01;05;09

Спонтанное нарушение симметриии в системе „диэлектрическая среда−электромагнитное поле“

© И.В. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
95007 Симферополь, Украина
e-mail: dzedolik@crimea.edu

(Поступило в Редакцию 12 июля 2005 г.)

Рассмотрены условия спонтанного нарушения симметрии и возникновение квазичастиц в нелинейной системе „диэлектрическая среда−электромагнитное поле“. Определен параметр порядка системы. Найден спектр масс квазичастиц в случаях распространения поля в линейном и нелинейном режимах как отсутствие, так и при наличии границ в среде.

PACS: 41.20.-q

Распространение электромагнитного поля в прозрачной диэлектрической среде можно рассматривать как переизлучение электромагнитных волн волнами поляризации среды, в общем случае, нелинейными. С другой стороны, распространение электромагнитного поля в среде можно представить как поток квазичастиц — поляритонов, представляющих собой связанное состояние поля и волны поляризации среды [1,2]. Как для классических, так и для квантовых нелинейных систем „среда−поле“ возможно спонтанное нарушение симметрии, приводящее к возникновению голдстоуновских безмассовых бозонов и массивных квазичастиц [3]. Спонтанное нарушение симметрии будет происходить в системе, если при наличии поля симметрия ее основного (вакуумного) состояния ниже исходной симметрии в отсутствие поля. При этом в системе возникают безмассовые коллективные возбуждения (бозоны) со свойствами частот убывать до нуля $\omega(\mathbf{k}) \to 0$ при стремлении к нулю волновых векторов $\mathbf{k} \to 0$, и квазичастицы с массой $m \sim \omega(k=0) \neq 0$.

Квазичастицы являются возбуждениями над вакуумным состоянием системы. Уединенные либо периодические кноидальные волны, соответствующие квазичастицам, могут возникать как в неограниченных диэлектрических средах, так и в диэлектрических резонаторах и волноводах, например, оптических волокнах [1–10]. Возможны режимы, при которых квазичастицы приобретают форму трехмерных уединенных волн. Например, трехмерные частицеподобные возбуждения генерируются в нелинейной диэлектрической заполняющей полупространство среде, на которую падает сферический импульс. В неорганической среде с кубичной нелинейностью в области нормальной дисперсии самофокусировка импульса насыщается и он при распространении не коллапсирует, но пульсирует [4]. Существование поля в форме уединенных волн с характеристиками частиц обусловлено свойствами данной системы „поле−среда“ образовывать топологические вакуумные состояния с глобальными минимумами потенциальной энергии, в которых величина поля не равна нулю.

Условия генерации частицеподобных возбуждений будут определяться соотношением между параметрами поля и дисперсионными характеристиками среды. Вопрос о возникновении массы частицы в физике был и остается одним из наиболее актуальных [11]. Рассмотрим условия возникновения массы у квазичастицы в среде — поляритона. Массу частицы можно определить из релятивистского соотношения между энергией и импульсом $\tilde{E} = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$. Полагая, что энергия квазичастицы с шириной спектра $\Delta\omega$ равна $\tilde{E} = \hbar(\omega_q + \Delta\omega)$, а импульс $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, находим массу поляритона $m = \left[\hbar^2(\omega+\Delta\omega)^2 - c^2\hbar^2k^2\right]^{1/2}/c^2$. Экспоненциально массу поляритона можно найти, если независимо измерить его энергию (спектр) $\tilde{E} = \hbar(\omega + \Delta\omega)$ и импульс (длину волны) $p = 2\pi\hbar/\lambda$ в данной среде. Масса квазичастицы характеризует ее инерционные и гравитационные свойства, т.е. диэлектрическая среда „тяжелеет“, когда через нее распространяется электромагнитное поле [12].

При распространении волнового пакета в диэлектрической диспергирующей (и поглощающей [13]) среде среднее по периоду изменение плотности энергии классического электромагнитного поля во времени можно представить в форме

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = \frac{1}{16\pi}\left[i\omega(\varepsilon^* - \varepsilon)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \frac{d(\omega\varepsilon^*)}{d\omega}\,\mathbf{E}_0\frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\mathbf{E}_0^*\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0}{\partial t}\right], \qquad (1)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t,\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(t,\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ — векторы электромагнитного поля, амплитуды векторов поля $\mathbf{E}_0(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_0(t,\mathbf{r})$ медленно изменяются во времени, * — комплексное сопряжение, $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Для вывода соотношения (1) использовано разложение оператора $\hat{f}_1(\omega + \Delta\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}$ в ряд Тейлора по ширине спектра $\Delta\omega \ll \omega$ с учетом медленности изменения амплитуд по времени $\mathbf{E}_0(t,\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0\Delta\omega}(\mathbf{r})e^{-i\Delta\omega t}$ [13]. Изменение во времени средней плотности энергии поля в среде должно быть положительным, так как среда, в случае термодинамического равновесия только поглощает энергию поля. Проинтегрировав (1) по времени действия поля $\int_{t_0}^{t} dt'$, получим среднюю плотность энергии системы „поле–среда“

$$\overline{w} = \frac{1}{16\pi}\left[\omega\varepsilon''\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0\Delta t + \frac{d(\omega\varepsilon')}{d\omega}\,\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0 + \mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0\right], \qquad (2)$$

где Δt — время воздействия поля на среду.

Найдем устойчивые состояния системы „поле–среда“ с кубичным нелинейным откликом. Представим диэлектрическую проницаемость среды как функцию плотности энергии поля $\varepsilon' = \varepsilon_1 + 4\pi\chi_3\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0$, $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\chi_1$ — линейная диэлектрическая проницаемость. Тогда среднюю плотность энергии поля запишем в виде

$$\overline{w} = \frac{1}{16\pi}\Bigg[\left(\varepsilon_1 + \omega\frac{d\varepsilon_1}{d\omega}\omega\varepsilon''\Delta t\right)\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0 + 4\pi\chi_3\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0 + \mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0\Bigg]. \qquad (3)$$

За уровень отсчета энергии в момент времени t примем энергию системы „поле–среда“ в линейном режиме ($\chi_3 \to 0$) распространения поля $\overline{w}_{0L} = \frac{1}{16\pi}(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_{0L}^*\mathbf{E}_{0L} + \mathbf{B}_{0L}^*\mathbf{B}_{0L})$, где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \omega\varepsilon''\Delta t + \omega d\varepsilon_1/d\omega$. В области нормальной дисперсии $d\varepsilon_1/d\omega > 0$ (рис. 1) параметр $\tilde{\varepsilon} > 0$ всегда больше нуля, основное состояние системы симметрично. В нелинейном режиме ($\chi_3 \neq 0$) при $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $\chi_3 > 0$ основное состояние системы также симметрично (рис. 2). Но если $\tilde{\varepsilon} < 0$, $\chi_3 > 0$, абсолютный минимум энергии системы достигается при значениях $\mathbf{E}_{0m}^*\mathbf{E}_{0m} \equiv \psi_{0j}^*\psi_{0j} = \tilde{\varepsilon}/8\pi\chi_3$, $\mathbf{B}_{0L}$. В случае $\tilde{\varepsilon} < 0$, $\chi_3 > 0$ в основном состоянии системы плотность энергии равна $\overline{w}_{0SB} = \frac{1}{16\pi}\left[\mathbf{B}_{0L}^*\mathbf{B}_{0L} - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{16\pi\chi_3}\right] < \overline{w}_{0L}$, в частности, $\overline{w}_{0SB} = 0$ при $\mathbf{B}_{0L}^*\mathbf{B}_{0L} = \tilde{\varepsilon}^2/16\pi\chi_3$. Если $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\chi_3 < 0$, то плотность энергии имеет максимум $\overline{w}_{0A} = \frac{1}{16\pi}\left[\mathbf{B}_{0L}^*\mathbf{B}_{0L} + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{16\pi\chi_3}\right] > \overline{w}_{0L}$. Таким образом, величина $\alpha = \tilde{\varepsilon}/8\pi\chi_3$ является параметром порядка системы „электромагнитное поле–диэлектрическая среда“: при $\alpha < 0$ симметрия системы в энергетическом пространстве нарушается, а основное (вакуумное) состояние в нелинейном режиме вырождено по амплитудам компонент поля.

Полагая, что диэлектрическая проницаемость среды мало меняется на длине волны $\lambda|\nabla\ln\varepsilon| \ll 1$, запишем нелинейное уравнение для классического квазимонохроматического электрического поля $\mathbf{E}$ в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \frac{4\pi\chi_3}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}, \qquad (4)$$

где $\nabla = \mathbf{1}_x\partial/\partial x + \mathbf{1}_y\partial/\partial y + \mathbf{1}_z\partial/\partial z$ — оператор набла, $\mathbf{1}_{x,y,z}$ — единичные орты, $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\chi_1$, χ_1 — линейная, χ_3 — кубичная восприимчивости среды. Это уравнение описывает распространение нелинейных волн

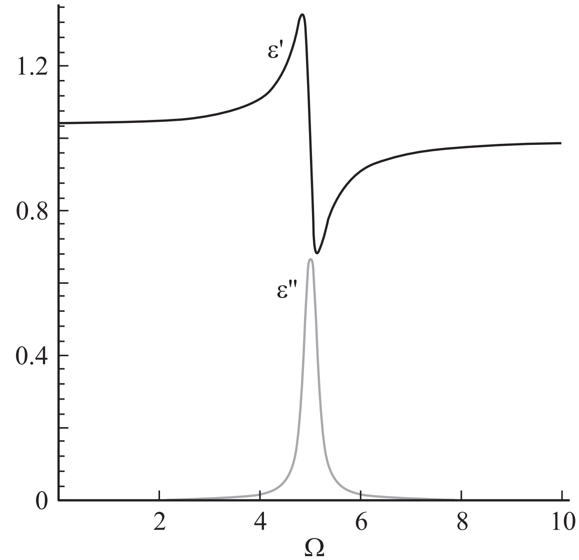

Рис. 1. Действительная ε' и мнимая ε'' части диэлектрической проницаемости среды.

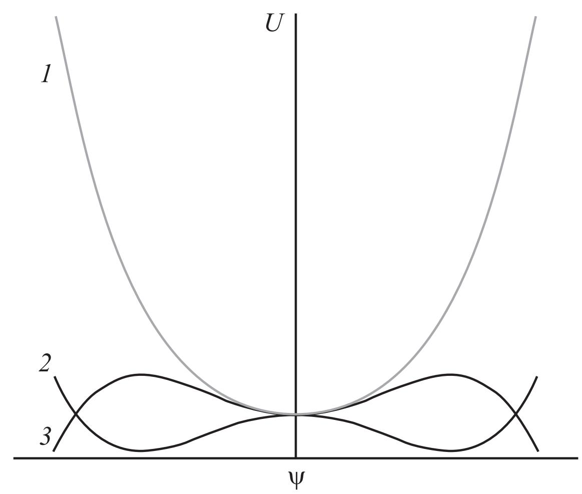

Рис. 2. Потенциал U: *1* — $U = a_1\psi^2 + a_2\psi^4$, *2* — $-a_1\psi^2 + a_2\psi^4$, *3* — $a_1\psi^2 - a_2\psi^4$.

как в неограниченной диэлектрической среде, так и в диэлектрическом волноводе.

Диэлектрическая проницаемость среды является функцией плотности энергии электромагнитного поля $\varepsilon = \varepsilon_1 + 4\pi\chi_3\mathbf{E}^*\mathbf{E}$. Для квазимонохроматического поля, разложив в ряд по ширине спектра поля $\Delta\omega \ll \omega$ с учетом дисперсионных свойств среды оператор $\hat{f}_2(\omega + \Delta\omega) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\varepsilon}$ [13], из (4) получим систему уравнений для медленно меняющихся по времени амплитуд $\psi_j(t, \mathbf{r}) = \tilde{\psi}_j(\mathbf{r})e^{-i\Delta\omega t}$ компонент электрического вектора $E_j = \psi_j(t, \mathbf{r})e^{-i\omega t}$, $(j = 1, 2, 3)$:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}\right)\psi_j + i\,\frac{1}{c^2}\frac{d(\omega^2\varepsilon_1)}{d\omega}\frac{\partial\psi_j}{\partial t} + \omega^2\frac{4\pi\chi_3}{c^2}|\psi|^2\psi_j + i\omega\frac{8\pi\chi_3}{c^2}\frac{\partial|\psi|^2\psi_j}{\partial t} - \frac{4\pi\chi_3}{c^2}\frac{\partial^2|\psi|^2\psi_j}{\partial t^2} = 0, \qquad (5)$$

где $|\psi|^2 = \psi_j^* \psi_j$. Полагая $|\partial\psi_j/\partial t| \sim |\chi_3|$, в первом приближении из (5) получим систему трех нелинейных уравнений для поля в среде

$$i\frac{\partial\psi_j}{\partial t} = -a_0\nabla^2\psi_j - a_1\psi_j - a_2|\psi|^2\psi_j, \qquad (6)$$

где $a_0 = c^2[d(\omega^2\varepsilon_1)/d\omega]^{-1}$, $a_1 = \omega^2\varepsilon_1[d(\omega^2\varepsilon_1)/d\omega]^{-1}$, $a_2 = 4\pi\omega^2\chi_3[d(\omega^2\varepsilon_1)/d\omega]^{-1}$.

Лагранжиан системы (6) имеет вид

$$L = i\psi_j(\partial\psi_j^*/\partial t) - i\psi_j^*(\partial\psi_j/\partial t) + a_0(\nabla\psi_j^*)\nabla\psi_j - a_1\psi_j^*\psi_j - \frac{a_2}{2}(\psi_j^*\psi_j)^2 - \text{const}. \qquad (7)$$

Устойчивое симметричное основное состояние системы для поля с потенциалом $U(\psi) = a_1\psi_j^*\psi_j + \frac{a_2}{2}(\psi_j^*\psi_j)^2 + \text{const}$, если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, имеет место при ψ_{V0} (рис. 2, кривая *1*). Но если $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ $(d(\omega^2\varepsilon_1)/d\omega < 0,\ \chi_3 < 0)$, то при ψ_{V0} состояние системы симметрично, но неустойчиво. При $\psi_{Vj} \neq 0$ возникает устойчивое вакуумное состояние с нарушенной симметрией $|\psi_V|^2 = \varepsilon_1/4\pi|\chi_3|$ (где $|\psi_V|^2$ — плотность „конденсата" поляритонов) (рис. 2, кривая *2*). В случае $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ $(\chi_3 < 0)$ потенциал поля соответствует притяжению поляритонов (рис. 2, кривая *3*).

Рассмотрим распространение немонохроматического поля в безграничной среде. Из (6) в этом случае можно получить нелинейное дисперсионное уравнение для квазиплоских волн $\psi_j = \psi_{0j}\exp[-i\Delta\omega t + i\mathbf{kr}]$:

$$\left(\varepsilon_1 + \Delta\omega\frac{d\varepsilon_1}{d\omega} + 4\pi\chi_3\sum\psi_{0j}^2\right)\omega^2 + 2\Delta\omega\varepsilon_1\omega = c^2k^2. \qquad (8)$$

Из дисперсионного уравнения (8) находим частотный спектр с двумя ветвями

$$\omega_{NL} = -\Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL} \pm \sqrt{(\Delta\omega\varepsilon_1)^2/\varepsilon_{NL}^2 + c^2k^2}, \qquad (9)$$

где $\varepsilon_{NL} = \varepsilon_1 + \Delta\omega\frac{d\varepsilon_1}{d\omega} + 4\pi\chi_3\sum\psi_{0j}^2$. При $k \to 0$ частоты (9) имеют значения $\omega_+ = 0$ и $\omega_- = -2\Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL}$. Энергия квазичастицы определяется соотношением $\tilde{E} = \hbar(\omega_{NL} + \Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL}) = \sqrt{(\hbar\Delta\omega\varepsilon_1)^2/\varepsilon_{NL}^2 + c^2\hbar^2k^2}$. Таким образом, в системе генерируется безмассовый $(m_{GB} = 0)$ голдстоуновский бозон и квазичастица с массой $m_P = c^{-2}\hbar[(\omega_{NL} + \Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL})^2 - c^2k^2]^{1/2} = c^{-2}\hbar\Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL}$. Отметим, что в нелинейном режиме возникновение безмассового бозона и массивной квазичастицы в неограниченной среде обусловлено спонтанным нарушением симметрии системы в энергетическом пространстве [3] при взаимодействии поля со средой, если $\alpha < 0$. В конечном итоге спонтанное нарушение симметрии системы „поле–среда" определяется возникновением нелинейных эффектов при наличии соответствующего числа поляритонов N в данной области среды, так как $|\psi|^2 \sim N\tilde{E}$.

В открытом резонаторе Фабри–Перо типы трансляционной симметрии по продольной оси z и в поперечной плоскости отличаются из-за наличия границ по оси z. Предположим, что резонатор заполнен диэлектрической диспергирующей средой. Тогда представим квадрат волнового числа как $k^2 = k_\perp^2 + \beta^2$, где $\beta = l\pi/L$ — постоянная распространения вдоль оси z резонатора, $l = 1, 2, \ldots$, L — длина резонатора. Частота (9) l-й моды равна

$$\omega_l = -\Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL} \pm \sqrt{(\Delta\omega\varepsilon_1)^2/\varepsilon_{NL}^2 + c^2k_\perp^2 + c^2l^2\pi^2/L^2}. \qquad (10)$$

При $k_\perp \to 0$ $\omega_l \neq 0$, т.е. можно определить массы поляритонов: $m_l = c^{-2}\hbar[(\omega_l + \Delta\omega\varepsilon_1/\varepsilon_{NL})^2 - c^2k_\perp^2]^{1/2}$. Поляритон приобретает массу в резонаторе как в линейном $(\chi_3 = 0)$, так и в нелинейном $(\chi_3 > 0,\ \chi_3 < 0)$ режимах распространения поля, причем величина его массы зависит от значения отклика среды. Масса у поляритона возникает в результате ограничения его движения по продольной оси („одномерная потенциальная яма"), что на языке классической электродинамики означает возникновение стоячей волны между зеркалами резонатора. Стоячая волна не переносит энергию поля, т.е. можно определить массу квазичастицы в лабораторной системе отсчета [12].

Найдем спектр масс трехмерных квазичастиц в диэлектрическом волноводе. Электромагнитное поле, распространяющееся в волноводе, в силу дискретности спектра постоянных распространения β_l можно рассматривать как поток массивных квазичастиц. Степень свободы по продольной оси z и азимутальная степень свободы в волноводе не нарушаются, а радиальная степень свободы ограничена. Таким образом, массивные квазичастицы должны возникать в волноводе из-за наличия границ по радиусу.

Запишем уравнение (6) для квазимонохроматического поля в виде

$$\nabla^2\psi_j + \left(\Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega} + \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}\right)\psi_j - \frac{4\pi\chi_3\omega^2}{c^2}|\psi|^2\psi_j = 0. \qquad (11)$$

В линейном режиме $\chi_3 = 0$ система уравнений (11) расщепляется. В цилиндрической системе координат уравнение для компоненты поля имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_j + \left(\Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega} + \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}\right)\psi_j = 0.$$

Если компоненту поля искать в виде $\psi_j = \psi_j(r) \times \exp(i\kappa l\varphi + i\beta z)$, то это линейное уравнение принимает стандартную форму уравнения Бесселя

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_j + \left(u^2 - \frac{l^2}{r^2}\right)\psi_j = 0, \qquad (12)$$

где $u^2 = \Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega} + \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2} - \beta^2$, а его решения для направляемых мод поля представим как функции Бесселя

1-го рода $\psi_j(r) = AJ_l(ur)$. Если поле не выходит за пределы волновода с радиусом R_0, то для этого граничного условия находим дисперсионное уравнение $J_l(uR_0) = 0$, корни которого обозначим M_{ln} $(n = 1, 2, \ldots)$. Закон дисперсии $uR_0 = M_{ln}$ запишем, возведя это уравнение в квадрат, в виде

$$\omega^2\varepsilon_1 + \Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{\partial\omega} = c^2M_{ln}^2/R_0^2 + c^2\beta_{ln}^2. \qquad (13)$$

Выбрав решение уравнения (13), удовлетворяющее физическому смыслу $\omega > 0$,

$$\omega_{ln+} = -\frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \Delta\omega\partial\varepsilon_1/\partial\omega} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \Delta\omega\partial\varepsilon_1/\partial\omega}\right)^2 + c^2\beta_{ln}^2 + c^2M_{ln}^2/R_0^2}, \qquad (14)$$

из (14) находим спектр масс поляритонов в волноводе в линейном режиме

$$m_{ln+} = c^{-2}\hbar\left[\left(\omega_{ln+} + \frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \Delta\omega\partial\varepsilon_1/\partial\omega}\right)^2 - c^2\beta_{ln}^2\right]^{1/2}. \qquad (15)$$

При возбуждении поляритонов в волноводе он становится тяжелее. Волновод с массой m_{0W} без поля с полем имеет массу $m_W = m_{0W} + \Sigma m_{ln}$, где суммирование производится по модам поля и числу квазичастиц в моде, определяемому квадратом амплитуды моды. Например, масса одной квазичастицы в кварцевом волокне с радиусом сердцевины $R_0 = 3\,\mu$m при возбуждении излучением с длиной волны в воздухе $\lambda = 0.6328\,\mu$m низшей моды $HE_{11}(M_{11} = 4)$ с постоянной распространения $\beta_{11} \approx 1.45 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}^{-1}$ имеет порядок $m_{11} \sim 5 \cdot 10^{-34}$ g.

В нелинейном режиме, рассматривая поляритоны как возбуждения над вакуумным состоянием $|\psi_y|^2 = \varepsilon_1/4\pi|\chi_3|$, линеаризуем уравнение (11) $(\psi_j = \sqrt{\varepsilon_1/12\pi|\chi_3|} + \eta_j,\ |\psi|^2 = \varepsilon_1/4\pi|\chi_3| + |\eta|^2)$:

$$\nabla^2\eta_j + \Delta\omega\,\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega}\,\eta_j + \Delta\omega\,\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{12\pi|\chi_3|}} = 0.$$

Перенормировав амплитуду поляритона $\overline{\eta}_j = \eta_j + \sqrt{\varepsilon_1/12\pi|\chi_3|}$, получим линеаризованное уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{\eta}_j + b^2\,\overline{\eta}_j = 0, \qquad (16)$$

где $b^2 = \Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{c^2\partial\omega}$. Уравнению (16) удовлетворяет решение $\overline{\eta}_j = AJ_l(ur)\exp(-i\kappa l\varphi + i\beta z)$, где $\overline{u}^2 = b^2 - \beta^2$, $\kappa = \pm 1$. Полагая, что все поле сосредоточено в волноводе $\overline{\eta}_j(\overline{u}R_0) = 0$, из дисперсионного уравнения $J_l = (\overline{u}R_0) = 0$ получим закон дисперсии в виде

$$\Delta\omega\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_1)}{\partial\omega} = c^2M_{ln}^2/R_0^2 + c^2\beta_{ln}^2, \qquad (17)$$

откуда находим спектр частот

$$\omega_{ln+} = -\frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_1/\partial\omega} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_1/\partial\omega}\right)^2 + c^2\beta_{ln}^2 + c^2M_{ln}^2/R_0^2}, \qquad (18)$$

и, подставив (18) в (15), получим спектр масс поляритонов в волноводе в нелинейном режиме. При одинаковом порядке величины дисперсии $\partial\varepsilon_1/\partial\omega$ в среде линейные поляритоны легче нелинейных, что следует из сравнения их частотных спектров (14) и (18).

Как известно, масса частицы определяется энергией связи [11]. В рассмотренных моделях масса поляритона определяется энергией взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрической средой. При этом массивная квазичастица ни в безграничной среде, ни в волноводе не может двигаться со скоростью света в вакууме, что имеет место для рассматриваемых поляритонов. Например, скорость нелинейного поляритона в волноводе

$$v_{ln} = \frac{d\omega_+}{d\beta_{ln}} = \frac{c^2\beta_{ln}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_1/\partial\omega}\right)^2 c^2\beta_{ln}^2 + c^2M_{ln}^2/R_0^2}} < c$$

меньше скорости света в вакууме.

Для немонохроматического поля $\psi_j = \tilde{\psi}_j(\mathbf{r}) \times \exp(-i\Delta\omega t)$, которое нельзя представить как суперпозицию квазиплоских волн, система уравнений (6) приобретает вид

$$\nabla^2\tilde{\psi}_j = -b_1\tilde{\psi}_j - b_2|\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi}_j, \qquad (19)$$

где $b_1 = \varepsilon_1\omega^2/c^2 + \Delta\omega d(\omega^2\varepsilon_1)/c^2 d\omega$, $b_2 = 4\pi\omega^2\chi_3/c^2$. Аналитические решения системы уравнений (19) для векторного поля неизвестны, но решения для скалярного поля в безграничной среде в виде уединенных волн легко найти [9]. Уравнение для скалярного поля, следующее из (19),

$$\left(\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\right)^2 = a_0^2 - \kappa_1|b_1|\tilde{\psi}^2 - \kappa_2\frac{|b_2|}{2}\,\tilde{\psi}^4, \qquad (20)$$

где $\kappa_{1,2} = \pm 1$, $a_0^2 = \left(\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\right)_0^2 + \kappa_1|b_1|\tilde{\psi}_0^2 + \kappa_1\frac{|b_2|}{2}\tilde{\psi}_0^4$, при $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 1$ (спонтанное нарушение симметрии, потенциал $U(\tilde{\psi}) = -|b_1|\tilde{\psi}^2 + \frac{|b_2|}{2}\tilde{\psi}^4$) и граничных условиях $\tilde{\psi}_\infty = 0$, $\left(\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\right)_\infty^2 = 0$, имеет решение в форме топологического солитона

$$\tilde{\psi} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{|b_1|}}{\sqrt{|b_2|}\,\mathrm{ch}\left[\left(\sqrt{|b_1|}\,z\right)\right]}, \qquad (21)$$

а при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = -1$ (потенциал притяжения поляритонов, $U(\tilde{\psi}) = |b_1|\tilde{\psi}^2 - \frac{|b_2|}{2}\tilde{\psi}^4$), $a_0^2 = b_1^2/2|b_2|$, решения в форме кинка (антикинка)

$$\tilde{\psi} = \pm\frac{\sqrt{|b_1|}}{\sqrt{b_2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{|b_1|}}{\sqrt{2}}\,z\right). \qquad (22)$$

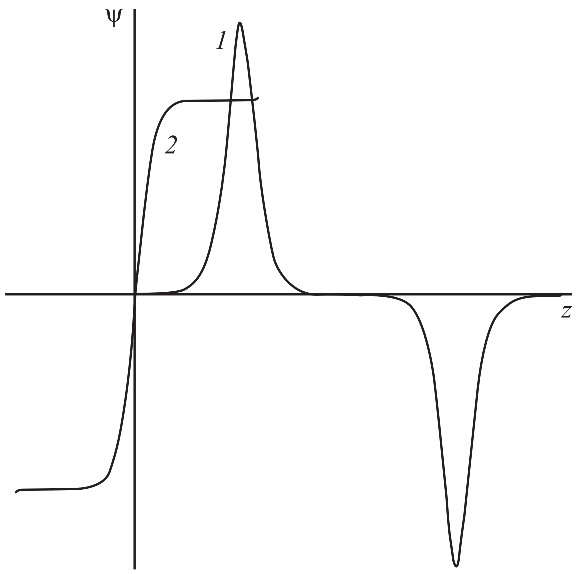

Рис. 3. Скалярное поле: *1* — солитон и антисолитон ($b_1 = -1$, $b_2 = 10^{-6}$, $\psi_0 = \psi_0' = 0$), *2* — кинк ($b_1 = 1$, $b_2 = -10^{-6}$, $\psi_0 = 0$, $\psi_0' = b_1/2\sqrt{|b_2|}$).

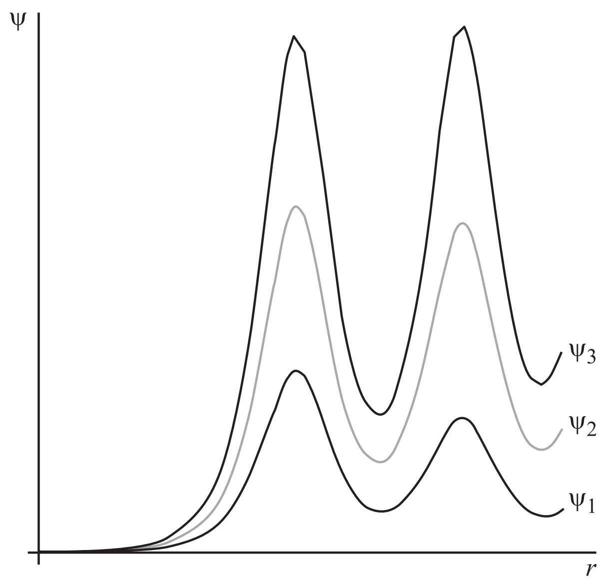

Рис. 4. Векторное поле: трехмерные солитоны ($b_1 = -1$, $b_2 = 10^{-6}$, $\psi_{01} = 0.8$, $\psi_{02} = 1.0$, $\psi_{03} = 1.2$, $\psi_{01}' = \psi_{02}' = \psi_{03}' = 0$).

Поля с конфигурациями (21) и (22) в пространстве $(1+1)$ имеют структуру нелинейных мод $\psi = \tilde{\psi} \times \exp[-i(\Delta\omega + \omega)t]$ [9]. Численные решения уравнения для скалярного поля представлены на рис. 3. При $b_1 = -1$, $b_2 = 10^{-6}$, $\psi_0 = 0$, $(d\psi/dz)_0 = 0$ возникают как солитонные, так и антисолитонные решения. Численные решения системы уравнений (18) для трехмерного векторного поля $(j = 1, 2, 3)$ в случае сферически симметричных квазичастиц $\nabla^2 \to d^2/dr^2 + (2/r)d/dr$ или при цилиндрической симметрии системы $\nabla^2 \to d^2/dr^2 + (1/r)d/dr$ и соответствующей нормировке представлены на рис. 4. В областях значений параметров $b_1 = -1$, $b_2 = 10^{-6}$ и для скалярного (рис. 3), и для векторного (рис. 4) поля в рассматриваемых моделях имеют место многочастичные решения.

Таким образом, нелинейная система „электромагнитное поля–диэлектрическая среда“ имеет сложную топологическую структуру, характеризуемую наличием вырожденных вакуумных состояний. Наличие вырожденных вакуумных состояний свидетельствует о спонтанном нарушении симметрии в системе при соответствующем значении параметра порядка. В такой системе возможно существование электромагнитного поля в форме трехмерных уединенных волн, обладающих свойствами массивных квазичастиц — поляритонов.

Автор благодарит П.Н. Лейфера за обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Клышко Д.Н.* Фотоны и нелинейная оптика. М.: Наука, 1980.
[2] *Давыдов А.С.* Теория твердого тела. М.: Наука, 1976.
[3] *Райдер Л.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.
[4] *Колоколов А.А., Скроцкий Г.В.* // Опт. и спектр. 1973. Т. 35. Вып. 5. С. 898–901.
[5] *Поляков А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. Вып. 6. С. 430–433.
[6] *Боголюбский И.Л.* // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. Вып. 10. С. 579–583.
[7] *Ребби К.* // УФН. 1980. Т. 130. Вып. 2. С. 329–356.
[8] *Киселева Е.С.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 24. С. 16–20.
[9] *Белова Т.И., Кудрявцев А.Е.* // УФН. 1997. Т. 167. № 4. С. 377–406.
[10] *Дзедолик И.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 7. С. 42–47.
[11] *Окунь Л.Б.* // УФН. 1989. Т. 158. Вып. 3. С. 511–530.
[12] *Ривлин Л.А.* // УФН. 1997. Т. 167. № 3. С. 309–322.
[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.