

01;09;10

Переходное излучение негармонических импульсов

© Ю.О. Аверков, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
61085 Харьков, Украина
e-mail: yuaver@online.kharkiv.com

(Поступило в Редакцию 5 июля 2005 г.)

Показана возможность возбуждения негармонических нестационарных импульсов в вакууме и среде с дисперсией с помощью эффекта переходного излучения сгустка электронов. Установлено, что переходное излучение сгустка приводит к генерации бесконечного набора нестационарных и негармонических импульсов, являющихся решениями уравнения Клейна–Гордона. Поляризация результирующего поля импульсов на границе раздела двух сред и на переднем фронте оказывается различной. С ростом времени передний фронт результирующего поля импульсов становится более крутым. Показана возможность определения продольного профиля плотности сгустка и параметров диспергирующей среды по значениям полей излучения их производных вблизи переднего фронта результирующего сигнала.

PACS: 36.40.Wa, 41.85.Ja

Введение

С момента теоретического предсказания В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком в 1946 г. возможности излучения равномерно движущегося электрона при переходе из одной среды в другую опубликовано большое число теоретических и экспериментальных работ [1–3]. В последние годы эффект переходного излучения заряженных частиц вновь привлекает большое внимание. Прежде всего это связано с возможностью генерации мощных коротких электромагнитных импульсов, возникающих как при бомбардировке электронными сгустками твердотельных мишеней [4–6], так и при прохождении сгустков через диафрагмы [7]. Такие импульсы находят широкое применение в радиолокационной технике. В указанных выше работах речь шла об объемных электромагнитных волнах. Переходное излучение поверхностных электромагнитных волн модулированным по плотности электронным пучком, а также электронным сгустком, пересекающими границу раздела плазма–вакуум, исследовалось в [8–10]. Общим для всех перечисленных работ является использование традиционных решений уравнений Максвелла, связанных с представлением решений в виде произведения функций, зависящих либо от координат, либо от времени. Зависимость от времени при этом исследуется с помощью преобразования Фурье. В то же время для описания коротких электромагнитных импульсов, содержащих всего одно или несколько колебаний поля, метод преобразования Фурье является малоэффективным. Впервые на это было указано А.Б. Шварцбурггом [11]. В работе [11] развиты точно решаемые модели импульсной оптики диспергирующих сред во временном представлении. Для описания полей, возбуждаемых в этих средах короткими импульсами, предложены новые точные неперiodические и нестационарные решения уравнений Максвелла. В условиях эксперимента ток сгустка также может быть представлен в

виде короткого импульса с несимметричными передним и задним фронтами. Взаимодействие такого импульса с материальной средой, как следует из [11], должно приводить к генерации негармонических и нестационарных волн.

Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа, в которой рассмотрено переходное излучение электронного сгустка с несимметричным распределением плотности заряда, пересекающего границу раздела двух сред. Рассмотрены такие границы раздела двух сред, как вакуум–идеальный проводник и плазма–идеальный проводник. Практическое значение результатов данной работы заключается в возможности восстановления распределения плотности электронов сгустка в направлении его движения по известным величинам полей и их производных в окрестности переднего фронта результирующего сигнала. Кроме того, по переднему фронту сигнала можно определить такие параметры твердотельной плазмы, как диэлектрическая постоянная решетки и плазменная частота носителей заряда.

Граница вакуум–идеальный проводник

Рассмотрим границу раздела сред вакуум–идеальный проводник, расположенную в плоскости $z = 0$. Идеальный проводник занимает область $z > 0$. Аксиально-симметричный электронный сгусток движется вдоль оси z со скоростью v и пересекает границу раздела сред со стороны вакуума. Плотность заряда сгустка зададим следующим образом:

$$q = q_0 \varphi_0 \left(\frac{\rho}{a} \right) \sum_{n=0}^{n^*} \mu_n \varphi_n \left(\frac{z - vt}{b} \right), \quad (1)$$

где $\varphi_n(x)$ — функция Эрмита с индексом n :

$$\varphi_n(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad (2)$$

$H_n(x)$ — полином Эрмита степени n :

$$H_n(x) = (-1)^n \exp x^2 \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-x^2)], \quad (3)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — величина радиус-вектора в плоскости границы раздела двух сред, $\sqrt{2a}$ — поперечный радиус сгустка, $2\sqrt{2}b$ — эффективная длина сгустка, μ_n — заданные коэффициенты, q_0 — эффективная плотность заряда сгустка, определяемая из условия сохранения количества заряда

$$q_0 = \frac{eN_b}{2\sqrt{2}\pi a^2 b \sum_{n=0}^{n^*} \frac{\mu_{2n} \sqrt{(2n)!}}{2^n n!}}, \quad (4)$$

где e — заряд электрона, N_b — число электронов в сгустке. Так как мы рассматриваем аксиально-симметричную задачу, то представим функцию $\varphi_0(\rho/a)$ в виде интеграла Фурье–Бесселя:

$$\varphi_0\left(\frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{\pi^{1/4}} \int_0^\infty d\kappa \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) \kappa J_0(\kappa \rho), \quad (5)$$

где κ имеет смысл поперечного волнового вектора поля сгустка, $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n . Для нахождения векторов поля сгустка воспользуемся векторным потенциалом, имеющим только одну компоненту A_z и скалярным потенциалом ψ . Выразив ψ через A_z с помощью калибровки Лоренца, из уравнений Максвелла получим следующее волновое уравнение для векторного потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{ind}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}), \quad (6)$$

где Δ — оператор Лапласа, c — скорость света в вакууме, \mathbf{j}_{ind} — плотность тока, индуцированного в среде полем сгустка, $\mathbf{j}_{\text{ext}} = (0, 0, qv)$ — плотность тока сгустка. Так как мы рассматриваем поля в вакууме, то $\mathbf{j}_{\text{ind}} = 0$. Будем искать решение для компоненты A_z^b в виде

$$A_z^b(\rho, z, t) = \sum_{n=0}^{n^*} \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa \rho) y_n(\xi, \kappa), \quad (7)$$

где $y_n(\xi, \kappa)$ — некоторые неизвестные функции „бегущей“ координаты $\xi = (z - vt)/b$. В силу аксиальной симметрии задачи для оператора Лапласа в (6) используем соответствующее представление в цилиндрических координатах. Подставив (1), (7) в (6), получим следующее уравнение для $y_n(\xi, \kappa)$:

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial \xi^2} - k^2 y_n = -g \varphi_n(\xi), \quad (8)$$

где $g = 4\pi^{3/4} \beta q_0 a^2 b^2 \mu_n \kappa \exp(-\kappa^2 a^2 / 2) \gamma^2$, $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $k = \kappa b \gamma$. Решение для $y_n(\xi)$ записывается в виде

$$y_n(\xi, \kappa) = -\frac{g}{2k} [\exp(k\xi) \Upsilon_{1,n}(\kappa, \xi) - \exp(-k\xi) \Upsilon_{2,n}(\kappa, \xi)], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1,n}(\kappa, \xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \exp(-kx) \varphi_n(x) dx, \\ \Upsilon_{2,n}(\kappa, \xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \exp(kx) \varphi_n(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

В результате получим следующие выражения для полей сгустка:

$$E_\rho^b(\rho, z, t) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{n^*} \int_0^\infty \kappa J_1(\kappa \rho) y_n(\xi, \kappa) d\kappa, \quad (11)$$

$$E_z^b(\rho, z, t) = -\frac{1}{\beta \gamma^2 b} \sum_{n=0}^{n^*} \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) \frac{\partial y_n(\xi, \kappa)}{\partial \xi} d\kappa, \quad (12)$$

$$H_\phi^b(\rho, z, t) = \sum_{n=0}^{n^*} \int_0^\infty \kappa J_1(\kappa \rho) y_n(\xi, \kappa) d\kappa. \quad (13)$$

Найдем поля излучения. Будем искать решение для компоненты A_z^r векторного потенциала поля излучения в виде

$$A_z^r(\rho, z, t) = \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa \rho) \alpha_m(\kappa) \Phi_m(\bar{z}, \tau), \quad (14)$$

где коэффициенты $\alpha_m(\kappa)$ определяются из граничных условий на поверхности идеального проводника ($z = 0$), а $\bar{z} = \kappa z$ и $\tau = \kappa t$ — безразмерные переменные. Подставив (14) в однородное волновое уравнение (6), получим следующее уравнение для функции $\Phi_m(\bar{z}, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2 \Phi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \tau^2} = \Phi_m(\bar{z}, \tau). \quad (15)$$

Выражение (15) представляет собой уравнение Клейна–Гордона. Точные неперIODические решения уравнения (15), описывающие нестационарные поля, распространяющиеся от границы раздела сред вакуум–идеальный проводник в глубь вакуума ($\bar{z} \leq 0$) в области ($\tau \geq -\bar{z}$) имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \Phi_m(\bar{z}, \tau) &= \frac{\partial \Psi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \tau}, \\ \Psi_m(\bar{z}, \tau) &= \left(\frac{\tau + \bar{z}}{\tau - \bar{z}}\right)^{\frac{m}{2}} J_m(\sqrt{\tau^2 - \bar{z}^2}). \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, выражения для полей излучения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_\rho^r(\rho, z, t) &= -\frac{1}{2} \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_1(\kappa \rho) \kappa \alpha_m(\kappa) \\ &\times [\Psi_{m-1}(\bar{z}, \tau) + \Psi_{m+1}(\bar{z}, \tau)], \end{aligned} \quad (17)$$

$$E_z^r(\rho, z, t) = \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa\rho) \kappa \alpha_m(\kappa) \Psi_m(\bar{z}, \tau), \quad (18)$$

$$H_\varphi^r(\rho, z, t) = \frac{1}{2} \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_1(\kappa\rho) \kappa \alpha_m(\kappa) \times [\Psi_{m-1}(\bar{z}, \tau) - \Psi_{m+1}(\bar{z}, \tau)]. \quad (19)$$

Заметим, что в выражениях (17)–(19) суммирование по m начинается со значения $m = 1$. Коэффициенты $\alpha_m(\kappa)$ находим из условия обращения в нуль на поверхности идеального проводника ($\bar{z} = 0$) суммы тангенциальных компонент электрических полей сгустка и излучения

$$\sum_{m=1}^\infty \alpha_m(\kappa) [J_{m-1}(\tau) + J_{m+1}(\tau)] = -4q_0\gamma\pi^{3/4}a^2b \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{n^*} \mu_n F_n(\tau), \quad (20)$$

где

$$F_n(\tau) = \exp(-\beta\gamma\tau) \Upsilon_{1,n}\left(\kappa, -\frac{\beta}{b\kappa}\tau\right) - \exp(\beta\gamma\tau) \Upsilon_{2,n}\left(\kappa, -\frac{\beta}{b\kappa}\tau\right). \quad (21)$$

Подставив в левую часть равенства (20) выражения для функций Бесселя в виде степенных рядов по τ , разложив правую часть равенства (20) в ряд Маклорена по τ и сравнив выражения при одинаковых степенях, получим следующие рекуррентные формулы для определения коэффициентов $\alpha_m(\kappa)$:

$$\alpha_{2n+1} = 2^{2n} \Gamma(2n+1) \times \left[D_{2n} - \sum_{k=1}^{n \geq 1} \frac{(2k-1)\alpha_{2k-1}(-1)^{n-k+1}}{2^{2n}(n-k+1)!\Gamma(n+k+1)} \right], \quad (22)$$

$$\alpha_{2n+2} = 2^{2n+1} \Gamma(2n+2) \times \left[D_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n \geq 1} \frac{2k\alpha_{2k}(-1)^{n-k+1}}{2^{2n+1}(n-k+1)!\Gamma(n+k+2)} \right], \quad (23)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$D_p = -\frac{4q_0\pi^{3/4}a^2b\gamma}{p!} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{n^*} \mu_n \frac{d^{(p)}F_n(\tau)}{d\tau^p} \Big|_{\tau=0}. \quad (24)$$

Рассматриваемые электромагнитные импульсы так же, как и гармонические объемные волны, возникающие при переходном излучении, удаляются от границы раздела двух сред и убывают при этом немонотонным образом. Из выражений (16)–(19) следует, что при $\rho > 0$ результирующее поле излучения, имевшее на границе раздела сред вакуум–идеальный проводник ($z = 0$)

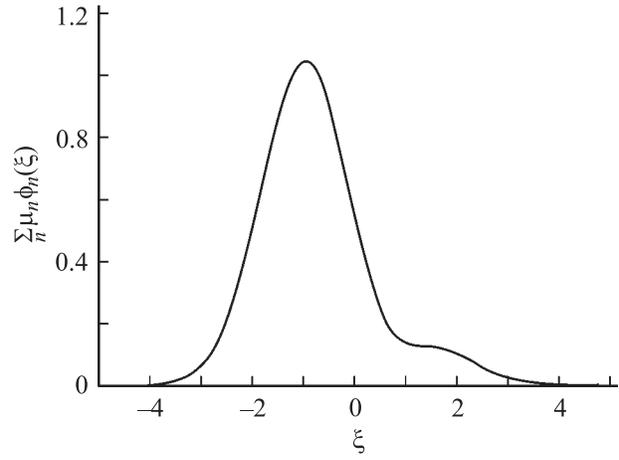


Рис. 1. Распределение продольной плотности сгустка электронов от бегущей координаты $\xi = (z - vt)/b$. Сгусток имеет вид цилиндра с гауссовым распределением плотности по радиусу. Радиус сгустка равен $\sqrt{2}a$, длина сгустка — $2\sqrt{2}b$.

ТМ-поляризацию на переднем фронте волны ($z = -ct$) становится ТЕМ-поляризованным. Рассмотрим конкретный пример. Пусть плотность сгустка в направлении его движения представима в виде суммы первых трех функций Эрмита с коэффициентами: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.4$. Зависимость продольной плотности сгустка от бегущей координаты ξ для заданных значений μ_n показана на рис. 1. Эта зависимость фактически является продольным пространственным распределением плотности сгустка в произвольный момент времени и качественно соответствует реальному распределению электронной плотности, наблюдаемому в эксперименте [12]. На рис. 2 показаны зависимости компоненты поля E_ρ^r импульса с $m = 1$ от координаты z для моментов времени $t = 2$ и $3t_{\text{int}}$. Здесь $t_{\text{int}} = 2\sqrt{2}b/v$ — время пересечения сгустком границы раздела двух сред. Для выбранных параметров сгустка $t_{\text{int}} \approx 9.4 \cdot 10^{-11}$ с. Из рис. 2 видно, что с ростом времени поле удаляется от границы раздела сред в сторону вакуума, а передний фронт становится более крутым. На самой границе раздела сред ($z = 0$) поле убывает со временем и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Значение поля на переднем фронте волны ($z = -ct$) одинаково для всех моментов времени отмечено на рис. 2 пунктирной линией. На рис. 3 показана зависимость компоненты E_z^r с $m = 1$ от координаты z для моментов времени $t = 2$ и $3t_{\text{int}}$ при тех же параметрах сгустка и ρ , что и для зависимости E_ρ^r от z . Из рис. 3 видно, что передний фронт компоненты поля E_z^r , так же как и E_ρ^r , с течением времени становится более крутым, а на границе раздела ($z = 0$) величина компоненты поля E_z^r со временем убывает. Зависимости магнитного поля H_φ^r от z и t и качественно совпадают с соответствующими зависимостями компоненты поля E_ρ^r .

Расчет производных по координате z решений (17)–(19) показывает, что крутизна переднего фронта ($z \rightarrow -ct$) для компонент $E_{\rho,1}^r$ и $H_{\varphi,1}^r$ линейно растет

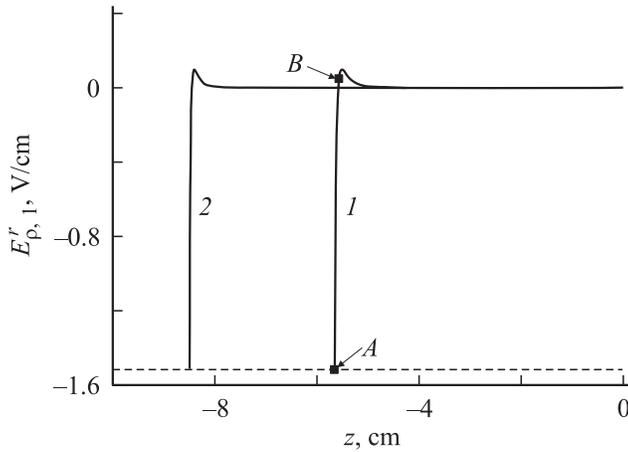


Рис. 2. Зависимости компоненты поля E_{ρ}^r импульса с $m = 1$ от координаты z для моментов времени $t = 2t_{\text{int}}$ (кривая 1) и $t = 3t_{\text{int}}$ (кривая 2). Зависимости рассчитаны по формуле (17). Продольная плотность сгустка задается выражением (1) при $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.4$. Приведенные зависимости рассчитаны при $\rho = 0.1$, $a = 0.5$ и $b = 0.1$ см, $v = 0.1c$ (где c — скорость света в вакууме), $n_b \sim 10^{12}$ см $^{-3}$. На участке зависимости между точками A и B поле E_{ρ}^r может быть представлено в виде суммы первых трех членов в сумме (17).

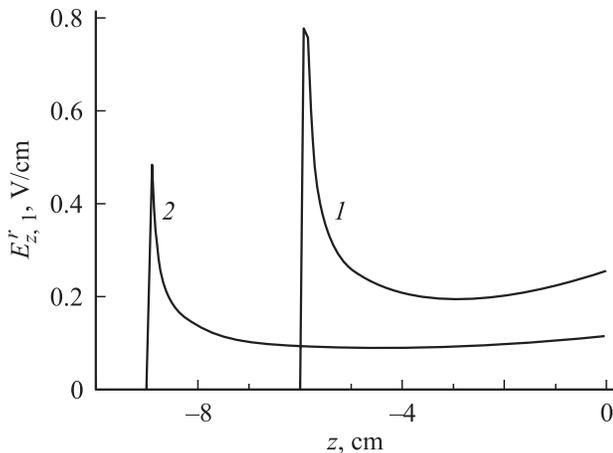


Рис. 3. Зависимости компоненты поля E_z^r импульса с $m = 1$ от координаты z для моментов времени $t = 2t_{\text{int}}$ (кривая 1) и $t = 3t_{\text{int}}$ (кривая 2). Здесь $t_{\text{int}} \approx 9.4 \cdot 10^{-11}$ с — время пересечения сгустком границы раздела двух сред. Зависимости рассчитаны по формуле (18).

со временем, а для $E_{z,1}^r$ — стремится к некоторому постоянному значению. Соответствующие производные для $E_{\rho,2}^r$ и $H_{\phi,2}^r$ — стремятся к некоторому постоянному значению, а для $E_{z,2}^r$ — к нулю. При $m \geq 3$ производные по z для всех компонент электрического и магнитного полей импульса стремятся к нулю. Следовательно, форма переднего фронта результирующего импульса будет иметь вид переднего фронта импульса с $m = 1$.

Заметим, что, если продольное распределение плотности сгустка является гауссовым (т.е. $\mu_n = 0$ для всех

$n > 0$), то, как следует из (22) и (23), все коэффициенты α_m с четными индексами m будут равны нулю. Тем не менее нестационарный негармонический характер импульсов переходного излучения сохраняется.

Определение продольного профиля плотности сгустка по переднему фронту сигнала

Полученные выше результаты могут быть использованы для экспериментального определения продольного профиля плотности сгустка. Преимущество такого способа перед используемым в настоящее время спектральным анализом гармонических волн, возбуждаемых сгустком, заключается в возможности анализировать лишь несколько первых членов суммы по m в (17)–(19) вблизи переднего фронта результирующего сигнала. Рассмотрим характер зависимостей величин α_m от коэффициентов μ_n , модулирующих распределение продольной плотности сгустка. Выпишем явный вид выражений для коэффициентов α_1 и α_2 :

$$\alpha_1(\kappa, \mu_0, \mu_2) = -\frac{8en_b\pi a^2 b\gamma}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) S_1(\kappa, \mu_0, \mu_2), \quad (25)$$

$$\alpha_2(\kappa, \mu_1) = \frac{8en_b\pi a^2 b\beta\gamma^2}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) S_2(\kappa, \mu_1), \quad (26)$$

где

$$S_1(\kappa, \mu_0, \mu_2) = -\frac{\pi^{1/4}}{2} \left[\exp\left(\frac{\kappa^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}\right) \mu_0 + \left(\exp\left(\frac{\kappa^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}\right) (1 + 2\kappa^2) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \kappa \right) \mu_2 \right], \quad (27)$$

$$S_2(\kappa, \mu_1) = \mu_1 \pi^{1/4} \left[\kappa \exp\left(\frac{\kappa^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right], \quad (28)$$

$\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt.$$

Из (25), (26) и из рекуррентных соотношений (22), (23) следует, что все коэффициенты α_m с нечетными индексами m зависят лишь от коэффициентов μ_n с четными индексами n , а все коэффициенты α_m с четными индексами m зависят лишь от коэффициентов μ_n с нечетными индексами n . В нашем случае все коэффициенты α_m с четными индексами m прямопропорциональны коэффициенту μ_1 . Определив коэффициенты μ_n при известных значениях a , b , v и n_b , мы сможем восстановить продольный профиль плотности сгустка. Коэффициенты μ_0 и μ_2 и соответственно коэффициент α_1 удобно найти по значению компоненты поля E_{ρ}^r и ее производной

$\partial E_\rho^r / \partial z$ в точке переднего фронта волны $z = -ct$ при $t \rightarrow \infty$ (точка А на рис. 2):

$$E_\rho^r(\rho, z, t) \Big|_{z=-ct} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dk J_1(k\rho) \kappa \alpha_1(\kappa, \mu_0, \mu_2), \quad (29)$$

$$\frac{\partial E_\rho^r(\rho, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=-ct} = \frac{1}{4} ct \int_0^\infty dk J_1(k\rho) \kappa^3 \alpha_1(\kappa, \mu_0, \mu_2). \quad (30)$$

Подставив в (29), (30) выражение (25), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными μ_0 и μ_2 . Определив из этой системы μ_0 и μ_2 , подставим их в аналитические выражения для первых двух членов суммы в (17). Далее найдем такую δ -окрестность точки $z = -ct$ вблизи переднего фронта результирующего поля E_ρ^r , в которой это поле с достаточной степенью точности может быть описано, например, первыми тремя членами в сумме в (17). Зададим δ -окрестность точки $z = -ct$ следующим образом:

$$z \leq z^*, \quad z^* = -ct(1 - \delta), \quad (31)$$

где $0 < \delta \ll 1$. Порядок величины δ можно оценить с помощью численного расчета нескольких первых членов суммы в (17) при известных значениях a, b, v, n_b . Так, для выбранных выше параметров сгустка и $\rho = 0.1$ см для момента времени $t = 2t_{\text{int}}$ поле E_ρ^r может быть описано первыми тремя членами суммы в (17) при $\delta \propto 10^{-2}$, $z^* \approx -5.6$ см. Точке z^* соответствует точка В на рис. 2. При $z = z^*$ величина поля $E_{\rho,1}^r$ первого члена суммы в (17) приблизительно в 10 раз превышает величины полей $E_{\rho,2}^r, E_{\rho,3}^r$ второго и третьего членов суммы и более чем в 100 раз превышает величины остальных членов суммы. В области $z < z^*$ вклад второго и последующих членов суммы в (17) уменьшается, а в области $z > z^*$ необходимо учитывать вклады от членов суммы в (17) с $m \geq 4$. По измеренному в эксперименте значению поля E_ρ^r в δ -окрестности переднего фронта сигнала из аналитического выражения для первых трех членов суммы в (17) можем найти коэффициент μ_1 с учетом найденных ранее значений μ_0 и μ_2 . В результате по найденным значениям μ_0, μ_1, μ_2 с помощью формулы (1) можем восстановить продольный профиль плотности сгустка.

Граница плазма—идеальный проводник

Рассмотрим границу раздела сред плазма—идеальный проводник, расположенную в плоскости $z = 0$. Идеальный проводник занимает область $z > 0$. В качестве плазмы выберем немагнитный полупроводник с диэлектрической постоянной решетки ϵ_0 . Аксиально-симметричный электронный сгусток движется вдоль оси z со скоростью v и пересекает границу раздела сред со стороны полупроводника. Так как условие негaussовости

распределения продольной плотности сгустка не является необходимым для возбуждения нестационарных негармонических импульсов, то для упрощения расчета будем считать, что продольное распределение плотности сгустка описывается выражением (1) с $\mu_n = 0$ для всех $n > 0$.

Плотность тока $\mathbf{j}_{\text{ind}}^b$, индуцированного в среде полем сгустка, определяется в линейном приближении уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{\text{ind}}^b}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}^b(\mathbf{r}, t), \quad (32)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_p / m}$ — плазменная частота полупроводника, n_p — концентрация электронов полупроводника, а m — эффективная масса электронов полупроводника. Введем „бегущую“ координату $\xi = (z - vt)/b$. Из калибровки Лоренца и из (32) получим следующую связь между $\psi^b, j_{\text{ind},z}^b$ и A_z^b :

$$\psi^b = (\epsilon_0 \beta)^{-1} A_z^b, \quad j_{\text{ind},z}^b = \frac{\omega_p^2}{4\pi c} \left(\frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} - 1 \right) A_z^b. \quad (33)$$

Решение для A_z^b будем искать в виде (7) для $n = 0$. Тогда для функции $y_0(\xi)$ получим уравнение аналогичное (8), в котором

$$k = b \sqrt{\frac{\kappa^2}{1 - \epsilon_0 \beta^2} - \frac{\omega_p^2}{\epsilon_0 v^2}},$$

$$g = \frac{\sqrt{2} e N_b b \beta}{\pi^{1/4} (1 - \epsilon_0 \beta^2)} \kappa \exp\left(-\frac{\kappa^2 \alpha^2}{2}\right). \quad (34)$$

Решение для $y_0(\xi, \kappa)$ имеет вид

$$y_0(\xi, \kappa) = y_0(\kappa) \left[\exp(k\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{k + \xi}{\sqrt{2}}\right) + \exp(-k\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{k - \xi}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad (35)$$

где

$$y_0(\kappa) = \frac{g \pi^{1/4}}{2\sqrt{2}k} \exp\left(\frac{k^2}{2}\right). \quad (36)$$

Выражения для полей сгустка определяются формулами, аналогичными (11)–(13), в которых надо положить $n = 0$, в (11) $1/\beta$ заменить на $1/(\epsilon_0 \beta)$, в (12) $1/\gamma^2$ заменить на $(1 - \epsilon_0 \beta^2)/\epsilon_0$ и для $y_0(\xi, \kappa)$ подставить выражение (35).

Из определений электрического и магнитного полей и материального уравнения (32) следует, что ток $\mathbf{j}_{\text{ind}}^b$, индуцированный в среде полем излучения, выражается через компоненту A_z^r достаточно сложным образом, и волновое уравнение для векторного потенциала \mathbf{A}^r поля излучения в среде с дисперсией не приводится к уравнению Клейна—Гордона. В то же время легко показать, что уравнение Клейна—Гордона может быть получено, например, для электрического поля излучения \mathbf{E}^r . Соответствующие решения для E_z^r, E_ρ^r и H_ϕ^r в

области ($\bar{z} \leq 0$) и ($\tau \geq -\bar{z}$) имеют вид

$$E_z^r(\rho, z, t) = \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa\rho) \alpha_m(\kappa) \frac{\partial \Psi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (37)$$

$$E_\rho^r(\rho, z, t) = - \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_1(\kappa\rho) \frac{\alpha_m(\kappa)}{\kappa} d_0(\kappa) \frac{\partial^2 \Psi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \bar{z} \partial \tau}, \quad (38)$$

$$H_\phi^r(\rho, z, t) = \sum_m \int_0^\infty d\kappa J_1(\kappa\rho) \frac{\alpha_m(\kappa) d_1(\kappa)}{\kappa c} \times \left[\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Psi_m(\bar{z}, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\omega_p^2}{d_1^2(\kappa)} \Psi_m(\bar{z}, \tau) \right], \quad (39)$$

где функции $\Psi(\bar{z}, \tau)$ определяются выражениями (16), $\bar{z} = d_0(\kappa)z$, $\tau = d_1(\kappa)t$ и

$$d_0(\kappa) = \sqrt{\kappa^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2}}, \quad d_1(\kappa) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} d_0(\kappa). \quad (40)$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_m(\kappa)$ находим из условия $E_\rho^b + E_\rho^r = 0$ на границе раздела плазма–идеальный проводник ($z = 0$)

$$\sum_m \frac{\alpha_m(\kappa)}{4\kappa} d_0(\kappa) [J_{m-2}(\tau) - J_{m+2}(\tau)] = \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \beta} y_0 \left(-\frac{v\tau}{bd_1(\kappa)}, \kappa \right), \quad (41)$$

откуда следует, что суммирование по m начинается с значения $m = 2$. Выполнив процедуру сшивки полей сгустка и излучения так, как это было описано выше, можно получить рекуррентные формулы для определения коэффициентов $\alpha_m(\kappa)$ аналогичные формулам (22), (23). Вследствие гауссовости продольного распределения плотности сгустка коэффициенты $\alpha_m(\kappa)$ с нечетными индексами m будут равны нулю.

Распределение полей излучения E_ρ^r , E_z^r и H_ϕ^r по координате z отличаются от соответствующих распределений в вакууме появления осциллирующих задних фронтов (при $k^2 < 0$), а также возникновением зависимостей величин полей и их производных вблизи переднего фронта результирующего импульса от параметров плазмы. Последнее обстоятельство позволяет определить величины ε_0 и ω_p при известных параметрах сгустка. Например, для сгустка, параметры которого удовлетворяют условиям

$$a \propto b, \quad \varepsilon_0 \beta^2 \ll 1, \quad \frac{\omega_p b}{\sqrt{\varepsilon_0} v} \gg 1, \quad (42)$$

причем $z \rightarrow -ct/\sqrt{\varepsilon_0}$ и $t \rightarrow \infty$ имеем

$$E_\rho^r(\rho, z, t) \Big|_{z=-ct/\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{\sqrt{2} e N_b v^2 \rho}{\sqrt{\pi} a^4 b \omega_p^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right), \quad (43)$$

$$\frac{\partial E_\rho^r(\rho, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=-ct/\sqrt{\varepsilon_0}} = -t \frac{e N_b v^2 \rho}{\sqrt{2\pi} \varepsilon_0 a^4 b c} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right) \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon_0 v^2}{b^2 \omega_p^2}\right) \right]. \quad (44)$$

Из (42) и (44) следует, что при достаточно высокой концентрации носителей заряда в полупроводнике (или для не слишком малых сгустков) крутизна переднего фронта поля E_ρ^r слабо зависит от плазменной частоты и определяется, в основном, параметрами сгустка и диэлектрической постоянной решетки.

Поведение производных по координате z решений (37)–(39) при $z \rightarrow -ct/\sqrt{\varepsilon_0}$ для $m = 2, 3, 4, \dots$ качественно совпадают с поведением решений для вакуума (17)–(19) для $m = 1, 2, 3, \dots$ — соответственно. Следовательно, форма переднего фронта результирующего импульса будет иметь вид переднего фронта импульса с $m = 2$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе показана возможность возбуждения негармонических нестационарных импульсов в вакууме и в среде с дисперсией с помощью эффекта переходного излучения сгустка электронов. Сгусток был выбран в виде сплошного цилиндра с гауссовым распределением плотности электронов по радиусу. Скорость сгустка направлена вдоль нормалей к границам раздела сред вакуум–идеальный проводник и плазма–идеальный проводник. Плотность сгустка в направлении его движения предполагалась как несимметричной, так и симметричной относительно его центра. Несимметричное распределение продольной плотности моделировалась суммой конечного числа функций Эрмита. Симметричное распределение продольной плотности сгустка описывалось гауссовым распределением. Наличие поперечной (относительно скорости сгустка) дисперсии собственного поля сгустка приводит к тому, что волновое уравнение для поля излучения в вакууме приводится к уравнению Клейна–Гордона. Поля излучения сгустка представляют собой бесконечный набор негармонических нестационарных решений уравнения Клейна–Гордона. Результирующее поле является ТМ-поляризованным на границе раздела двух сред и ТЕМ-поляризованным в области переднего фронта волны, крутизна которого со временем растет. Задний фронт результирующего поля импульсов в вакууме представляет собой монотонную функцию координаты, а в среде с дисперсией — осциллирующую функцию. Показана возможность определения продольного профиля плотности сгустка и параметров плазмы по значениям полей излучения их производных вблизи переднего фронта результирующего сигнала.

Авторы выражают благодарность В.И. Карасю за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
- [2] Тер-Микаелян М.Л. // УФН. 2001. Т. 171. № 6. С. 597–624.
- [3] Платонов К.Ю., Флейшман Г.Д. // УФН. 2002. Т. 172. № 3. С. 241–300.
- [4] Балакирев В.А., Сидельников Г.Л. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 90–95.
- [5] Балакирев В.А., Онищенко И.Н., Сидоренко Д.Ю. и др. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 88–95.
- [6] Болотовский Б.М., Серов А.В. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 3–7.
- [7] Болотов В.Н., Кононенко С.И., Муратов В.И. и др. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 4. С. 89–93.
- [8] Анисимов И.А., Левитский С.М. // РиЭ. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 614–615.
- [9] Яковенко В.М., Яковенко И.В. // Радиофизика и электроника. 2001. Т. 6. № 1. С. 97–102.
- [10] Аверков Ю.О., Яковенко В.М. // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 6. С. 563–570.
- [11] Шварцбург А.Б. // УФН. 1998. Т. 168. № 1. С. 85–103.
- [12] Yan X., MacLeod A.M., Gillespie W.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. N 16. P. 3404–3407.