

01;09

Дифракция плоской электромагнитной волны на щели в проводящем экране с поперечным диэлектрическим слоем

© В.М. Сердюк

Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белорусского государственного университета,
220064 Минск, Белоруссия
e-mail: rhlab@bsu.by

(Поступило в Редакцию 24 октября 2005 г.)

Представлено строгое решение двумерной задачи дифракции плоской электромагнитной волны на щели в плоском идеально проводящем экране произвольной толщины с поперечным плоским бесконечным диэлектрическим слоем, проходящим через щель. В каждой из трех областей существования поля (полупространства по обе стороны от экрана и внутренность щели) решение представляется в виде разложения по кусочно-синусоидальным или экспоненциальным модам, изначально учитывающим отражение и преломление на границах диэлектрического слоя. Установлено, что система функций, описывающих такие моды является достаточно полной для построения решения, удовлетворяющего всем граничным условиям дифракционной задачи. Процедура построения такого решения сравнивается со случаем такой же дифракционной структуры, но без диэлектрического слоя.

PACS: 41.20.Jb

Введение

В строгой теории дифракции электромагнитных волн используется метод разбиения всего пространства распространения поля на области, границы которых совпадают с координатными поверхностями [1–4]. Искомое дифракционное поле представляется в виде суперпозиции экспоненциальных или синусоидальных мод различных областей, которые являются частными решениями уравнений Максвелла, что соответствует разложению полей на их границах в интегралы или ряды Фурье. Амплитуды этих мод (т.е. фурье-образы полей) определяются из условий на границах, разделяющих области. На проводящих поверхностях — это условия обращения в нуль тангенциальных компонент электрического поля, а в отсутствие таковых — условия равенства тангенциальных компонент электрического и магнитного поля по обе стороны границы [1–4].

Такой подход оказывается результативным, потому что косинусоидальные и синусоидальные (или экспоненциальные) функции образуют полную ортогональную систему функций в линейном функциональном пространстве, куда входит и подпространство решений задач дифракции. Однако разложение решения по простым экспоненциальным функциям возможно только в однородных диэлектрических средах, а при наличии диэлектрических неоднородностей простая экспонента уже не будет решением уравнений Максвелла. Поэтому включение частичного диэлектрического заполнения в дифракционную структуру существенно усложняет строгое решение задачи. Нужно вводить новые подобласти, границы которых должны совпадать с границами раздела различных диэлектриков, и проводить дополнительное сшивание полных дифракционных полей на этих границах.

Чтобы избежать подобных усложнений, можно использовать разложение поля не по модам однородного пространства, а по модам пространства с диэлектриком, которые изначально учитывают отражение и преломление поля данной моды на его границах. В настоящей работе эта идея обосновывается примером решения задачи дифракции плоской волны на щели в проводящем экране, через которую проходит бесконечный диэлектрический слой. В работах [5–7] рассматривалась аналогичная задача дифракции, но без диэлектрика, так что в дальнейшем мы будем сравнивать получаемые результаты с результатами этих работ.

1. Представление полей в различных областях

Пусть на идеально проводящий экран толщиной $2d$ со щелью ($-d \leq x \leq d$; $|z| \leq l$) и бесконечным диэлектрическим слоем ($s - h \leq z \leq s + h$) с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 1) падает плоская волна

$$u_0 = \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} + i\Phi_0) = \exp(i[\alpha_0(x + d) + \beta_0z]), \quad (1)$$

где $\Phi_0 = \alpha_0 d$ — начальная фаза, \mathbf{k}_0 — волновой вектор падающей волны, $\alpha_0 = k \cos \vartheta$, $\beta_0 = k \sin \vartheta$ — его проекции на координатные оси x и z ($\alpha_0^2 + \beta_0^2 = k^2$), $k = \omega/c$ — волновое число, ϑ — угол падения. Предполагается, что поле монохроматическое и его зависимость от времени определяется одним и тем же множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опущен.

Как известно [1,2,8], в двумерных задачах дифракции и распространения волн полное поле можно представить в виде суперпозиции полей двух поляризаций, H и E , каждая из которых определяется всего одной скалярной

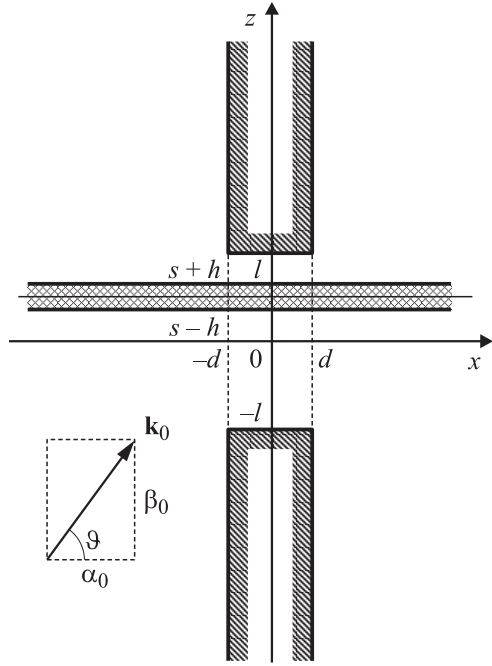


Рис. 1. Схема дифракции плоской волны на проводящем экране со щелью и бесконечным диэлектрическим слоем. l — полуширина щели, d — полутолщина экрана, $s-h$ и $s+h$ — границы слоя, ϑ — угол падения волны.

полевой функцией u или \bar{u} декартовых координат

$$E_y = u; \quad H_x = \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (2)$$

$$E_x = -\frac{i}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad H_y = \bar{u} \varepsilon(z). \quad (3)$$

Эта функция должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(z) \right) \left\{ \frac{u}{\bar{u}} \right\} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon(z)$ — кусочно-постоянная функция, равная величине ε в диэлектрике (при $s-h \leq z \leq s+h$) и единице вне его. Соотношения (2) и (3) показывают полную независимость полей H - и E -поляризации друг от друга в декартовой системе координат. Вместе с тем для расчета полей этих поляризаций будет использоваться одна и та же методика, поэтому в дальнейшем они рассматриваются параллельно.

Решение задачи по расчету компонент стационарного поля дифракции будем проводить, разделяя все пространство распространения поля, как и в работе [7], на три области: область слева от экрана ($x \leq -d$), внутренность щели ($-d \leq x \leq d$; $-l \leq z \leq l$) и область справа от экрана ($x \geq d$) (рис. 1). В каждой из этих областей полевую функцию представим в виде суперпозиции мод, поле которых удовлетворяет всем необходимым условиям, кроме условий на границах областей. Для

дифракционного поля справа от экрана (при $x \geq d$) используем представление полевой функции

H -поляризация:

$$u = \int_0^{+\infty} [B_s(\beta) f_s(\beta, z) + i B_a(\beta) f_a(\beta, z)] e^{i\alpha(x-d)} d\beta + \sum_{j=1}^J B_j w_j(z) e^{i\alpha_j(x-d)}; \quad (5a)$$

E -поляризация:

$$\bar{u} = k \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} [\bar{B}_s(\beta) \bar{f}_s(\beta, z) + i \bar{B}_a(\beta) \bar{f}_a(\beta, z)] e^{i\alpha(x-d)} d\beta + k \sum_{j=1}^J \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{B}_j \bar{w}_j(z) e^{i\bar{\alpha}_j(x-d)}; \quad (5b)$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2}; \quad \alpha_j = \sqrt{k^2 + \tau_j^2}; \quad (6)$$

$B_{s,a}(\beta, z)$ — неизвестные амплитуды симметричных (индекс s) и антисимметричных (индекс a) стоячих мод, B_j — не определенные пока амплитуды волновых мод, J — их число (здесь и везде ниже в формулах, определяющих параметры полей H - и E -поляризаций одновременно, черта сверху, отличающая параметры последней, опускается). Функции $f_{s,a}(\beta, z)$, которые характеризуют зависимость полей стоячих мод от координаты z , представляем в виде

$$f_s(\beta, z) = \begin{cases} \cos(\beta(z-s-h) + \psi_s), & z \geq s+h \\ p_s \cos \gamma(z-s), & s-h \leq z \leq s+h \\ \cos(\beta(z-s+h) - \psi_s), & z \leq s-h \end{cases} \quad (7a)$$

$$f_a(\beta, z) = \begin{cases} \sin(\beta(z-s-h) + \psi_a), & z \geq s+h \\ p_a \sin \gamma(z-s), & s-h \leq z \leq s+h \\ \sin(\beta(z-s+h) - \psi_a), & z \leq s-h \end{cases} \quad (7b)$$

$$\bar{f}_s(\beta, z) = \begin{cases} -\cos(\beta(z-s-h) + \bar{\psi}_s), & z \geq s+h \\ -\bar{p}_s \beta \gamma^{-1} \cos \gamma(z-s), & s-h \leq z \leq s+h \\ -\cos(\beta(z-s+h) - \bar{\psi}_s), & z \leq s-h \end{cases} \quad (8a)$$

$$\bar{f}_a(\beta, z) = \begin{cases} \sin(\beta(z-s-h) + \bar{\psi}_a), & z \geq s+h \\ \bar{p}_a \beta \gamma^{-1} \sin \gamma(z-s), & s-h \leq z \leq s+h \\ \sin(\beta(z-s+h) - \bar{\psi}_a), & z \leq s-h \end{cases} \quad (8b)$$

Параметры мод γ , ψ и p определяются в зависимости от постоянной распространения моды β вне диэлектрика

$$\gamma = \sqrt{k^2(\varepsilon - 1) + \beta^2};$$

$$\psi = \gamma h + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{1 - D \exp(2i\gamma h + 2i\varphi_0)}{1 - D \exp(-2i\gamma h + 2i\varphi_0)} \right); \quad (9a)$$

$$p = \cos(\psi + \varphi_0) \cos(\gamma h + \varphi_0) + \theta^{-1} \sin(\psi + \varphi_0) \sin(\gamma h + \varphi_0); \quad (9b)$$

$\varphi_0 = 0$ для симметричных H -мод и антисимметричных E -мод, $\varphi_0 = \pi/2$ для симметричных H -мод и симметричных E -мод; $D = (\theta - 1)/(\theta + 1)$; $\theta = \gamma/\beta$ для H -мод и $\theta = \varepsilon\beta/\gamma$ для E -мод.

Поля волноводных мод характеризуются экспоненциальным затуханием при удалении от границ диэлектрика

$$w_j(z) = \begin{cases} \chi_j^- \exp(-\tau_j(z - s - h)), & z \geq s + h \\ \chi_j \cos(\gamma_j(z - s) - \varphi_j), & s - h \leq z \leq s + h \\ \chi_j^+ \exp(\tau_j(z - s + h)), & z \leq s - h \end{cases} \quad (10a)$$

$$\bar{w}_j(z) = \begin{cases} -\bar{\chi}_j^- \exp(-\bar{\tau}_j(z - s - h)), & z \geq s + h \\ \bar{\chi}_j \bar{\tau}_j \bar{\gamma}_j^{-1} \sin(\bar{\gamma}_j(z - s) - \bar{\varphi}_j), & s - h \leq z \leq s + h \\ \bar{\chi}_j^+ \exp(\bar{\tau}_j(z - s + h)), & z \leq s - h, \end{cases} \quad (10b)$$

где для обеих поляризаций

$$\chi_j^\pm = \chi_j \cos(\gamma_j h \pm \varphi_j); \quad \gamma_j = \sqrt{k^2(\varepsilon - 1) - \tau_j^2}; \quad (11)$$

$\varphi_j = 0$ для симметричных H -мод и антисимметричных E -мод, $\varphi_j = \pi/2$ для антисимметричных H -мод и симметричных E -мод;

$$\chi_j = \sqrt{\frac{\pi \tau_j}{1 + \tau_j h}};$$

$$\bar{\chi}_j = \bar{\gamma}_j \sqrt{\frac{\pi \bar{\tau}_j}{\varepsilon \bar{\tau}_j^3 h + k^2(\varepsilon - 1) \cos^2(\bar{\gamma}_j h - \bar{\varphi}_j)}} \quad (12)$$

— нормирующие амплитудные множители. Постоянные затухания τ_j должны удовлетворять дисперсионному уравнению волноводных мод [9]

$$\tau_j \cos(\gamma_j h \mp \varphi_j) - \gamma_j \sin(\gamma_j h \mp \varphi_j) = 0 \quad (13a)$$

в случае H -поляризации и

$$\bar{\gamma}_j \cos(\bar{\gamma}_j h \pm \bar{\varphi}_j) + \varepsilon \bar{\tau}_j \sin(\bar{\gamma}_j h \pm \bar{\varphi}_j) = 0 \quad (13b)$$

в случае E -поляризации. Как известно [9], число решений этих уравнений

$$J = 1 + [2 \operatorname{Re}(kh\sqrt{\varepsilon - 1})/\pi]$$

конечно поддается счету (квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа). В любом случае существует по крайней мере одно решение каждого из уравнений (13a) и (13b), отвечающие симметричной волноводной моде.

Выбранные значения параметров (6), (9), (11), (13) обеспечивают для полей всех стоячих и волноводных мод (5), (7), (8) и (10) справедливость уравнения Гельмгольца (4) и выполнение условий равенства величин u , $\partial u/\partial z$ и $\bar{u}\varepsilon(z)$, $\partial \bar{u}/\partial z$ на границах диэлектрика

$z = s \pm h$. При этом модовые функции (7), (8) и (9) с разными постоянными распространения ортогональны между собой с весом 1 для H -поляризации и весом $\varepsilon(z)$ для E -поляризации

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,a}(\beta, z) f_{s,a}(\tilde{\beta}, z) dz = \pi \delta(\beta - \tilde{\beta});$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z) \bar{f}_{s,a}(\beta, z) \bar{f}_{s,a}(\tilde{\beta}, z) dz = \pi \delta(\beta - \tilde{\beta}); \quad (14a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_i(z) w_j(z) dz = \pi \delta_{ij};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z) \bar{w}_i(z) \bar{w}_j(z) dz = \pi \delta_{ij}; \quad (14b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,a}(\beta, z) w_j(z) dz = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z) \bar{f}_{s,a}(\beta, z) \bar{w}_j(z) dz = 0, \quad (14c)$$

где δ — дельта-функция Дирака, δ_{ij} — символ Кронекера.

В случае $h \rightarrow 0$ функции $f_{s,a}(\beta, z)$ (7), (8) стоячих мод становятся равными $\pm \cos(\beta(z - s) + \varphi_0)$, и тогда при $x = d$ интегральные представления (5) будут представлять собой обычные разложения в интеграл Фурье [7].

Таким образом, используя разложение дифракционного поля в области справа от экрана (5) по функциям (7), (8) и (9), а не по синусам и косинусам, мы тем самым автоматически учитываем отражение и преломление этого поля на границах плоского диэлектрика. Чтобы учесть данные эффекты для поля падающей волны (1) в области слева от экрана, возьмем его при $z < s - h$ вместе с отраженной от диэлектрика волной и разложим по сумме симметричной и антисимметричной мод (7) с соответствующим значением постоянной распространения $\beta = \beta_0$:

$$[\exp(i\beta_0 z) + R \exp(-i\beta_0(z - 2s))] \exp(i\alpha_0(x + d)) = [A_{s0} f_s(\beta_0, z) + i A_{a0} f_a(\beta_0, z)] \exp(i\alpha_0(x + d)),$$

где R — коэффициент отражения плоской волны от плоского диэлектрического слоя. Из последнего соотношения получим

$$A_{s0} = \pm \exp(i[\psi_{s0} + \beta_0(s - h)]);$$

$$A_{a0} = \exp(i[\psi_{a0} + \beta_0(s - h)]),$$

где верхний знак берется для H -поляризации падающего поля, а нижний — для E -поляризации, $\psi_{s0,a0}$ — значения

фазового параметра ψ (9а) для $\beta = \beta_0$. В результате полное поле слева от экрана (при $s \leq -d$) можно будет представить в виде

H-поляризация:

$$u = [A_{s0}f_s(\beta_0, z) + iA_{a0}f_a(\beta_0, z)](e^{i\alpha_0(x+d)} - e^{-i\alpha_0(x+d)}) + \int_0^{+\infty} [A_s(\beta)f_s(\beta, z) + iA_a(\beta)f_a(\beta, z)]e^{-i\alpha(x+d)}d\beta + \sum_{j=1}^J A_j w_j(z) e^{-i\alpha_j(x+d)}; \quad (15a)$$

E-поляризация:

$$\bar{u} = [\bar{A}_{s0}\bar{f}_s(\beta_0, z) + i\bar{A}_{a0}\bar{f}_a(\beta_0, z)](e^{i\alpha_0(x+d)} + e^{-i\alpha_0(x+d)}) - k \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} [\bar{A}_s(\beta)\bar{f}_s(\beta, z) + i\bar{A}_a(\beta)\bar{f}_a(\beta, z)]e^{-i\alpha(x+d)}d\beta - k \sum_{j=1}^J \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{A}_j \bar{w}_j(z) e^{-i\bar{\alpha}_j(x+d)}; \quad (15b)$$

где $A_{s,a}(\beta)$, A_j и $\bar{A}_{s,a}(\beta)$, \bar{A}_j — неизвестные амплитуды стоячих и волноводных мод *H*- и *E*-поляризации. В правых частях (15) выражения, предшествующие интегральным слагаемым, описывают явно выделенные поля падающей волны (1) и волны, отраженной от проводящего экрана.

В неограниченном полупространстве поля (5) и (15) должны удовлетворять условию излучения, которое мы вслед за [10] сформулируем как условие ограниченности дифракционных полей при $x \rightarrow \pm\infty$ и $z \rightarrow \pm\infty$. Для его выполнения достаточно потребовать, чтобы интегрирование в (5) и (14) велось строго по вещественной оси β и чтобы для параметров α и α_j (6) выбиралась ветвь квадратного корня с неотрицательной мнимой частью ($\text{Im } \alpha \geq 0$ и $\text{Im } \alpha_j \geq 0$).

Область внутри щели ($-d \leq x \leq d$) ограничена проводящими поверхностями $z = \pm l$; по сути это внутренность плоского металлического волновода, частично заполненная диэлектрическим слоем. Тангенциальные компоненты электрического поля E_y (2) и E_x (3) на проводящих границах волновода должны обращаться в нуль, откуда следует, что на этих границах должны обращаться в нуль полевая функция u для *H*-мод и нормальная производная полевой функции $\partial\bar{u}/\partial z$ для *E*-мод. Чтобы моды щели удовлетворяли этому дополнительному условию, для них можно использовать следующую зависимость от координаты z :

$$g_n(z) = \begin{cases} q_n P_n^- \sin \xi_n(l-z), & z \geq s+h \\ q_n \cos(\eta_n(z-s) - \psi_n), & s-h \leq z \leq s+h \\ q_n P_n^+ \sin \xi_n(l+z), & z \leq s-h \end{cases} \quad (16a)$$

$$\bar{g}_n(z) = \begin{cases} \bar{q}_n \bar{P}_n^- \cos \bar{\xi}_n(l-z), & z \geq s+h \\ \bar{q}_n \bar{\xi}_n \bar{P}_n^{-1} \sin(\bar{\eta}_n(z-s) - \bar{\psi}_n), & s-h \leq z \leq s+h \\ -\bar{q}_n \bar{P}_n^+ \cos \bar{\xi}_n(l+z), & z \leq s-h \end{cases} \quad (16b)$$

где

$$\eta_n = \sqrt{k^2(\varepsilon - 1) + \xi_n^2}, \quad (17)$$

постоянные распространения ξ_n удовлетворяют уравнению

$$[(\theta_n^2 + 1) \cos 2\xi_n(l-h) - (\theta_n^2 - 1) \cos 2\xi_n s] \sin 2\eta_n h + 2\theta_n \sin 2\xi_n(l-h) \cos 2\eta_n h = 0, \quad (18)$$

причем $\theta_n = \eta_n/\xi_n$ для *H*-поляризации и $\theta_n = \varepsilon\xi_n/\eta_n$ для *E*-поляризации;

$$\psi_n = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{1 - D_n \exp(2i\xi_n(l-s-h))}{1 - D_n \exp(-2i\xi_n(l-s-h))} \right) + \eta_n h + \xi_n(l-s-h) - \frac{\pi}{2}; \quad (19a)$$

$$D_n = (\theta_n - 1)/(\theta_n + 1);$$

$$p_n^\pm = \cos(\eta_n \pm \psi_n) \sin \xi_n(l \pm s - h) + \theta_n \sin(\eta_n \pm \psi_n) \cos \xi_n(l \pm s - h), \quad (19b)$$

а нормирующие амплитудные множители равны

$$q_n = \left\{ 1 + \frac{\theta_n^2 - 1}{2l} [(l-h)(1 - \cos 2\eta_n h \cos 2\psi_n) + s \sin 2\eta_n h \sin 2\psi_n] - \frac{k^2(\varepsilon - 1)}{2\xi_n^2 \eta_n l} \sin 2\eta_n h \cos 2\psi_n \right\}^{-1/2}; \quad (20a)$$

$$\bar{q}_n = \left\{ 1 + \frac{h}{l} \left(\frac{\theta_n^2}{\varepsilon} - 1 \right) + \frac{\theta_n^2 - 1}{2l} [(l-h) \times (1 - \cos 2\bar{\eta}_n h \cos 2\bar{\psi}_n) + s \sin 2\bar{\eta}_n h \sin 2\bar{\psi}_n] + \frac{\varepsilon k^2(\varepsilon - 1)}{2\bar{\eta}_n^3 l} \sin 2\bar{\eta}_n h \cos 2\bar{\psi}_n \right\}^{-1/2}. \quad (20a)$$

Функции (16) с параметрами, удовлетворяющими условиям (17)–(19), образуют ортогональную систему функций на интервале $-l \leq z \leq l$:

$$\int_{-l}^l g_n(z) g_m(z) dz = l \delta_{nm}; \quad \int_{-l}^l \varepsilon(z) \bar{g}_n(z) \bar{g}_m(z) dz = l \delta_{nm}. \quad (21)$$

В отсутствие диэлектрика (т.е. при $h \rightarrow 0$) уравнение (18) для постоянных распространения мод принимает очень простой вид: $\sin 2\xi_n l = 0$, решение которого $\xi_n = \pi n/2l$ и $\bar{\xi}_n = \pi(n-1)/2l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) [7]. С появлением диэлектрического слоя решения этого уравнения смещаются относительно данных значений, и чем больше толщина слоя и его диэлектрическая проницаемость, тем больше смещение. Однако между решениями уравнения (18) для случаев пустой щели и щели с диэлектриком имеет место взаимно-однозначное соответствие. Следует отметить, что с диэлектриком могут существовать и комплексные решения, причем даже тогда, когда его диэлектрическая проницаемость вещественна. К примеру, мода E -поляризации с $n = 1$ без диэлектрика имеет нулевое значение $\bar{\xi}_n$. Но в его присутствии такая мода существовать не может, за исключением случая, когда $kh(\varepsilon - 1)^{1/2} = \pi m$, m — целое число. В общем случае для такой E -моды с появлением диэлектрика решение смещается вверх по мнимой оси и оказывается в окрестности точки $\bar{\xi} = 0.7i$. Подобные решения уравнения (18) с большими мнимыми компонентами определяют моды, которые можно назвать волноводными модами диэлектрического слоя внутри щели. Их поля локализованы главным образом вблизи слоя и экспоненциально убывают при удалении от него.

Следовательно, внутри щели поля должны представляться в виде суперпозиции дискретного модового спектра (16):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \exp(i\sigma_n(d+x)) + b_n \exp(i\sigma_n(d-x))] g_n(z); \quad (22a)$$

$$\bar{u} = k \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\sigma}_n^{-1} [\bar{a}_n \exp(i\bar{\sigma}_n(d+x)) + \bar{b}_n \exp(i\bar{\sigma}_n(d-x))] \bar{g}_n(z), \quad (22b)$$

где a_n, b_n — амплитуды мод, $\sigma_n = (k^2 - \xi_n^2)^{1/2}$ — их постоянные распространения по оси x . Для определенности полагаем $\text{Im } \sigma_n \geq 0$, хотя в ограниченной области такое условие необязательно. При $s \neq 0$, когда середина диэлектрика смещена по оси x , симметрия дифракционной системы относительно этой оси нарушается, и система уравнений для амплитуд мод щели не будет разделяться на две независимые подсистемы для симметричных и антисимметричных мод, как это происходит в отсутствие диэлектрика [6,7].

2. Решение уравнений для модовых амплитуд

Неопределенные амплитуды мод вне и внутри щели определяются в результате сшивания полей (5), (15), (22) с модами (7), (8), (10), (16) на границах областей $x = -d$ и $x = d$, где должны выполняться те же граничные условия, что и в отсутствие диэлектрика [7].

Соответствующие вычисления аналогичны вычислениям для этого простого случая. Из условий для тангенциальных компонент электрического поля E_y (2) и E_z (3) по обе стороны границ $x = -d$ и $x = d$ с помощью условий ортогональности мод неограниченного пространства (14) выводятся выражения для амплитуд этих мод через амплитуды мод щели

$$A_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^- I_{sn,an}^{(fs)}(\beta); \quad A_j = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^- I_{jn}^{(ws)};$$

$$B_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^+ I_{sn,an}^{(fs)}(\beta); \quad B_j = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^+ I_{jn}^{(ws)};$$

$$\bar{A}_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^- \bar{I}_{sn,an}^{(fs)}(\beta); \quad \bar{A}_j = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^- \bar{I}_{jn}^{(ws)};$$

$$\bar{B}_{s,a}(\beta) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^+ \bar{I}_{sn,an}^{(fs)}(\beta); \quad \bar{B}_j = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^+ \bar{I}_{jn}^{(ws)},$$

где

$$P_n^- = a_n + b_n \exp 2i\sigma_n d; \quad P_n^+ = a_n \exp(2i\sigma_n d) + b_n,$$

причем

$$I_{sn}^{(fs)}(\beta) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_s(\beta, z) g_n(z) dz;$$

$$I_{an}^{(fs)}(\beta) = -\frac{i}{l} \int_{-l}^l f_a(\beta, z) g_n(z) dz;$$

$$\bar{I}_{sn}^{(fs)}(\beta) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varepsilon(z) \bar{f}_s(\beta, z) \bar{g}_n(z) dz;$$

$$\bar{I}_{an}^{(fs)}(\beta) = -\frac{i}{l} \int_{-l}^l \varepsilon(z) \bar{f}_a(\beta, z) \bar{g}_n(z) dz;$$

$$I_{jn}^{(ws)} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l w_j(z) g_n(z) dz;$$

$$\bar{I}_{jn}^{(ws)} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varepsilon(z) \bar{w}_j(z) \bar{g}_n(z) dz$$

— интегралы перекрытия мод различных областей.

Уравнения для амплитуд мод щели выводятся из граничных условий равенства тангенциальных компонент магнитного поля H_z (2) или H_y (3) по обе стороны границ щели $x = \pm d$. Разложив эти уравнения по ортогональным системам функций (16) и подставив в

них выражения (23), после некоторых преобразований получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\pm} \Gamma_n^{\pm} W_{nm} + \sigma_m c_m^{\pm} \Gamma_m^{\mp} = \alpha_0 [A_{s0} I_{sm}^{(fs)}(\beta_0) - A_{a0} I_{am}^{(fs)}(\beta_0)]; \quad (25a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n^{\pm} \bar{\Gamma}_n^{\pm} \bar{W}_{nm} + \bar{\sigma}_m^{-1} \bar{c}_m^{\pm} \bar{\Gamma}_m^{\mp} = k^{-1} [\bar{A}_{s0} \bar{I}_{sm}^{(fs)}(\beta_0) - \bar{A}_{a0} \bar{I}_{am}^{(fs)}(\beta_0)], \quad (25b)$$

где матричные элементы

$$W_{nm} = \frac{l}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} [I_{sn}^{(fs)}(\beta) I_{sm}^{(fs)}(\beta) - I_{an}^{(fs)}(\beta) I_{am}^{(fs)}(\beta)] \alpha d\beta + \sum_{j=1}^J \alpha_j I_{jn}^{(ws)} I_{jm}^{(ws)} \right\}; \quad (26a)$$

$$\bar{W}_{nm} = \frac{l}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} [\bar{I}_{sn}^{(fs)}(\beta) \bar{I}_{sm}^{(fs)}(\beta) - \bar{I}_{an}^{(fs)}(\beta) \bar{I}_{am}^{(fs)}(\beta)] \alpha^{-1} d\beta + \sum_{j=1}^J \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{I}_{jn}^{(ws)} \bar{I}_{jm}^{(ws)} \right\} \quad (26b)$$

выражаются через те же интегралы перекрытия (24),

$$c_n^{\pm} = (a_n \pm b_n)/2; \quad \Gamma_n^{\pm} = 1 \pm \exp 2i\sigma_n d. \quad (27)$$

Системы линейных алгебраических уравнений для амплитуд внутрищелевых мод каждой поляризации (25a) и (25b) разделяются на две независимых подсистемы относительно неизвестных c_n^+ и c_n^- (27). Используя приближение редукции [11] и ограничиваясь конечным числом этих мод N , можно перейти от бесконечномерных систем к системам конечной размерности. Перед их решением следует провести процедуру регуляризации согласно методу А.Н. Тихонова [12], как это делалось в работе [7]. Необходимость такой процедуры обусловлена тем, что при малой толщине экрана $2d$ системы (25) становятся плохо обусловленными. Тем самым процедура тихоновской регуляриции позволяет распространить теоретическую модель на случаи произвольной толщины проводящего экрана. Однако даже в случаях достаточно большой толщины экрана, когда обусловленность этих систем оказывается вполне удовлетворительной, аккуратно проведенная регуляризация повышает точность получаемого решения и заметно снижает погрешность несовпадения полей на границах областей [7].

После нахождения решений систем (25) для амплитуд мод щели и вычисления амплитуд внешелевых мод (23) можно рассчитать распределение компонент электрического и магнитного полей в различных точках пространства, подставляя в (2) и (3) выражения (5), (15) или (22) для соответствующих областей. При этом вычисление интегралов в (5), (15) и (26) проще всего проводить

по методу [7], вводя равномерную сетку аргумента β . Для интегралов (26), не зависящих от координат, здесь можно применить квадратурную формулу средних [13]. Однако в функциях (7), которые подставляются в (5) и (15), следует явно выделять зависящие от координаты z множители типа $\exp(\pm i\beta(z-s))$. Это нужно для того, чтобы учесть возможность быстрых осцилляций подынтегральных экспонент $\exp(\pm i\beta(z-s) + i\alpha(x-d))$ и $\exp(\pm i\beta(z-s) - i\alpha(x+d))$ при больших $|x|$ и $|z|$. Простая модификация квадратурного метода средних [13], предложенная в [7], позволяет приближенно учесть такие осцилляции. Для этого на каждой ячейке сетки можно использовать линейную аппроксимацию для показателей данных экспонент по аргументу β , применяя для остальных подынтегральных множителей приближение средних значений.

В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 приведены рассчитанные таким образом картины пространственного распределения полей H - и E -поляризации для

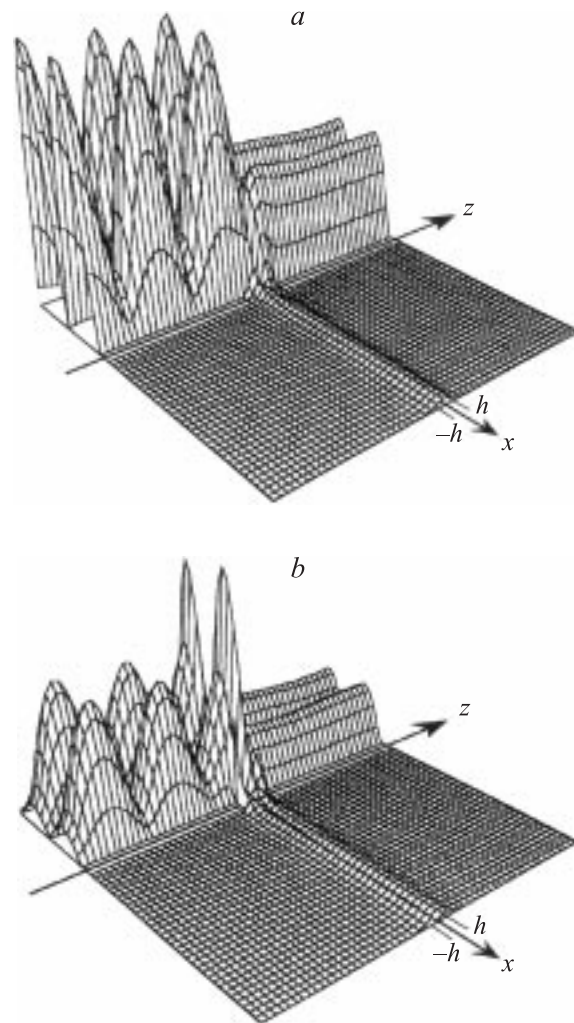


Рис. 2. Распределение величины компоненты электрического E_y (a) и магнитного H_x (b) полей в пространстве при дифракции H -поляризованной плоской волны на щели в проводящем экране с плоским бесконечным диэлектриком.

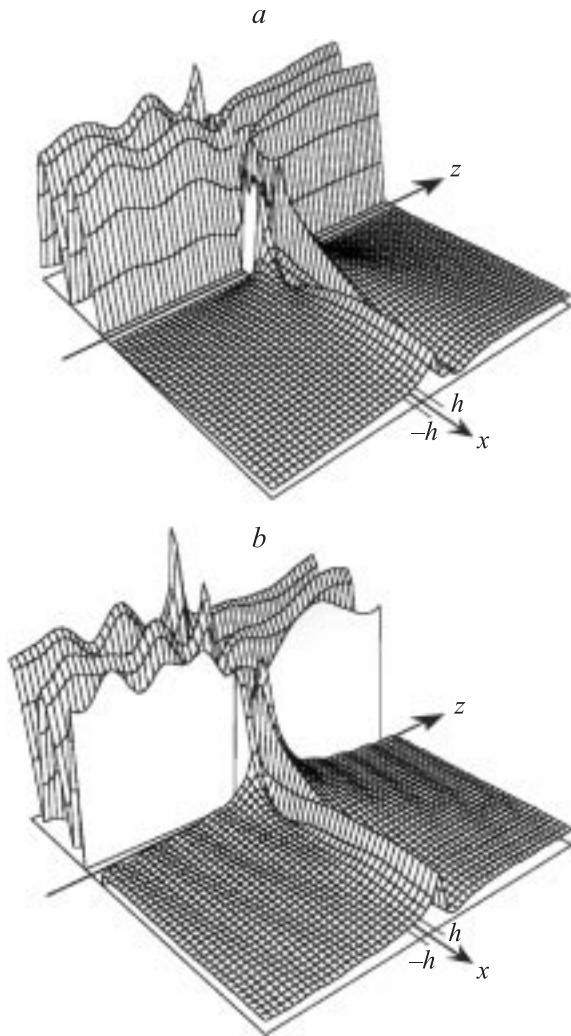


Рис. 3. Распределение величины компонент электрического E_z (a) и магнитного H_y (b) полей в пространстве при дифракции E -поляризованной плоской волны на щели в проводящем экране с плоским бесконечным диэлектриком.

случая прозрачного диэлектрического слоя с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4.0$ и толщиной, равной половине ширины щели ($h = 0.5l$). Предполагалось, что угол падения волны $\vartheta = 30^\circ$, диэлектрический слой расположен посередине щели ($s = 0$), полуширина щели $l = 1.4k^{-1} = 0.223\lambda$ и полутолщина экрана $d = 0.5l$. На рис. 4 показаны соответствующие линии тока энергии обеих поляризаций электромагнитного поля, определенные по методу, описанному в [7]. Сравнение данных рисунков с соответствующими рисунками работы [7], полученными для тех же параметров падающего поля и щели, но без диэлектрического слоя, наглядно демонстрирует влияние последнего на процесс дифракции. Появление плоского диэлектрика усиливает неравномерности в пространственном распределении полей и заставляет их сконцентрироваться ближе к диэлектрическому слою. Однако сингулярности компонент H_x и E_z на краях щели при этом сглаживаются.

Представленную теоретическую модель можно обобщить на случай анизотропного диэлектрического слоя. Если в принятой системе координат xuz (рис. 1) его тензор диэлектрической проницаемости является одноосным

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix}, \quad (28)$$

то в уравнении Гельмгольца (4) для E -поляризации перед второй производной по x появится дополнительный множитель $\varepsilon_0(z)/\varepsilon_e(z)$, где кусочно-постоянные функции $\varepsilon_0(z)$ и $\varepsilon_e(z)$ равны соответствующим компонентам тензора (28) в диэлектрике и единице вне его. Тогда постоянные распространения мод по оси z в диэлектрике (9a), (11), (17) для этой поляризации будут определяться новыми выражениями

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e^{-1} [k^2 (\varepsilon_e - 1) + \beta^2]};$$

$$\bar{\eta}_n = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e^{-1} [k^2 (\varepsilon_e - 1) + \xi_n^2]},$$

несколько изменится вид нормирующих множителей $\bar{\chi}_j$ (12) и \bar{q}_n (20b), в соотношениях ортогональности (14), (21) $\varepsilon(z)$ заменится на $\varepsilon_0^2(z)/\varepsilon_e(z)$, а в остальных формулах $\varepsilon(z)$ перейдет в $\varepsilon_0(z)$.

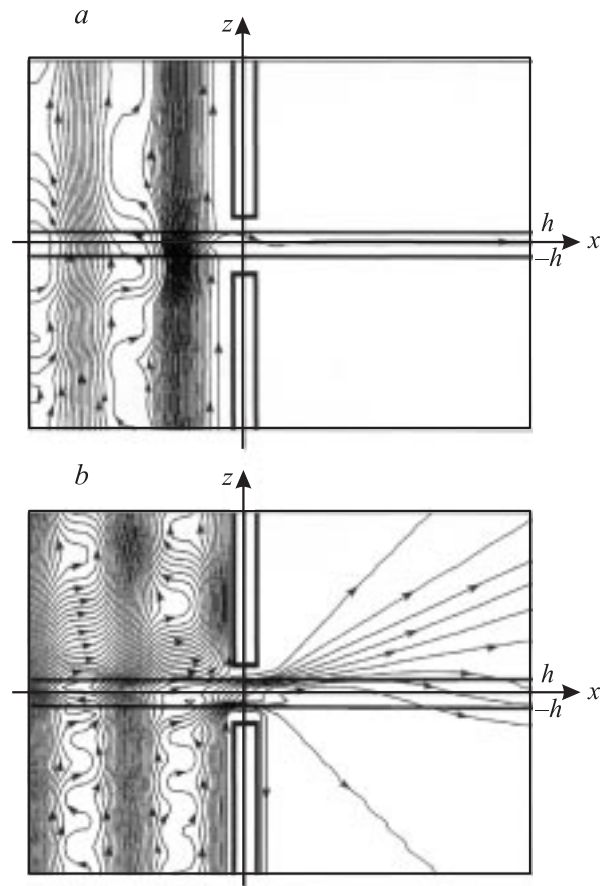


Рис. 4. Линии потока энергии при дифракции H -поляризованной (a) и E -поляризованной (b) плоских волн на щели в проводящем экране с плоским бесконечным диэлектриком.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда толщина диэлектрика равна ширине щели и плоский диэлектрический слой полностью заполняет внутренность щели. Этот случай более простой, поскольку для однородного диэлектрического заполнения вид внутрищелевых мод (16) значительно упрощается, и они переходят в обычные синусоидальные функции [6,7].

Заключение

Представленное решение дифракционной задачи можно считать вполне строгим, как и решения [6,7] для более простого случая щели без диэлектрического слоя. Конечно, оно не сводится к нескольким аналитическим формулам, как известное решение Зоммерфельда для полуплоскости [1–4]. Более того, некоторые параметры этого решения приходится определять, численно решая трансцендентные уравнения (13) и (18). Однако оно использует приближения только вычислительного характера и, как всякое строгое решение, может применяться в самом широком интервале изменения характеристик падающего поля и дифракционной системы.

Проведенное рассмотрение показывает эффективность применения в задачах дифракции полевых разложений по модам, учитывающим отражение и преломление на границах плоских диэлектрических слоев. При этом решение оказывается не намного сложнее, чем в случае отсутствия диэлектриков, и строится аналогично последнему более простому случаю. Основной теоретический вопрос, который возникает при таком подходе, — о полноте систем функций (7), (9) и (16), определяющих зависимость поля мод от координаты z , нормальной к границам диэлектрика. Выше отмечалось, что в его отсутствие данные функции переходят в вещественные синусы и косинусы, которые образуют полную систему в бесконечномерном линейном евклидовом пространстве комплекснозначных функций, интегрируемых по модулю [14]. Поэтому любая такая функция может быть однозначно представлена в виде разложения по синусам и косинусам. Однако применительно к нашим системам функций (7), (9) или (16) подобное утверждение не доказано. Более того, функциональное скалярное произведение (14), (21), на основе которого определяется ортогональность этих систем, не порождает евклидово пространство, поскольку его результатом для двух одинаковых элементов пространства является в общем случае комплексное, а не вещественное число. Вместе с тем в процессе проведения исследования установлено, что применение таких систем в качестве базиса при решении дифракционной задачи обеспечивает выполнимость всех требуемых граничных условий. Тем самым подтверждается полнота системы функций (7), (9) или (16) если не во всем функциональном пространстве, то, по крайней мере, в его подмножестве, которое образуется множеством решений соответствующих дифракционных задач.

Список литературы

- [1] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- [2] Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
- [3] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. С. 513–548.
- [4] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
- [5] Kashyap S.C., Hamid M.A. // IEEE Trans. Antennas and Propag. 1971. Vol. AP-19. N 4. P. 499–507.
- [6] Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л., Шестопалов В.П. // РиЭ. 1977. Т. 22. № 3. С. 474–484.
- [7] Сердюк В.М. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 113–120.
- [8] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [9] Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
- [10] Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969. 192 с.
- [11] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
- [12] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. С. 110–127.
- [13] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [14] Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.