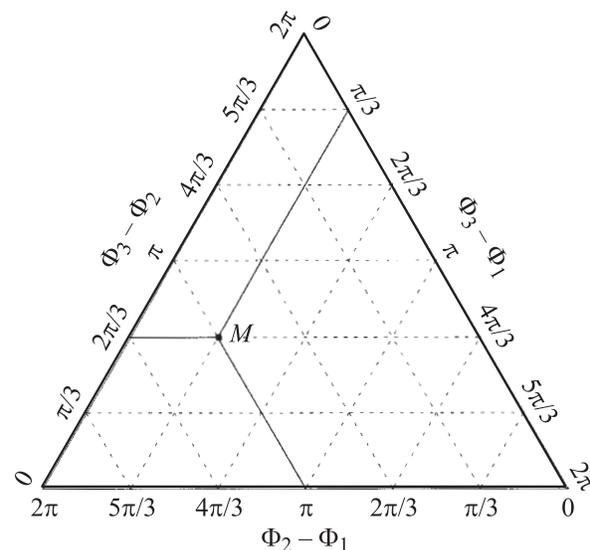


Рис. 2. Правило построения треугольной системы координат.

генераторами, то их сумма будет величиной постоянной и определенной с точностью до 2π . Тем самым удастся полностью удовлетворить всем свойствам треугольной системы координат. На рис. 2 представлен характерный вид треугольной системы. Нетрудно видеть, что сумма всех координат точки M действительно равна 2π .

4. Результаты численного моделирования

Определив алгоритм построения фазовых диаграмм, мы можем переходить к их непосредственному анализу. Для большего соответствия характеристик виркаторов с результатами данной работы будем использовать частоты и другие параметры системы из диапазона реальных виркаторов.

Полученные асимптотически устойчивые стационарные разности фаз в треугольной системе координат означают при синхронизации приход характеристической кривой либо в одну из вершин треугольника, либо в его центр. Результаты численного моделирования полностью это подтверждают. На рис. 3 представлена характеристическая кривая, отвечающая первому режиму (см. разд. 2), полученная путем компьютерного моделирования.

Стартовая точка обозначена полым квадратом, конечная — квадратом с заполнением. Начальный участок траектории до излома характеризует свободное поведение фаз в течение времени задержки, далее фазы ощущают влияние пришедших фаз с других виркаторов. Приход характеристической кривой в вершину треугольника свидетельствует об установлении фазовой синхронизации. Варьирование коэффициента связи оказывает

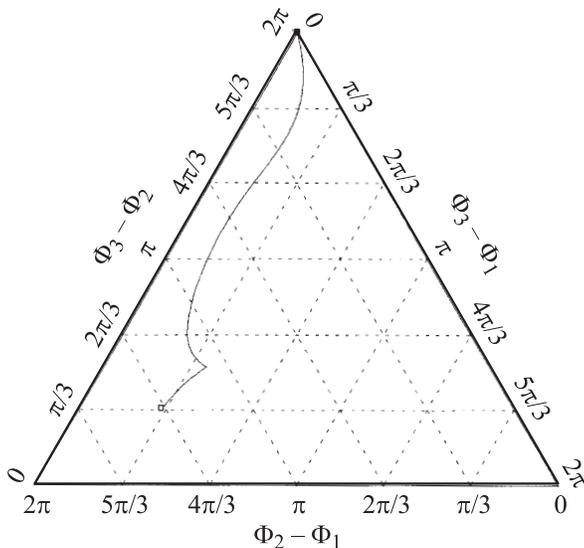


Рис. 3. Поведение характеристической фазовой кривой, отвечающее первому типу стационарного режима ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\omega_{01} = 1.803$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.81$ GHz, $\rho = 0.2$, $\tau_p = 0.9$ ns, $Q = 1$).

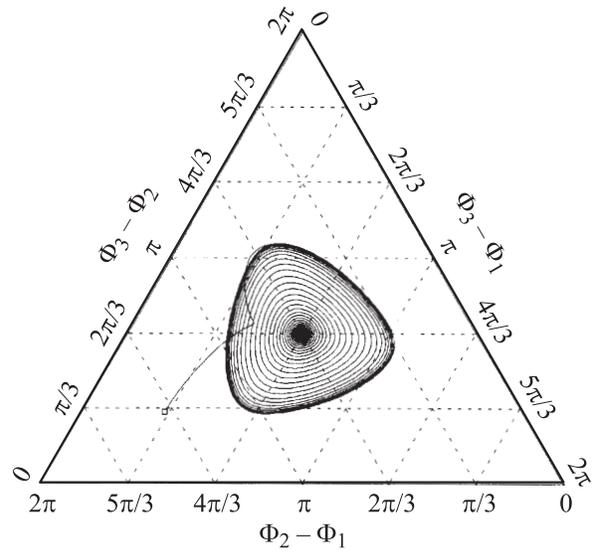


Рис. 4. Вид характеристической фазовой кривой, отвечающий третьему типу стационарного режима ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\tau_p = 1$ ns, $\omega_{01} = 1.803$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.81$ GHz, $\rho = 0.2$, $Q = 1$).

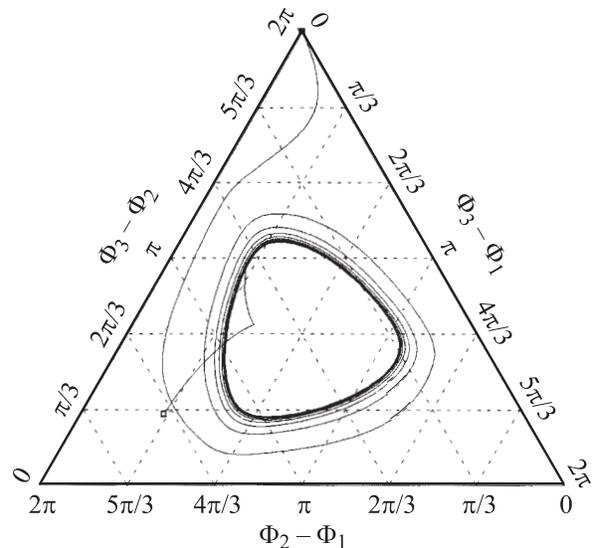


Рис. 5. Поведение характеристической фазовой кривой, отвечающее первому типу стационарного режима ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\tau_p = 1$ ns, $\omega_{01} = 1.803$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.81$ GHz, $Q = 1$, $\rho = 0.31$).

мягкое влияние на систему и переводит траекторию в другие вершины треугольника. Грубое влияние на систему осуществляется изменением времени задержки, что приводит к разрушению первого режима и установлению третьего, характерный вид которого приведен на рис. 4.

Здесь мы видим, что переходный процесс имеет довольно интересную динамику и представляет собой треугольную спираль. В результате такой динамики в системе устанавливается одинаковое соотношение меж-

ду разностями фаз, равное $2\pi/3$. Изменение коэффициента связи приводит к разрушению данного режима и переводу траектории в одну из вершин треугольника (рис. 5). Если задержку сделать такой, что фазы от других генераторов не успеют прийти за время работы виркатора, т.е. фактически это означает отсутствие связи между виркаторами, то динамика фаз таких процессов на треугольных диаграммах представляет некое подобие предельного цикла в фазовом пространстве (рис. 6). Стоит отметить, что для третьего режима существует и качественно другой вид динамики переходного про-

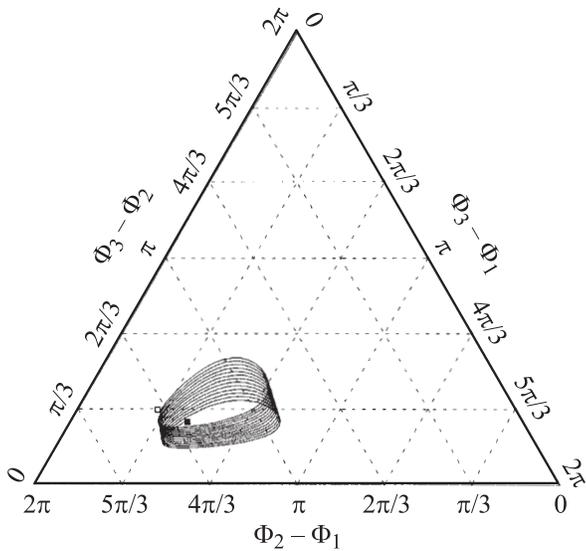


Рис. 6. Поведение разностей фаз при задержках, сравнимых с длительностью самого процесса ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\tau_p = 40$ ns, $\omega_{01} = 1.803$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.81$ GHz, $\rho = 0.2$).

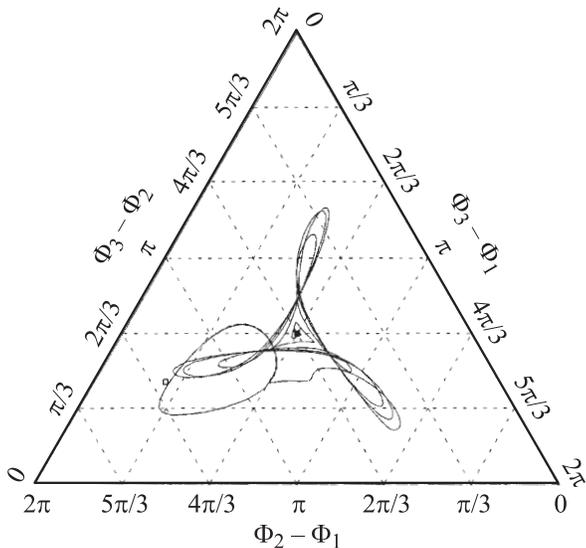


Рис. 7. Динамика процесса установления третьего типа стационарного режима ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\tau_p = 3$ ns, $\omega_{01} = 1.8$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.8$ GHz, $Q = 1$, $\rho = 0.22$).

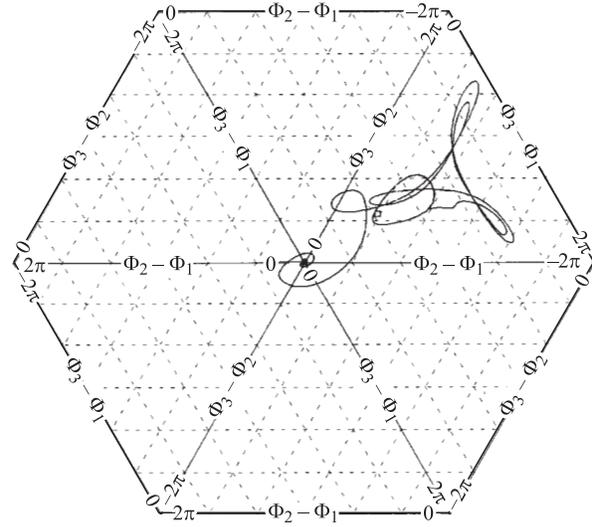


Рис. 8. Пример продолжения треугольной системы координат на бесконечную плоскость ($\Phi_{01} = 3$, $\Phi_{02} = 1$, $\Phi_{03} = 2$, $\tau_p = 3$ ns, $\omega_{01} = 1.8$ GHz, $\omega_{02} = 1.8$ GHz, $\omega_{03} = 1.8$ GHz, $Q = 1$, $\rho = 0.21$).

цесса (рис. 7), характерный только для случая равных собственных частот.

Все полученные режимы удовлетворяют неравенству (8). Невыполнение этого неравенства автоматически приводит к потере устойчивости стационарного режима и уходу характеристической кривой на бесконечность.

Рассмотрим еще один немаловажный вопрос, а именно расширение треугольной системы координат на бесконечную плоскость. Необходимость этого возникает при построении динамики переходного процесса фазировки генераторов, стационарная разность фаз которых превышает 2π . Именно в этом случае характеристическая кривая выходит за пределы треугольника. Возникает вопрос, как строить треугольную систему координат в этом случае? Оказывается, для этого декартову систему координат необходимо целиком компоновать из треугольников, построенных по вышеизложенным правилам. Полученное таким образом пространство будет обладать теми же свойствами, что и один взятый треугольник. Причем в этом случае треугольники необходимо соединять строго определенным образом. Порядок такого соединения и иллюстрация основных режимов представлены на рис. 8.

Заключение

Найдены различные виды переходных процессов в трехэлементной решетке виркаторов. Рассчитаны стационарные типы решений для разностей фаз виркаторов после установления синхронизации. Проведено сравнение полученных результатов с результатами численного моделирования. Полученные результаты подтверждают

эффективность применения треугольной системы координат для отображения динамики фазировки виркаторов. Изложенная методика может быть использована для численного исследования вопроса о фазовой синхронизации любых трех генераторов, связанных по принципу „каждый с каждым“, с любыми типами связи.

На основе проведенного анализа предлагается провести эксперимент с тремя виркаторами установки „ФРЕГАТ“, собранными по схеме рис. 1. Следует ожидать, что в зависимости от длины связей в трехэлементной ФРВ будет устанавливаться один из найденных в данной работе стационарных режимов.

Авторы благодарны проф. В.Д. Шалфееву (ННГУ) за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] Дубинов А.Е., Селемир В.Д. // Зарубежная радиоэлектроника. 1995. № 4. С. 54.
- [2] Дубинов А.Е., Селемир В.Д. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 6. С. 645.
- [3] Sze H., Price D., Harteneck B., Cooksey N. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 7. P. 3073.
- [4] Селемир В.Д., Дубинов А.Е., Степанов Н.В. и др. // Антенны. 2001. № 3(49). С. 6.
- [5] Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филиппенко Н.М., Фоменко Г.П. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. № 7. С. 1242.
- [6] Sze H., Price D., Harteneck B. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67. N 5. P. 2278.
- [7] Adler R. // Proc. IRE. 1946. Vol. 34. N 6. P. 351.
- [8] Дубинов А.Е., Селемир В.Д., Царев А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 33. № 8. С. 709.
- [9] Котетшвили П.В., Рыбак П.В., Тараканов В.П. KARAT — средство вычислительного процесса в электродинамике. Препринт ИОФ АН СССР. № 44. М.: 1991.
- [10] Эльсгольц Л.Э., Моркин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971.
- [11] Рубаник В.П. // Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7. № 10. С. 1711.
- [12] Неймарк Ю.И., Фишман Л.З. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 11. С. 1479.
- [13] Гутенмахер В. // Квант. 1972. № 4. С. 19.
- [14] Блох Л.С. Треугольная система координат. М.: Металлургиздат, 1962.
- [15] Млодзиевский А.Б. Геометрическая термодинамика. М.: МГУ, 1956.