

Краткие сообщения

01

Характеристики спектра Фурье сигнала, порождаемого в точке накопления бифуркаций утроения периода

© О.Б. Исаева

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН,
410019 Саратов, Россия
e-mail: isaevaOB@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г.)

Рассмотрены универсальные закономерности в структуре спектра Фурье сигнала, порождаемого в точке накопления бифуркаций утроения периода комплексного аналитического отображения. Найдена константа $\gamma = 21.9$ dB, отвечающая за перепад интенсивностей субгармоник на частотах, соответствующих соседним уровням в иерархической структуре спектра и являющаяся аналогом известной константы $\gamma_F = 13.4$ dB для критической точки Фейгенбаума. Представлены данные физического эксперимента по наблюдению спектра в точке накопления бифуркаций утроения периода.

PACS: 02.30.Nw, 02.30.Oz

Простейшим объектом, демонстрирующим сложную динамику, служит, как известно, система с дискретным временем, заданная квадратичным отображением. В частности, в ней реализуется переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, характеризующийся универсальными свойствами Фейгенбаума [1]. При обобщении на случай комплексной переменной

$$z_{n+1} = \lambda - z_n^2, \quad \lambda, z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

квадратичное отображение демонстрирует на плоскости параметров фрактальное образование, известное как множество Мандельброта (рис. 1) [2]. Это совокупность областей, где наблюдается ограниченная (итерации не убегают на бесконечность) периодическая или хаотическая динамика. Известно [3,4], что в комплексном отображении при выборе пути на плоскости комплексного параметра так, чтобы он определенным образом проходил через „лепестки“ множества Мандельброта, можно наблюдать и другие варианты каскадов бифуркаций увеличения периода, например, посредством бифуркаций утроения. В работе [4] была введена в рассмотрение критическая точка накопления утроений периода, которую назовем точкой *GSK*:

$$\lambda_c = 0.0236411685377 + 0.7836606508052i. \quad (2)$$

Если в одномерном комплексном отображении разделить действительную и мнимую части, то придем к эквивалентному описанию динамики двумерным отображением на множестве пар действительных чисел. Заметим, что это отображение весьма специального вида, так как соответствующие функции обязаны удовлетворять условиям Коши–Римана (условиям аналитичности). Как показано в работах [5,6], даже малое неаналитическое возмущение в отображении приводит к радикальным

изменениям динамики, в частности, разрушению универсальных свойств, характерных для утроения периода и других каскадов увеличения периода. В связи с этим принципиальное значение приобретает вопрос о возможности наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в реальных системах (см., например, [7]).

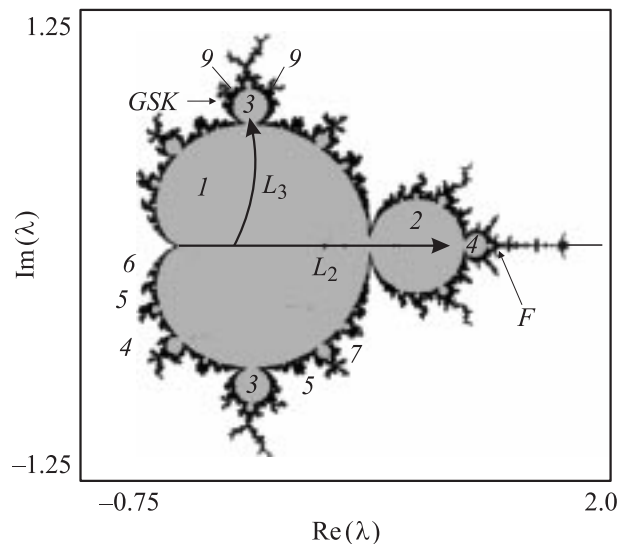


Рис. 1. Множество Мандельброта комплексного отображения (1). Обозначены серым цветом области с периодической динамикой (периоды реализующихся циклов указаны цифрами), черный фрактальный узор соответствует ограниченной в фазовом пространстве хаотической динамике, белый цвет означает убежание орбит на бесконечность. Линиями L_2 и L_3 обозначены пути, следуя которыми, можно наблюдать удвоения и утроения периода соответственно. Стрелками обозначены точки накопления этих бифуркаций — точка Фейгенбаума *F* и точка Гольберга–Синая–Ханина *GSK*.

В работе [8] обсуждается вопрос о возникновении множества Мандельброта на плоскости параметров связанных систем со специальным видом связи, обеспечивающим определенную симметрию в системе, необходимую для выполнения условий аналитичности. На основании этой идеи в [9] предложено электронное аналоговое устройство, моделирующее динамику связанных логистических отображений. В этой системе впервые удалось пронаблюдать множество Мандельброта в физическом эксперименте.

Используя данную экспериментальную установку, можно наблюдать характерные для комплексных отображений бифуркации и, в частности, последовательность утроений периода.

При наблюдении динамических режимов, реализующихся в различных системах, удобно использовать спектральные характеристики генерируемого сигнала. В этой связи обратимся к вопросу о спектре Фурье сигнала, порождаемого квадратичным комплексным отображением в критической точке накопления бифуркаций утроения периода GSK . Как можно заключить из результатов ренормгруппового анализа [3,4], в точке GSK должно существовать бесконечное количество неустойчивых циклов с периодами $N = 3^k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, которые при $N \rightarrow \infty$ все более точно аппроксимируют критический аттрактор. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье определяются следующим образом:

$$z_n = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{2\pi i}{N} mn\right),$$

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right), \quad (3)$$

где z_n — реализующаяся в критической точке GSK последовательность значений динамической переменной, стартовая из экстремума отображения $z_0 = 0$. Величина $f = m/N$ соответствует частоте компоненты c_m . Вводится обозначение для квадрата амплитуды m -й компоненты $S(f) = S(m/N) = |c_m|^2$.

На рис. 2, *a* показан спектр сигнала, генерируемого в точке GSK . Он представлен в виде зависимости интенсивностей гармоник в децибелах, т.е. $10 \lg S$ от частоты f . Заметим, что спектр имеет фрактальный характер: в нем можно выделить пики на частотах, соответствующих периодам реализующихся в точке GSK неустойчивых циклов. Структура спектра между любыми соседними двумя пиками повторяется. Как видно из рисунка, разница интенсивностей гармоник на частотах $1/3^k$ и $1/3^{k+1}$ составляет в среднем $\gamma = 21.9$ dB. Эта константа является аналогом известного значения $\gamma = 13.4$ dB для фейгенбаумовской точки [1].

На рис. 2, *c* приведен тот же спектр отображения (1) в точке GSK , но в двойном логарифмическом масштабе. Кроме того, спектральные интенсивности отнесены к соответствующим частотам в степени $\kappa = 6.15$ (эта константа подобрана эмпирически). В таком представлении

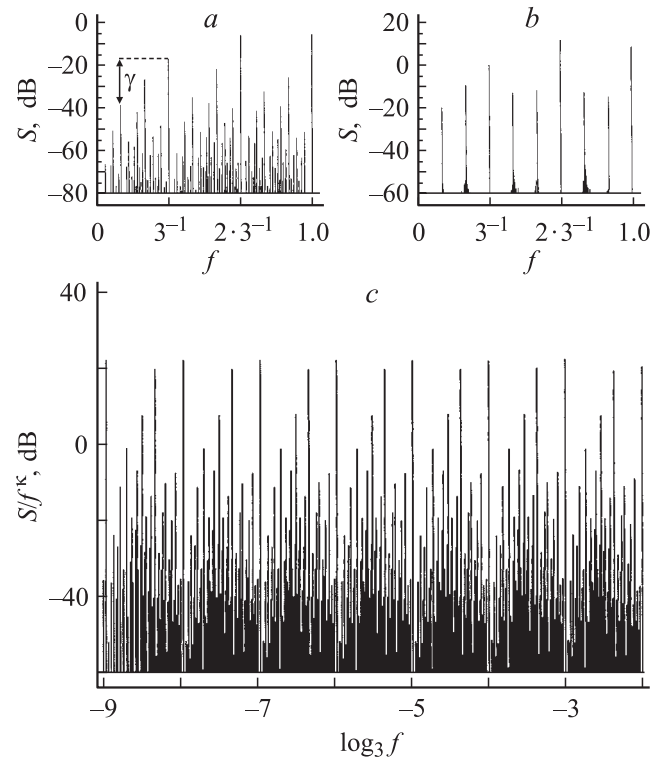


Рис. 2. Спектры Фурье для: *a* — сигнала, порождаемого комплексным отображением (1) в критической точке (2); *b* — сигнала в критической точке, представленного в двойном логарифмическом масштабе; *c* — сигнала, полученного в эксперименте и соответствующего циклу периода 9.

спектр более наглядно демонстрирует свой самоподобный характер. Можно заметить, что высота пиков и их взаимное расположение имеют периодический характер.

Полученные константы γ и κ носят универсальный характер, являясь атрибутами критической точки GSK . С помощью константы κ продемонстрирована, например, самоподобная иерархическая структура спектра в точке GSK для комплексифицированного отображения Эно [10].

Кроме того, универсальные характеристики спектра в точке GSK продемонстрированы и экспериментально. Посредством описанной в [9] системы удалось пронаблюдать несколько первых бифуркаций утроения периода в реальном физическом эксперименте (достижение непосредственно точки GSK затруднительно из-за шумов и погрешностей эксперимента). На рис. 2, *b* приведен спектр, полученный в эксперименте при значениях управляющих параметров, соответствующих существованию цикла периода 9 (последующие утроения периода трудно различимы в условиях эксперимента). В спектре можно видеть высокие пики на соответствующих частотах. Существование характерного перепада интенсивностей субгармоник на утраивающихся частотах в соответствии с константой $\gamma = 21.9$ dB подтверждается.

Автор выражает благодарность С.П. Кузнецову, а также В.И. Пономаренко, разработавшему экспериментальную установку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011, INTAS (grant N 05-109-5262), Фонда содействия отечественной науке и гранта Президента РФ (№ 8501.2006.2).

Список литературы

- [1] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Наука. 2001.
- [2] *Peitgen H.-O., Richter P.H.* The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [3] *Cvitanovic P., Myrheim J.* // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. N 2. P. 225–254.
- [4] *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 159–160.
- [5] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* // RCD. 2000. Vol. 5. N 4. P. 459–476.
- [6] *Peckham B.B.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. N 1. P. 73–93.
- [7] *Beck C.* // Physica D. 1999. Vol. 125. P. 171–182.
- [8] *Исаева О.Б.* // Изв. вузов. ПНД. 2001. Т. 9. № 6. С. 129–146.
- [9] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.* // PRE. 2001. Vol. 64. P. 055201 (4).
- [10] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* [http://arxiv.org\(2005\)](http://arxiv.org(2005)).