01;10

Нестационарный процесс ускорения в плоском диоде

© А.С. Чихачев

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина,
111250 Москва, Россия
e-mail: churchev@mail.ru

(Поступило в Редакцию 29 ноября 2005 г.)

При помощи модельного решения самосогласованного кинетического уравнения изучается динамика потока электронов в плоском промежутке при переменном ускоряющем потенциале.

PACS: 05.20.Dd, 52.59.Rz

Для описания нестационарных процессов в плазменной электронике и теории ускорителей представляет интерес использование интегралов движения частиц, обобщающих понятие энергии.

В работе [1] изучался процесс формирования сгустков с ненулевым продольным эммитансом. В этой работе использован инвариант Куранта–Снайдера, позволяющий описывать нестационарные системы. В настоящей работе для описания нестационарного ускорения потока электронов в плоском диоде будет использовано обобщение интеграла энергии, отличающееся от инварианта Куранта–Снайдера.

Рассмотрим выражение следующего вида:

$$I = \frac{m}{2}\xi^2(t)\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{m}{2}\left(\xi^2(t)\right)^{\bullet}\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} + V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}\right) + \frac{mr^2}{4}\left(\xi^2(t)\right)^{\bullet\bullet}. \tag{1}$$

Здесь m — масса частицы; $\xi(t)$ — вспомогательная функция времени; $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор и скорость частицы.

Выражение (1) является интегралом движения, если энергия имеет вид

$$H = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{1}{\xi^2(t)}V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}\right),$$

а $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$[\xi^2(t)]^{\bullet\bullet\bullet} \equiv 0.$$

Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\xi^3(t)}\nabla V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}\right),$$

а из уравнения для $\xi(t)$ следует

$$\xi(t) = \sqrt{at^2 + 2bt + c},$$

где a, b, c — постоянные. Выражение (1) может быть преобразовано к виду

$$I = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi}\right)^{\bullet}\right]^2\xi^4 + V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi}\right) + \frac{m\lambda}{2}\frac{r^2}{\xi^2}, \tag{2}$$

где $\lambda = ac - b$. Введение новой переменной τ посредством равенства $\tau = \int \frac{dt'}{\xi^2(t')}$ и $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\xi}$ приводит к

$$I = \frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}\right)^2 + V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{m\lambda}{2}\rho^2. \tag{3}$$

В переменных $\boldsymbol{\rho}, \tau$ I не зависит явно от τ, играющей роль нового времени, и в этих переменных играет роль энергии. Физическая задача в ряде случаев может быть сведена к стационарной, в которой к потенциальной энергии V добавлено слагаемое $\frac{m\lambda}{2}\rho^2$.

Инвариант вида (1) использован в работе [2] для решения квантово-механической задачи о пропагаторе для нестационарного уравнения Шредингера. В этой работе указаны ссылки на [3,4], где, по-видимому, впервые использован интеграл движения (1).

Рассмотрим ансамбль заряженных частиц, интенсивно взаимодействующих с собственным электрическим полем

$$e\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\xi^2}V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi}\right), \tag{4}$$

где e — заряд, Φ — потенциал. Уравнение для Φ

$$\Delta\Phi = 4\pi en, \tag{5}$$

где n — плотность, $\Phi \geq 0$.

Далее будет рассматриваться случай движения частиц в плоском диоде под воздействием зависящего от времени самосогласованного электрического поля.

Частицы покидают плоский катод, расположенный при $z = 0$, с начальной скоростью $\dot{z} = 0$. Поперечные скорости $\dot{x}(t) \equiv 0$, $\dot{y}(t) \equiv 0$. Продольное движение описывается инвариантом следующего вида:

$$I = \frac{m}{2}(\dot{z}\xi - \dot{\xi}z)^2 + V\left(\frac{z}{\xi}\right) + \frac{m\lambda}{2}\frac{z^2}{\xi^2}. \tag{6}$$

При построении самосогласованного решения будем считать, что в системе есть поглощение частиц. Распределение в фазовом пространстве описывается уравнением

$$\frac{df}{dt} = -\nu(t)f,$$

где f — функция распределения, $\nu(t)$ однозначно связана с $\xi(t)$. Для f можно положить

$$f = \chi_0 e^{-\int \nu(t')dt'} \delta(I)\delta(\dot{x})\delta(\dot{y}), \tag{7}$$

где χ_0 — нормировочная константа.

Плотность имеет вид

$$n = \chi_0 e^{-\int \nu(t')dt'} \int d\dot{z}\delta\left(\frac{m}{2}(\dot{z}\xi - \dot{\xi}z)^2 - V_1 + \frac{m\lambda}{2}\frac{z^2}{\xi^2}\right)$$

$$= \frac{\chi_0 e^{-\int \nu(t')dt'}}{\xi\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{V_1 - \frac{m\lambda}{2}\eta^2}}. \tag{8}$$

Здесь $\eta = \frac{z}{\xi(t)}$, $V_1 = -V = \xi^2 e\Phi \geq 0$. Переходя от переменной z к $\eta = \frac{z}{\xi}$, из (5) можно получить

$$\frac{1}{\xi^4}\frac{d^2}{d\eta^2}V_1 = \frac{4\pi e\chi_0 e^{-\int \nu(t')dt'}}{\sqrt{2m}\xi} \frac{1}{\sqrt{V_1 - \frac{m\lambda}{2}\eta^2}}. \tag{9}$$

Если поглощение определяется соотношением $\nu(t) = \frac{3\dot{\xi}}{\xi}$, из (9) следует

$$\frac{d^2 V_1}{d\eta^2} = \frac{\chi_*}{\sqrt{V_1 - \frac{m\lambda}{2}\eta^2}}, \tag{10}$$

где $\chi_* = \frac{4\pi e^2\chi_0}{\sqrt{2m}}$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 0$. При этом $\xi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + \sqrt{c}$. Решение (10) при $V_1\big|_{\eta=0}$, $\frac{dV_1}{d\eta}\big|_{\eta=0}$ имеет вид

$$V_1 = \left(\frac{9\chi_*}{4}\right)^{2/3} \eta^{4/3}.$$

Для потенциала следует

$$e\Phi = \frac{z^{4/3}}{\xi^{10/3}}\left(\frac{9\chi_*}{4}\right)^{2/3}. \tag{11}$$

Для получения рассматриваемого решения при $z = z_1$ должен быть задан потенциал

$$e\Phi\big|_{z=z_1} = U_1(t) = \frac{z_1^{4/3}}{[\xi(t)]^{10/3}}\left(\frac{9\chi_*}{4}\right)^{2/3}. \tag{12}$$

Вычисление плотности тока j_z в соответствии с (7) приводит к следующему:

$$-j_z = e\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}zn + \frac{\chi_0}{m\xi^5}\right)$$

$$= \frac{\dot{\xi}}{\xi}z\frac{e\chi_0}{\sqrt{2m}\xi^4}\frac{1}{\sqrt{V_1 - \frac{m\lambda}{2}\eta^2}} + \frac{e\chi_0}{m\xi^5}. \tag{13}$$

Подстановка в (13) нормировочного множителя $\frac{\dot{\xi}}{\xi}$ из (12) дает

$$j_z\big|_{z=z_1} = -\frac{1}{12\pi e}\frac{\dot{U}_1}{z_1} + \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{9\pi e}\frac{U_1^{3/2}}{z_1^2}. \tag{14}$$

Выражение (14) является обобщением „закона 3/2" для нестационарного случая, т. е. при зависящем от времени потенциале анода. Можно предположить, что уравнение (14) справедливо не только при зависимости $U_1(t)$, определяемой равенством (12), а является выражением более общего закона. Характерно, что при росте $U_1(t)$ ($\dot{U}_1 > 0$) дополнительное слагаемое уменьшает ток, получаемый на выходе из ускоряющего промежутка, тогда при убывании $U_1(t)$ добавочный ток положителен.

Рассмотрим более сложный случай — $\lambda > 0$. Обозначим $V_2 = V_1 - \frac{m\lambda}{2}\eta^2$, тогда из (10) следует

$$V_2'' + m\lambda = \frac{\chi_*}{\sqrt{V_2}}. \tag{15}$$

Если $V_2\big|_{\eta=0} = V_2'\big|_{\eta=0} = 0$, то из (15) получим

$$\eta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m\lambda}}\left\{-\frac{V_2^{1/4}}{2}\sqrt{\frac{2\chi_*}{m\lambda} - V_2^{1/2}} + \frac{\chi_*}{m\lambda}\arcsin\frac{V_2^{1/4}}{\sqrt{\frac{2\chi_*}{m\lambda}}}\right\}. \tag{16}$$

Если величина приложенной разности потенциалов такова, что $V_2 \leq \left(\frac{2\chi_*}{m\lambda}\right)^2$, то (16) вместе с (13) в неявном виде определяет вольт-амперную характеристику.

В случае, если $V_2 > \left(\frac{2\chi_*}{m\lambda}\right)^2$, возможен отрыв частиц от катода, после чего рассматриваемые уравнения оказываются несправедливыми.

В отличие от работы [1], в рассмотренной задаче не изучается распространение „фронта", а изучается динамика потока, заполнившего ускоряющий промежуток. Реальные столкновения, приводящие к уходу электронов из промежутка, могут моделироваться введенным поглощением частиц.

Использование рассмотренного интеграла, по-видимому, будет наиболее плодотворным для изучения динамики частиц, возникающих в нестационарных процессах при ионизации нейтрального газа. Отметим также, что рассмотренная модель может представлять существенный интерес для тестирования численных программ, изучающих процесс формирования потоков заряженных частиц в реальных электродных системах.

Автор благодарен В.И. Манько и В.А. Теплякову за ценные дискуссии, связанные с настоящей работой.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 05-08–1251-а.

Список литературы

[1] *Чихачев А.С.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 94.
[2] *Dodonov V.V. Man'ko V.I., Nikonov D.E.* // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 162. P. 359–364.
[3] *Mestschersky J.* // Astron. Nanchr. 1893. Vol. 132. P. 129.
[4] *Mestschersky J.* // Astron. Nanchr. 1902. Vol. 159. P. 229.