01;09

Распространение электромагнитных волн в волноводе с анизотропным модулированным заполнением

© Э.А. Геворкян

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики,
119501 Москва, Россия
e-mail: EGevorkyan@teach.mesi.ru

(Поступило в Редакцию 21 апреля 2005 г.)

Рассмотрено распространение поперечно-электрических (TE) и поперечно-магнитных (TM) электромагнитных волн в волноводе произвольного поперечного сечения с анизотропным периодически модулированным в пространстве и времени заполнением. В предположении малости индексов модуляции заполнения получены аналитические выражения для TE- и TM-полей в области „слабого“ взаимодействия между сигнальной волной и волной модуляции. Найдена частота, вокруг которой происходит „сильное“ взаимодействие между сигнальной волной и волной модуляции и выявлены особенности полей в данной области.

PACS: 84.40.Az

Введение

В литературе имеется большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованиям различных аспектов электродинамики периодически модулированных сред (см., например, [1–8]). Эти исследования представляют большой интерес и с точки зрения развития теории, и с точки зрения возможности широкого практического применения периодических сред в различных областях электроники сверхвысоких частот, микроэлектроники, тонкопленочной и интегральной оптики, акустооптики и т. д. Так, например, ими пользуются при конструировании генераторов с распределенной обратной связью, полосовых фильтров, параметрических усилителей, многочастотных лазеров с распределенной обратной связью (РОС-лазеров) и с распределенным и брэгговскими отражателями (РБО-лазеров), преобразователей мод с использованием тонкопленочных волноводов и т. д.

В последние десятилетия вырос интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям электродинамики периодически нестационарных и неоднородных как анизотропных и гиротропных сред, так и жидких кристаллов. Это связано с возможностью использования подобных модулированных сред при создании устройств с тонкой периодической структурой для канализации различных типов волн (в том числе и электромагнитных), а также при создании призменных поляризаторов, фильтров с двойным лучепреломлением, дифракционных решеток, голограмм, светофильтров Шольца и т. д. [9–13].

Постановка задачи и волновые уравнения

Распространение электромагнитных волн в волноводе произвольного поперечного сечения с периодически нестационарным и неоднородным диэлектрическим заполнением рассмотрено в работах [14–19]. В настоящей работе решается аналогичная задача для случая, когда волновод заполнен анизотропной периодически модулированной средой.

Рассмотрим волновод произвольного поперечного сечения с анизотропным немагнитным ($\mu = 1$) модулированным заполнением (модулированный одноосный кристалл), тензор диэлектрической проницаемости которого имеет вид

$$\widehat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(z,t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(z,t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2(z,t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где компоненты $\varepsilon_1(z,t)$ и $\varepsilon_2(z,t)$ волной накачки модулированы в пространстве и во времени по гармоническому закону

$$\varepsilon_1(z,t) = \varepsilon_1^0\big[1 + m_1 \cos k_0(z - ut)\big],$$
$$\varepsilon_2(z,t) = \varepsilon_2^0\big[1 + m_2 \cos k_0(z - ut)\big]. \tag{2}$$

Здесь ε_1^0 и ε_2^0 — диэлектрические проницаемости в отсутствие волны модуляции, m_1 и m_2 — индексы модуляции, k_0 и u — волновое число и скорость волны модуляции соответственно.

Рассмотрим распространение сигнальной электромагнитной волны с частотой ω_0 в подобном волноводе в предположении малости индексов модуляции ($m_1 \ll 1$, $m_2 \ll 1$, $m_1 \approx m_2$). Это оправдано тем, что обычно в реальном эксперименте индексы модуляции очень малы и могут изменяться от 10^{-4} до $4 \cdot 10^{-2}$. Заметим, что при выполнении условия $\beta_1 \le 0.8$, где $\beta_1 = u\sqrt{\varepsilon_1^0}/c$ (c — скорость света в вакууме), наряду с индексами модуляции оказывается и малым параметр $l_1 = m_1\beta_1/(1 - \beta_1^2)$ ($l_1 \ll 1$).

Поперечно-электрическое (TE) и поперечно-магнитное (TM) поля в подобном волноводе, как и в наших

ранних работах (см., например, [14–19]), опишем с помощью продольных составляющих магнитного (H_z) и электрического (E_z) векторов, взяв их в качестве потенциалов полей. Тогда из уравнений Максвелла с учетом того, что $D_x = \varepsilon_1(z,t)E_x$, $D_y = \varepsilon_1(z,t)E_y$, $D_z = \varepsilon_2(z,t)E_z$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ можно получить волновые уравнения для потенциалов $H_z(x,y,z,t)$ и $E_z(x,y,z,t)$ в виде
ТЕ-волна:

$$\Delta_\perp H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_1 \frac{\partial H_z}{\partial t}\right] = 0; \tag{3}$$

ТМ-волна:

$$\Delta_\perp \tilde{E}_z + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z}\right) - \frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, $\tilde{E}_z = \varepsilon_2 E_z$.

Нетрудно показать, что поперечные составляющие ТЕ- и ТМ-полей в этом случае будут выражаться через потенциалы

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z,t)\widehat{\Psi}_n(x,y), \quad E_z = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z,t)\Psi_n(x,y) \tag{5}$$

следующими формулами
ТЕ-волна:

$$\mathbf{H}_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2}\frac{\partial H_n(z,t)}{\partial z}\nabla\widehat{\Psi}_n(x,y), \tag{6}$$

$$\mathbf{E}_\tau = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2}\frac{\partial H_n(z,t)}{\partial t}[\mathbf{z}_0\nabla\widehat{\Psi}_n(x,y)], \tag{7}$$

ТМ-волна:

$$\mathbf{H}_\tau = -\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2}\frac{\partial[\varepsilon_2 E_n(z,t)]}{\partial t}[\mathbf{z}_0\nabla\Psi_n(x,y)], \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_\tau = \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2}\frac{\partial[\varepsilon_2 E_n(z,t)]}{\partial z}\nabla\Psi_n(x,y), \tag{9}$$

где $\widehat{\Psi}_n$, $\widehat{\lambda}_n$ и Ψ_n, λ_n — ортонормированные собственные функции и собственные значения соответственно второй и первой краевых задач для поперечного сечения волновода, индекс τ означает поперечные составляющие, $\mathbf{z}_0$ — орт оси $0z$, ∇ — двумерный оператор Набла.

Решение волновых уравнений. Выражения для ТЕ- и ТМ-полей

Если в (3) и (4) ввести новые переменные [8]

$$\xi = z - ut, \quad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{u}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\beta_1^2\varepsilon_1(\xi)/\varepsilon_1^0} \tag{10}$$

и искать решения полученных уравнений в виде

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[i(\widehat{p}_0^n u - \omega_0)\eta\right]H_{nz}(\xi)\widehat{\Psi}_n(x,y), \tag{11}$$

$$\tilde{E}_z = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[i(p_0^n u - \omega_0)\eta\right]E_{nz}(\xi)\Psi_n(x,y) \tag{12}$$

с учетом того, что функции $\widehat{\Psi}_n(x,y)$ и $\Psi_n(x,y)$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta_\perp\widehat{\Psi}_n(x,y) + \widehat{\lambda}_n^2\widehat{\Psi}_n(x,y) = 0, \quad \left.\frac{\partial\widehat{\Psi}_n}{\partial\mathbf{n}}\right|_\Sigma = 0, \tag{13}$$

$$\Delta_\perp\Psi_n(x,y) + \lambda_n^2\Psi_n(x,y) = 0, \quad \Psi_n(x,y)\big|_\Sigma = 0, \tag{14}$$

где Σ — контур поперечного сечения, $\mathbf{n}$ — нормаль к Σ, то получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно переменной ξ для определения $H_{nz}(\xi)$ и $\tilde{E}_{nz}(\xi)$:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}\right)\frac{dH_{nz}}{d\xi}\right] + \frac{\widehat{\chi}_n^2}{1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}}H_{nz} = 0, \tag{15}$$

$$\varepsilon_2\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}\right)\frac{d\tilde{E}_{nz}}{d\xi}\right] + \frac{\chi_n^2}{1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}}\tilde{E}_{nz} = 0, \tag{16}$$

где

$$\widehat{\chi}_n^2 = \frac{(u\widehat{p}_0^n - \omega_0)^2}{c^2}\,\varepsilon_1 - \widehat{\lambda}_n^2\left(1-\beta_1^2\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}\right),$$

$$\chi_n^2 = \frac{(up_0^n - \omega_0)^2}{c^2}\,\varepsilon_1 - \lambda_n^2\left(1-\beta_1^2\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}\right), \tag{17}$$

$$\left(\widehat{p}_0^n\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\,\varepsilon_1^0 - \widehat{\lambda}_n^2,$$

$$(p_0^n)^2 = \frac{\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0\beta_1^2}{\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0\beta_2^2}\frac{\omega_0^2}{c^2}\,\varepsilon_1^0 - \lambda_n^2 b_1,$$

$$b_1 = 1-\beta_1^2, \qquad \beta_2 = \frac{u\sqrt{\varepsilon_2^0}}{c}. \tag{18}$$

Введя в уравнения (15) и (16) новые переменные по формулам

$$\widehat{s} = \frac{k_0 b_1}{2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}}, \quad s = \frac{k_0 b_1}{2\varepsilon_1^0}\int_0^\xi \frac{\varepsilon_1 d\xi}{1-\beta_1^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^0}}, \tag{19}$$

их можно преобразовать к дифференциальным уравнениям типа Матье–Хилла:

$$\frac{d^2 H_{nz}}{d\widehat{s}^2} + \frac{4\widehat{\chi}_n^2}{k_0^2 b_1^2}H_{nz} = 0, \quad \frac{d^2\tilde{E}_{nz}}{ds^2} + \frac{4\chi_n^2(\varepsilon_1^0)^2}{k_0^2 b_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2}\tilde{E}_{nz} = 0. \tag{20}$$

Заметим, что частотная область, определяемая условиями

$$|1-\widehat{\theta}_0^n| \gg \widehat{\delta}_n \cong \frac{\widehat{\theta}_1^n}{2\sqrt{2}}, \quad |1-\theta_0^n| \gg \delta_n \cong \frac{\theta_1^n}{2\sqrt{2}}, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\theta}_0^n = \frac{4}{k_0^2 b_1^2}\left(\widehat{p}_0^n - \frac{\omega_0 \beta_1^2}{u}\right)^2,$$

$$\theta_0^n = \frac{4}{k_0^2 b_1^2}\left(p_0^n - \frac{\omega_0 \beta_1^2}{u}\right)^2, \tag{22}$$

$$\widehat{\theta}_1^n = \widehat{\theta}_{-1}^n = \frac{2}{k_0^2 b_1^2}\left[\frac{(u\widehat{p}_0^n - \omega_0)^2}{u^2} + \frac{k_0^2 b_1^2}{4}\,\widehat{\theta}_0^n\right] l_1, \tag{23}$$

$$\theta_1^n = \theta_{-1}^n = \frac{2\varepsilon_1^0 \lambda_n^2}{k_0^2 b_1^2 \varepsilon_2^0}\, m_2 - \frac{\theta_0^n}{2}\, m_1, \tag{24}$$

соответствует области слабого взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции заполнения волновода. Решая уравнения (20) методом, развитым в работах [14–19] и ограничиваясь членами, пропорциональными индексам модуляции заполнения в первой степени, для потенциалов TE- и TM-полей в области частот (21) получим выражения

TE-волна:

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\Psi}_n(x,y) \exp\left[i(\widehat{p}_0^n z - \omega t)\right] \widehat{c}_0^n \times \sum_{k=-1}^{1} \widehat{V}_k^n \exp\left[ikk_0(z-ut)\right], \tag{25}$$

где

$$\widehat{V}_k^n = \left(k\,\frac{\omega_0}{2uk_0}\, l_1 + \frac{\widehat{c}_k^n}{\widehat{c}_0^n}\right)^{|k|}, \quad \widehat{c}_{\pm 1}^n = \frac{\widehat{\theta}_1^n\, \widehat{c}_0^n}{4\left(1 \pm \sqrt{\widehat{\theta}_0^n}\,\right)}; \tag{26}$$

TM-волна:

$$E_z = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x,y) \exp\left[i(p_0^n z - \omega_0 t)\right] c_0^n \times \sum_{k=-1}^{1} V_k^n \exp\left[ikk_0(z-ut)\right], \tag{27}$$

где

$$V_k^n = \left[k\,\frac{\omega_0}{2uk_0} l_1 + \frac{c_k^n}{c_0^n} - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\right]^{|k|},$$

$$c_{\pm 1}^n = \frac{\theta_1^n c_0^n}{4\left(1 \pm \sqrt{\theta_0^n}\right)}. \tag{28}$$

Отметим, что в (25) и (27) величины $\widehat{c}_0^n$ и c_0^n определяются из условия нормировки. Как следует из (25) и (27), при распределении электромагнитной волны в волноводе, анизотропное заполнение которого модулировано в пространстве и времени по гармоническому закону, поперечно-электрическое (TE) и поперечно-магнитное (TM) поля представляют набор пространственно-временных гармоник с различными амплитудами. При этом в области слабого взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции амплитуды на плюс первой и минус первой гармониках оказываются малыми (они пропорциональны индексам модуляции в первой степени) по сравнению с амплитудой основной гармоники (она не зависит от индексов модуляции).

Область сильного (резонансного) взаимодействия

Как известно [14], при приближении величин $\widehat{\theta}_0^n$ и θ_0^n к единице, т. е. когда выполняются условия

$$|1-\widehat{\theta}_0^n| \le \widehat{\delta}_n, \quad |1-\theta_0^n| \le \delta_n, \tag{29}$$

происходит сильное взаимодействие между сигнальной волной и волной модуляции заполнения (выполняется условие Вульфа–Брэгга первого порядка для отраженных от уплотнений волн) и возникает значительный энергообмен между ними.

Условие (29) можно переписать в виде (для TM-поля)

$$\omega_{0,s} - \Delta\omega_0 \le \omega_0 \le \omega_{0,s} + \Delta\omega_0, \tag{30}$$

где частота $\omega_{0,s}$, вокруг которой происходит сильное взаимодействие, имеет вид

$$\omega_{0,s} = \frac{uk_0}{2\beta_1}(\beta_1 + \overline{\eta}_n), \quad \overline{\eta}_n = \sqrt{1 + \frac{4\overline{\lambda}_n^2}{b_1 k_0^2}}, \quad \overline{\lambda}_n^2 = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_2^0}\lambda_n^2, \tag{31}$$

а ширина области сильного взаимодействия выражается формулой

$$\Delta\omega_0 = \frac{k_0 u(1+\beta_1\overline{\eta}_n)}{8\sqrt{2}\beta_1\overline{\eta}_n}. \tag{32}$$

Вычисления приводят к тому, что в области частот (30)

$$|V_{-1}^n| \sim 1, \quad |V_1^n| \sim m_1, m_2. \tag{33}$$

Последние соотношения показывают, что в области сильного взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции анизотропного заполнения волновода амплитуда волны на отраженной минус первой гармонике оказывается не зависящей от индексов модуляции. Иными словами, в указанной области помимо нулевой гармоники сигнала существенную роль играет и отраженная минус первая гармоника на частоте

$$\omega_{-1,s} = \frac{uk_0}{2\beta_1}(\overline{\eta}_n - \beta_1), \quad (\overline{\eta}_n > \beta_1). \tag{34}$$

В заключение отметим, что, с одной стороны, при $m_1 \to 0$ полученные выше результаты переходят к уже известным результатам работы [19], а с другой стороны, из них предельным переходом при $u \to 0$ можно получить результаты в случае неоднородного, но стационарного анизотропного заполнения волновода.

Список литературы

[1] *Элаши Ш.* // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 12. С. 22–58.
[2] *Карпов С.Ю., Столяров С.Н.* // УФН. 1993. Т. 163. № 1. С. 63–89.
[3] *Касседи Е.С., Олинер А.А.* // ТИИЭР. 1963. Т. 51. № 10. С. 1330–1347.
[4] *Касседи Е.С.* // ТИИЭР. 1967. Т. 55. № 7. С. 37–52.
[5] *Барсуков К.А., Болотовский Б.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 2. С. 291–299.
[6] *Peng S.T., Cassedy E.S.* // Proc. of the Symp. on Modern Optics. N.Y.: Politecnic Press. 1967. V. MRI-17. P. 299–342.
[7] *Elachi Ch.* // Journal of Applied Physics. 1972. V. 43. N 9. P. 3719–3723.
[8] *Барсуков К.А.* // РиЭ. 1964. Т. 9. № 7. С. 1173–1178.
[9] *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах / Пер. с англ. М.: Мир. 1987. 616 с.
[10] *Elachi Ch., Yeh C.* // JOSA. 1973. V. 63. P. 840–842.
[11] *Беляков В.А., Сонин А.С.* Оптика холестерических жидких кристаллов. М.: Наука. 1982. 360 с.
[12] *Ерицян О.С.* Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван: Айастан. 1988. 322 с.
[13] *Sailing H., Yidong H., Staffan S.* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. V. AP-42. N 6. P. 856–858.
[14] *Барсуков К.А., Геворкян Э.А.* // РиЭ. 1983. Т. 28. Вып. 2. С. 237–241.
[15] *Барсуков К.А., Геворкян Э.А.* // РиЭ. 1986. Т. 31. Вып. 9. С. 1733–1738.
[16] *Барсуков К.А., Геворкян Э.А.* // РиЭ. 1994. Т. 39. Вып. 7. С. 1170–1178.
[17] *Gevorkyan E.A.* // Proc. of Int. Symp. on Electromagnetic Theory. Thessaloniki, Greece. 1998. V. 1. P. 69–70.
[18] *Gevorkyan E.A.* // Proc. of Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kiev. Ukraine. 2002. V. 2. P. 373–375.
[19] *Gevorkyan E.A.* // Proc. of Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dniepropetrovsk. Ukraine. 2004. P. 370–371.