

01;05

Энергетический подход к определению уровня мгновенной поврежденности

© А.В. Каштанов, Ю.В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: kashto@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 сентября 2005 г.)

Построен вывод кинетического уравнения типа Качанова–Работнова из уравнения сохранения массы для случая изотропной повреждаемости. На основе энергетического баланса предложен способ оценки начального уровня поврежденности (мгновенной поврежденности). Это понятие сходно понятию мгновенной деформации, которая возникает сразу при приложении к образцу внешней нагрузки для испытаний на ползучесть или вязкоупругость. Используя мгновенную поврежденность в качестве начального условия для обычного эволюционного уравнения поврежденности типа Качанова–Работнова, удастся более корректно описать диаграмму длительной прочности конструкционных материалов в сравнении с описаниями, применявшимися ранее.

PACS: 05.20.Dd, 62.20.Mk

В 1958 г. Л.М. Качановым [1] было введено понятие параметра сплошности, характеризующего изменение площади поперечного сечения образца при его разрушении в условиях ползучести. Под ползучестью понимают неупругую деформацию, которая увеличивается со временем под действием постоянного напряжения при постоянной температуре. Время, в течение которого необходимо удерживать нагрузку для полного разрушения образца, называется временем до разрушения.

Классическое кинетическое уравнение для случая изотропной поврежденности было предложено Ю.Н. Работновым [2] в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = f(P, \omega), \quad (1)$$

где ω — параметр повреждаемости (разрыхления) материала, t — время, P — величина постоянной приложенной нагрузки. Обычно принимают, что до приложения нагрузки материал бездефектен, т.е. начальное условие для уравнения (1) записывается в виде

$$\omega|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

В качестве критерия разрушения выбирается условие равенства параметра повреждаемости единице: поверхность разрушения занимает все поперечное сечение образца. Это условие позволяет определить время до разрушения образца t_*

$$\omega|_{t=t_*} = 1. \quad (3)$$

Таким образом, основным направлением развития континуальной теории повреждаемости является уточнение определяющих соотношений вида (1) по мере накопления экспериментальных данных. Зачастую это приводит к увеличению количества вводимых структурных параметров и сложности получаемых уравнений повреждаемости. К сожалению, проверить правильность той или иной модели повреждаемости невозможно.

Можно только сказать, насколько хорошо модель приближает некоторый набор экспериментальных данных. Конкретный вид функции f в соотношении (1) выбирается исключительно из соображений наилучшего описания конкретных экспериментальных данных при помощи набора определяющих параметров: нагрузки, температуры, параметра повреждаемости, деформации ползучести и т.п. Но смысл кинетического уравнения повреждаемости гораздо шире, оно тесно связано с одним из фундаментальных законов физики — законом сохранения массы.

Рассмотрим подверженный равномерному растяжению однородный образец и выделим в его средней части некоторый материальный объем. Обозначим массу объема через m , а его величину до деформирования — через V_0 . Предположим, что в результате приложения к образцу нагрузки F в выделенном материальном объеме сформировались микроповреждения (поры, микротрещины и т.п.) суммарным объемом V_* , за счет чего к данному моменту времени произошло деформирование образца. Таким образом, V_* определяет степень „разрыхления“ материала. После приложения нагрузки величина материального объема становится равной $V = V_0 + V_*$. В результате образования микроповреждений происходит изменение локальной плотности. Выпишем закон сохранения массы

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{v}. \quad (4)$$

Здесь \vec{v} — скорость движения частиц материала. Введем текущую локальную плотность

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{dV_0} \frac{dV_0}{dV} = \frac{dm}{dV_0} \left(1 - \frac{dV_*}{dV} \right).$$

Пусть $\rho_0 = \frac{dm}{dV_0}$ — плотность материала до деформирования, $\omega = \frac{dV_*}{dV}$ — безразмерный параметр, который характеризует относительный объем накопившихся в теле

повреждений и является параметром повреждаемости материала. Тогда текущая локальная плотность может быть выражена как

$$\rho = \rho_0(1 - \omega). \quad (5)$$

Подставив (5) в уравнение (4), получим

$$\frac{d\omega}{dt} = (1 - \omega)\operatorname{div} \bar{v}. \quad (6)$$

Таким образом, кинетическое уравнение повреждаемости типа (1) — это не что иное, как закон сохранения массы, записанный в терминах параметра повреждаемости. Естественно, что невозможность экспериментального определения скорости движения частиц материала \bar{v} заставляет выбирать ту или иную аппроксимацию для дивергенции скорости. Различные аппроксимации дают различные уравнения повреждаемости.

Например, раскладывая $\operatorname{div} \bar{v}$ в ряд по степеням ω

$$\operatorname{div} \bar{v} = c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \dots \quad (7)$$

и предполагая в простейшем случае отсутствие скорости объемного расширения материала в отсутствие повреждаемости $\operatorname{div} \bar{v}|_{\omega=0} = 0$, т. е. $c_0 = 0$, имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = c_1\omega(1 - \omega)f(\omega). \quad (8)$$

В частном случае $f(\omega) = \operatorname{const}$, выражение (8) — это известное в синергетике простейшее логистическое уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = C\omega(1 - \omega). \quad (9)$$

В теории накопления повреждений подобные уравнения часто используются для различных диффузионных моделей [3]. На рис. 1 приведен пример решения уравнения (9) при $C = 2$ и начальном условии $\omega(0) = 0.001$. Видно, что параметр ω может рассматриваться как характеристика перехода от неповрежденного (слабо поврежденного) состояния к состоянию полного локального разрушения материала.

Можно ввести зависимость $f = A\sigma^k$, где A и k — некоторые коэффициенты, и пусть $P = F/S_0$, S_0 — начальная площадь поперечного сечения образца, $\sigma = P/(1 - \omega)$ — локальное среднее напряжение в рассматриваемой точке образца. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C\omega P^k}{(1 - \omega)^{k-1}},$$

где $C = Ac_1$ — некоторая постоянная.

Таким образом, уравнение вида (1), вводимое в теории типа Качанова–Работнова на основе обобщения экспериментальных наблюдений, может быть легко получено из общих соображений. Однако, как уже было сказано, конкретный вид этого уравнения зависит от выбора аппроксимации для дивергенции скорости движения частиц материала. Причем эта аппроксимация

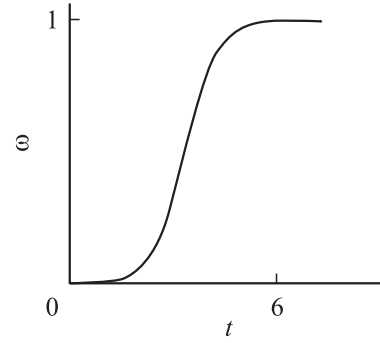


Рис. 1. Решение логистического уравнения при $C = 2$ и $\omega(0) = 0.001$.

должна быть достаточно простой, чтобы обеспечить интегрируемость уравнения (6). Значит, при соответствующем выборе аппроксимации можно построить вполне удовлетворительную модель, но для того чтобы эта модель корректно описывала экспериментальные данные по длительной прочности необходимо учитывать еще один момент. Очевидно, что материал, используемый в экспериментах, имеет некоторую начальную или мгновенную поврежденность, т. е. поврежденность, возникающую сразу при приложении к образцу внешней нагрузки во время испытаний на длительную прочность. Обычно этим пренебрегают, выбирая в качестве начального условия для кинетического уравнения повреждаемости условие (2). Но, оказывается, что правильный учет уровня мгновенной поврежденности материала позволяет более корректно описать экспериментальные данные по длительной прочности.

Как же можно учесть мгновенную поврежденность? Для этого необходимо решить задачу о накоплении повреждений. Несмотря на то что аналитическое решение этой задачи не может быть получено при помощи доступного нам математического аппарата, в простых случаях ее можно решить приближенно при помощи уравнения энергетического баланса Гриффитса.

Пусть упругая плоскость растягивается на бесконечности равномерной нагрузкой величины p вдоль оси y . Под действием этой нагрузки по всей оси x образуется поверхность разрушения, представляющая собой набор микротрещин. Ее можно смоделировать периодической системой трещин (рис. 2). В силу симметрии задачи

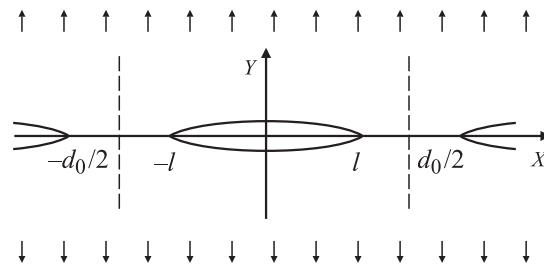


Рис. 2. Периодическая система трещин.

можно рассматривать разрушение внутри произвольной, достаточно широкой полосы — $d_*/2 \leq x \leq d_*/2$.

Пусть длина одной трещины равна $2l$, период системы — d_0 и в рассматриваемую полосу попало N трещин суммарной длиной $2lN$. Тогда нетрудно видеть, что

$$Nd_0 = d_* \quad (10)$$

и среднее напряжение, действующее внутри полосы при данной нагрузке p ,

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{pd_*}{d_* - 2lN}. \quad (11)$$

Введя обозначение

$$\omega = \frac{2l}{d_0}, \quad (12)$$

получим $\sigma_{\text{ср}} = p/(1 - \omega)$. Очевидно, что полное разрушение произойдет, когда „макротрещина“ (совокупность трещин периодической системы) займет всю ширину этой полосы, а $\sigma_{\text{ср}}$ обратится в бесконечность. Другими словами при $\omega = 0$ материал бездефектный, при развитии разрушения ω растет за счет увеличения числа периодов N внутри полосы и одновременного увеличения относительных длин трещин $2l/d_0$ внутри этих периодов. Затем, когда ω близко к единице, маленькие трещины начинают объединяться, т.е. количество периодов при больших ω убывает, а при $\omega = 1$ происходит разрыв полосы — это и есть критерий разрушения. Таким образом, величина ω , определяемая формулой (12), может быть интерпретирована как параметр повреждаемости [1,2,4].

Решение задачи с одной трещиной в полосе периода может быть получено из решения задачи Вестергарда [5] с помощью замены комплексной переменной $z \mapsto \tan(\pi z/d_0)$. Раскрытие берегов каждой трещины выражается формулой

$$u_y = \frac{pd_0(1 - \nu)}{2\pi\mu\sqrt{1 + \tan^2(\pi l/d_0)}} \ln\left(\frac{1 + U(l, x)}{1 - U(l, x)}\right),$$

где

$$U(l, x) = \sqrt{\frac{\tan^2(\pi l/d_0) - \tan^2(\pi x/d_0)}{1 + \tan^2(\pi l/d_0)}}.$$

Здесь $\mu = E/2(1 + \nu)$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Следовательно, работа напряжений $\sigma_{\text{ср}}$ на перемещенных u_y , т.е. работа по раскрытию одной трещины

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= - \int_{-l}^l \sigma_{\text{ср}} u_y|_{y=0} dx \\ &= - \frac{p^2 d_0 (1 - \nu)}{\pi \mu (1 - \omega) \sqrt{1 + \tan^2(\pi \omega/2)}} J(l, \omega), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$J(l, \omega) = \int_0^l \ln\left(\frac{1 + U(l, x)}{1 - U(l, x)}\right) dx. \quad (14)$$

Введя обозначение $b = \tan^{-1}(\pi l/d_0) = \tan^{-1}(\pi \omega/2)$ и новую переменную $t = b \tan(\pi x/d_0)$, интеграл (14) можно переписать в виде

$$J(l, \omega) = \frac{bd_0}{\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1-t^2}}\right) \frac{dt}{b^2 + t^2}. \quad (15)$$

Таким образом, с учетом (13) и (15), работа по раскрытию одной трещины может быть определена по формуле

$$\Delta W_1 = - \frac{p^2 d_0^2 (1 - \nu)}{\pi^2 \mu} F(\omega), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{b^2}{(1 - \omega) \sqrt{1 + b^2}} \\ &\times \int_0^1 \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1-t^2}}\right) \frac{dt}{b^2 + t^2}; \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (10),

$$\Delta W_1 = - \frac{p^2 d_*^2 (1 - \nu)}{\pi^2 \mu} \frac{F(\omega)}{N^2(\omega)}. \quad (17)$$

Значит, работа по раскрытию всех трещин, расположенных внутри полосы шириной d_* , равна

$$\Delta W = \Delta W_1 N(\omega) = - \frac{p^2 d_*^2 (1 - \nu)}{\pi^2 \mu} \frac{F(\omega)}{N(\omega)}. \quad (18)$$

Формула (18) позволяет определить работу по раскрытию трещин, появившихся в полосе шириной d_* под действием нагрузки величины p . Логично предположить, что эта работа зависит только от структуры материала и приложенной внешней нагрузки, и не зависит от конкретной реализации периодической системы трещин, т.е.

$$\frac{F(\omega)}{N(\omega)} = c, \quad (19)$$

где c — некоторая положительная величина, не зависящая от ω . Из рис. 3 видно, что в этом случае сформулированное выше предположение о связи между числом периодов системы N и параметром поврежденности ω действительно удовлетворяется.

Итак, работа по раскрытию трещин, появляющихся в полосе шириной d_* в результате действия постоянной нагрузки величины p , определяется формулой

$$\Delta W = - \frac{p^2 d_*^2 (1 - \nu) c}{\pi^2 \mu}. \quad (20)$$

При этом в соответствии с (10) и (12) поверхностная энергия системы изменяется на величину

$$\Delta \Pi = -4\gamma l N = -2\gamma d_* \omega, \quad (21)$$

где γ — плотность поверхностной энергии.

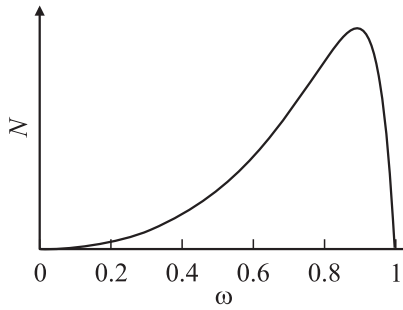


Рис. 3. Связь между числом периодов системы трещин и параметром поврежденности.

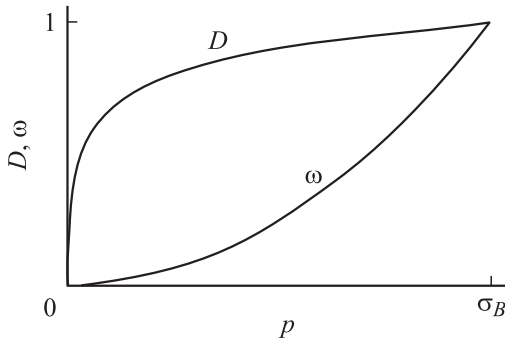


Рис. 4. Зависимость фрактальной размерности поверхности разрушения и параметра поврежденности от величины приложенной нагрузки.

Тогда в соответствии с уравнением баланса энергии Гриффитса

$$\Delta W = \Delta \Pi \quad (22)$$

будем иметь

$$p^2 = \frac{2\pi^2 \gamma \mu \omega}{d_* (1 - \nu) c}. \quad (23)$$

Формула (23) позволяет однозначно связать параметр повреждаемости ω , соответствующий некоторому разрушению, с величиной нагрузки p , которую необходимо приложить, чтобы реализовать это разрушение. При этом в соответствии с критерием разрушения в момент разрыва полосы ($\omega = 1$) ставится естественное условие $p|_{\omega=1} = \sigma_B$, где σ_B — временная прочность материала. Из этого условия определяется постоянная c :

$$c = \frac{2\pi^2 \gamma \mu}{\sigma_B^2 d_* (1 - \nu)}. \quad (24)$$

Таким образом, получается простое соотношение, связывающее приложенную нагрузку с уровнем поврежденности материала, соответствующим этой нагрузке,

$$\omega = \frac{p^2}{\sigma_B^2}. \quad (25)$$

Итак, в простейшей задаче континуальной механики разрушения, смоделировав развитие повреждений периодической системой трещин, с помощью уравнения

баланса энергии Гриффитса удалось построить зависимость между приложенной нагрузкой и уровнем мгновенной поврежденности.

Заметим, что для рассматриваемой задачи о периодической системе трещин можно легко построить фрактальную интерпретацию, моделируя совокупность трещин, образующихся на оси x , разреженным (lacunar) фракталом размерности $0 \leq D \leq 1$.

В соответствии с [6] длина фрактальной трещины внутри полосы $d_*/2 \leq x \leq d_*/2$ равна

$$L = (d_*/d)^D d. \quad (26)$$

где d — масштаб измерения длины. Для каждого уровня нагрузки она должна совпадать с суммарной длиной трещин периодической системы внутри рассматриваемой полосы, т.е. $2lN = L$, тогда из (10), (12) и (26) следует, что

$$\omega = \frac{2l}{d_0} = \left(\frac{d_*}{d}\right)^{D-1}. \quad (27)$$

В соответствии со сформулированным выше критерием разрушения, полное разрушение произойдет, когда ω станет равным 1. Как и следовало ожидать, в соответствии с формулой (27), в момент разрушения размерность трещины D тоже будет равна 1, т.е. система трещин будет представлять собой прямолинейный разрез во всю ширину полосы.

Теперь, сравнив формулы (25) и (27), получим

$$D = 2 \frac{\lg(p/\sigma_B)}{\lg(d_*/d)} + 1. \quad (28)$$

Выражение (28) дает возможность рассчитать фрактальную размерность D поверхности разрушения, образующейся в материале под действием растягивающей силы, которая определяется исключительно величиной p приложенной нагрузки (рис. 4).

Таким образом, как и задачи о распространении трещин, задачи о накоплении повреждений допускают естественную фрактальную интерпретацию.

Вернемся к модели повреждаемости типа Качанова–Работнова. Рассмотрим кинетическое уравнение повреждаемости (1) в простейшем виде [1–4]

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Ap^k}{(1-\omega)^{k+1}}, \quad (29)$$

где A и k — некоторые коэффициенты. Время до разрушения образца t_* будем по-прежнему определять исходя из соотношения (3), но в качестве начального условия для уравнения (29) при $t = 0$, в соответствии с уравнением баланса энергии, будем рассматривать соотношение (25), т.е. считаем, что при приложении нагрузки величины p уровень поврежденности материала мгновенно, в рамках статической теории, возрастает до

$$\omega|_{t=0} = \frac{p^2}{\sigma_B^2}. \quad (30)$$

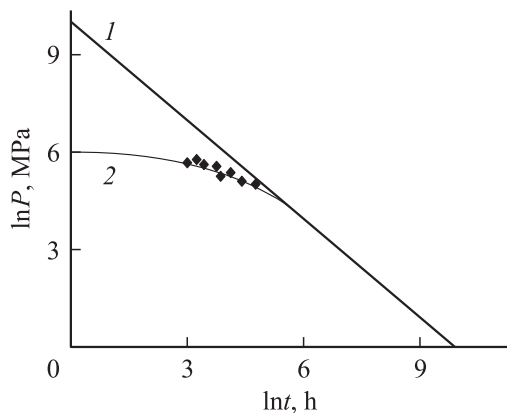


Рис. 5. Диаграмма длительной прочности стали 20X12ВНМФ при температуре 565°C.

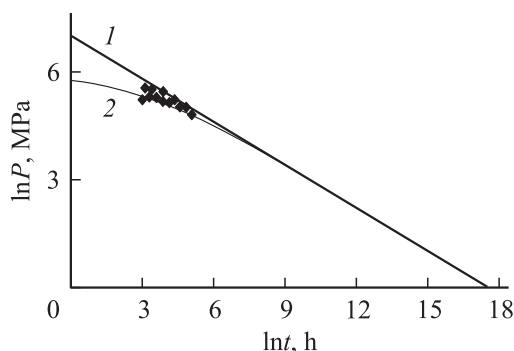


Рис. 6. Диаграмма длительной прочности стали 20X12ВНМФ при температуре 580°C.

Решив уравнение (29) с начальным условием (30), получим

$$\omega = 1 - \left(\left(1 - \frac{p^2}{\sigma_B^2} \right)^{k+2} - (k+2)Ap^k t \right)^{\frac{1}{k+2}}. \quad (31)$$

Тогда время до разрушения образца

$$t_* = \frac{\left(1 - \frac{p^2}{\sigma_B^2} \right)^{k+2}}{A(k+2)p^k}. \quad (32)$$

Теперь решим уравнение (29), считая, в соответствии с классической теорией накопления повреждений, что в начальный момент времени материал бездефектный

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad (33)$$

тогда будем иметь

$$\omega = 1 - \left(1 - (k+2)Ap^k t \right)^{\frac{1}{k+2}}, \quad t_* = \frac{1}{A(k+2)p^k}. \quad (34)$$

На рис. 5 и 6 прямые 1 получены при помощи уравнения (34) классической теории прочности, кривые 2 соответствуют уравнению (32). Экспериментальные данные взяты из [3].

Видно, что при малых нагрузках, а значит, больших временах до разрушения, когда начальные условия (30) и (33) практически совпадают, формулы (31) и (32) принимают вид (34). Это обуславливает то, что „классическая“ прямая является касательной к графику, полученному с учетом уровня мгновенной поврежденности. При больших нагрузках кривая 2 изгибается. Этот наблюдаемый в экспериментальных работах изгиб до сих пор объясняли исключительно изменением механизма разрушения, а именно переходом от хрупкого (с образованием клиновидных трещин на границах зерен) к вязкому (внутризеренному) разрушению. Однако очевидно, что учет мгновенной поврежденности материала также вносит существенный вклад в описание этого эффекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 03-01-39010, 05-01-01068) и Президента Российской Федерации (грант МК-3151.2005.1).

Список литературы

- [1] Качанов Л.М. // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. 1958. Т. 8. С. 26–31.
- [2] Работнов Ю.Н. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Наука, 1959. С. 5–7.
- [3] Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 104 с.
- [4] Нарбут М.А. // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб: Изд-во СПбГУ. 2002. С. 241–247.
- [5] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
- [6] Каитанов А.В., Петров Ю.В. Фрактальное обобщение энергетического баланса в линейной механике разрушения. Уч. пос. СПб, 2001. 53 с.