

Расчет тока электронного пучка в вакуумном диоде с кромочным магнитоизолированным катодом

© А.В. Громов, Н.Ф. Ковалев

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: kovalev@appl.sci-nnov.ru

(Поступило в Редакцию 14 марта 2005 г. В окончательной редакции 10 января 2006 г.)

Рассмотрена задача о токе стационарного электронного пучка, получаемого с кромочного катода в коаксиальной двухэлектродной пушке с магнитной изоляцией, когда эмиссионная способность катода считается ограниченной. Рассмотрена возможная форма закона эмиссии с кромочного катода и постановка самосогласованной задачи. Получена структура поля вблизи кромки катода и ее зависимость от тока формируемого электронного пучка.

PACS: 41.75.Fr

В работе [1] было дано решение задачи о токе электронного пучка, получаемого с кромочного катода в коаксиальной диодной пушке с магнитной изоляцией (рис. 1) в случае, когда эмиссионная способность катода не ограничена. Подобно закону „трех вторых“, для плоских диодов [2] эту решенную задачу можно использовать в качестве тестовой при построении численных алгоритмов и приближенных теорий для более сложных электронно-оптических систем с тонкостенными сильнозамагниченными пучками, широко применяемыми, в частности, в приборах релятивистской СВЧ-электроники. В тестовых задачах, несмотря на стремление использовать простейшие модели, особенно актуальны вопросы обоснования принятых идеализаций и исследования возможностей расширения границ их применимости. Очевидно, что от полноты решения этих проблем зависит практическая значимость подобных задач.

В настоящей работе предпринята попытка уточнить смысл принятого в задаче из [1] условия о неограниченной эмиссионной способности кромочного катода. Соответственно рассматривается та же, что и в [1], простейшая модель осесимметричной двухэлектродной пушки с тонкостенным

$$\left(\frac{\Delta}{a_k}\right)^{1/4} \ll 1 \tag{1}$$

катодным стержнем (рис. 1, а). Считаются также выполненными следующие упрощающие условия:

- режим работы стационарный;
- внешнее фокусирующее магнитное поле (\mathbf{H}_0) однородно, направлено вдоль оси z и столь велико, что влиянием поперечных движений электронов можно пренебречь;
- стенки катодного и анодного электродов идеально проводящие;
- на катоде ($r = a_k, z < 0$) задан нулевой потенциал

$$\varphi(r = a_k) = 0, \tag{2}$$

а на аноде $\varphi(r = a) = U$;

— пучок осесимметричный, моноскоростной с нулевыми начальными скоростями электронов у кромки катода

$$V_{z=0} = 0. \tag{3}$$

Используются гауссовы единицы и правые координатные системы. Обозначения основных размеров и направления координатных осей даны на рис. 1, а.

Если, как и в [1], ограничиться вычислением только величины тока электронного пучка (J), то удобно вос-

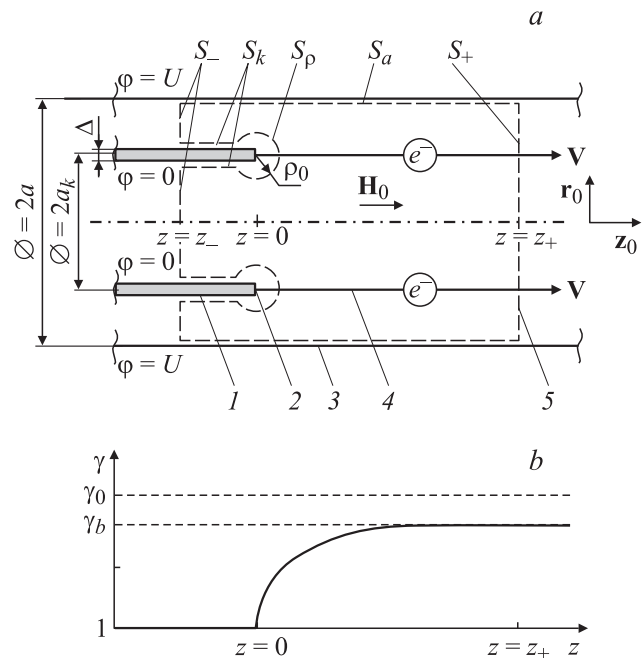


Рис. 1. Осесимметричная двухэлектродная электронная пушка с кромочным магнитоизолированным катодом (а) и зависимость $\gamma = \gamma(z)$ для исследуемого состояния электронного пучка (b); 1 — катодный стержень с малой толщиной стенки (Δ), 2 — эмитирующая кромка катода, 3 — анодная труба, 4 — электронный пучок, 5 — замкнутая поверхность интегрирования уравнения (5).

пользоваться законами сохранения энергии

$$(\gamma - 1)mc^2 = e\varphi \quad (4)$$

и z -й составляющей полного импульса системы

$$\oint_S \left\{ E_z \mathbf{E} + H_z \mathbf{H} - \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \mathbf{z}_0 - 4\pi \frac{q}{e} \gamma m V_z \mathbf{V} \right\} d\mathbf{S} = 0. \quad (5)$$

В формулах (2)–(5) приняты обозначения: $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ и \mathbf{H} — статические электрическое и магнитное поля; φ — электростатический потенциал, удовлетворяющий в областях, свободных от зарядов $r < a_k$ и $a_k < r < a$, уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$; q — объемная плотность зарядов пучка; e и m — заряд и масса электронов; $\mathbf{V} = V\mathbf{z}_0$ — их скорость; $\gamma = (1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2}$ — релятивистский фактор; c — скорость света. Здесь и далее знаки зарядов и их плотностей учитываются явно, т.е. считается, что $e > 0$, $q > 0$, а также $\sigma > 0$, σ — поверхностная плотность зарядов.

Предполагается, что в результате ускорения пучок переходит в однородное ($\partial/\partial z \equiv 0$) состояние при $z \geq z_+ \gg a$, например, показанным на рис. 1, *b* путем. Тогда, применив законы сохранения (4) и (5) к изображенной пунктирной линией на рис. 1, *a* замкнутой поверхности

$$S = S_+ + S_a + S_- + S_k + S_\rho \quad (6)$$

с поперечными сечениями S_+ и S_- , удаленными от кромки катода в области

$$z_+ \gg a, \quad z_- \gg a, \quad (7)$$

где поле \mathbf{E} и состояние пучка можно считать однородными, нетрудно получить систему уравнений

$$I = (\gamma_0 - \gamma_b) \frac{\sqrt{\gamma_b^2 - 1}}{\gamma_b}, \quad (8, a)$$

$$(\gamma_0 - 1)^2 - (\gamma_0 - \gamma_b)^2 - 2I\sqrt{\gamma_b^2 - 1} - D^2 = 0, \quad (8, b)$$

в которой

$$D^2 = -\frac{1}{\pi} \ln(a/a_k) \left(\frac{e}{mc^2} \right)^2 \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \left\{ E_z \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right\} d\mathbf{S} \quad (9)$$

— нормированное предельное значение потока полевого импульса через поверхность S_ρ , $\gamma_0 = 1 + \frac{eU}{mc^2}$, $\gamma_b = 1 + \frac{e\varphi_b}{mc^2}$, φ_b — потенциал сформированного однородного пучка ($z > z_+$); нижним индексом „*b*“ отмечены величины и параметры, относящиеся к сформированному пучку; a — радиус анодной трубы; a_k — радиус катодного стержня, равный радиусу трубчатого тонкостенного пучка,

$$J = 2\pi a_k \sigma V \quad (10)$$

— ток пучка, считающийся положительным ($J > 0$),

$$I = 2 \ln(a/a_k) d \frac{eJ}{mc^3} \quad (11)$$

— его нормированное значение. Ток I , как и собственное магнитное поле \mathbf{H} , не зависит от положения сечения S_+ , т.е. не зависит от z

$$\frac{dI}{dz} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \equiv 0$$

и поэтому ниже будет записываться без индекса „*b*“.

При выводе (8) были учтены граничные условия на пучке

$$\begin{aligned} E_r(r = a_k + 0) &= -4\pi\sigma; \\ E_r(r = a_k - 0) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

применимые в области однородности $z \geq a_+ \gg a$.

Если положить

$$D^2 = 0, \quad (13)$$

то (8) приводит к результату

$$\gamma_b = \gamma_F \equiv \sqrt{2\gamma_0 + 0.25} - 0.5, \quad (14)$$

$$I = I_F \equiv (\gamma_0 - \gamma_F) \frac{\sqrt{\gamma_F^2 - 1}}{\gamma_F}, \quad (15)$$

полученному в работе [1], согласно которому равенство (13) должно быть следствием высоких эмиссионных свойств катода. Ток пучка ограничивается в этом случае полем собственных зарядов. Но в отличие от закона „трех вторых“ для плоских диодов полное самосогласованное поле E_z на эмитирующей кромке ($r = a_k$, $z = 0 + 0$) не обращается в нуль, а имеет особенность

$$E_z = -\frac{1}{\sqrt{3}} A_0 z^{-1/3}, \quad r = a_k, \quad 0 < z \ll a_k, \quad (16)$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{(e/m)^{1/3}} \left(\frac{J_F}{a_k} \right)^{2/3}, \quad (17)$$

т.е. у катода E_z неограниченно велико.

Вывод зависимости (16) основан на выделении первого члена

$$\varphi_1 = A_0 \rho^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right), \quad 0 < \theta < \pi \quad (18)$$

в разложении потенциала (φ) по цилиндрическим гармоникам с дробными индексами в локальной системе координат (ρ, θ), которая представлена на рис. 2.

Потенциал φ_1 равен нулю на поверхности катода ($\theta = 0$) и удовлетворяет граничному условию на пучке ($\theta = \pi$)

$$E_\theta(\theta = \pi - 0) = 2\pi\sigma$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = -\frac{J}{a_k \sqrt{2 \frac{e}{m}} \varphi_1}. \quad (19)$$

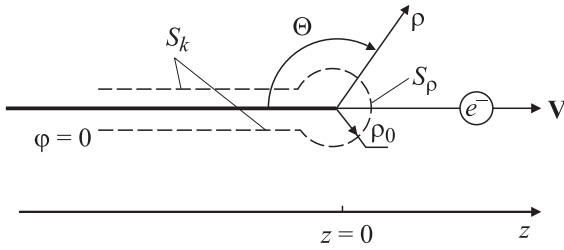


Рис. 2. Локальная двумерная система координат (ρ, θ) , фрагмент поверхности интегрирования для (5) показан пунктиром.

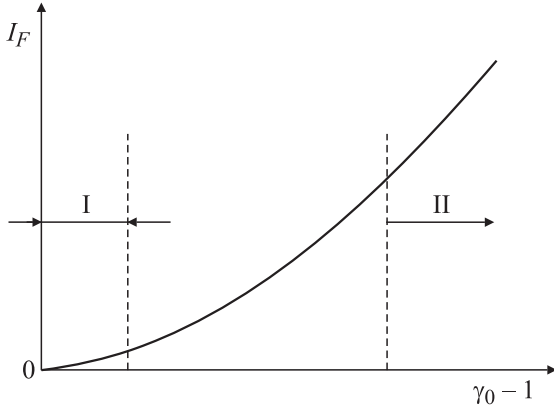


Рис. 3. ВАХ коаксиального диода с кромочным магнитоизолированным катодом в случае, когда его эмиссионная способность неограничена; I — слаборелятивистская, II — ультрарелятивистская области.

В условии (19) учтена симметрия φ_1 , являющаяся следствием локальной ($\rho \ll a_k$) симметрии полного потенциала $\varphi(r - a_k, z) = \varphi(a_k - r, z)$.

На рис. 3 приведена вольт-амперная зависимость $I = I(\gamma_0)$ диодной пушки с высокоэмиссионным кромочным катодом, полученная решением системы (14), (15). В области малых ускоряющих напряжений ($\gamma_0 - 1 \ll 1$) ток определяется законом „трех вторых“

$$I_F = 2 \left(\frac{\gamma_0 - 1}{3} \right)^{3/2}, \quad (20)$$

что является прямым следствием универсальных соотношений подобия, приведенных, например, в [2]. Этими же соотношениями подобия объясняется и зависимость $J \sim A_0^{3/2}$, установленная выше, (17). В ультрарелятивистском пределе ($\gamma_0 \rightarrow \infty$) ток пропорционален напряжению

$$I_F = \gamma_0, \quad \gamma_0 \gg 1, \quad (21)$$

и интегральной характеристикой электронной пушки становится сопротивление

$$R_d \equiv \frac{U}{J} = \frac{2}{c} \ln(a/a_k), \quad (22)$$

принимающее в практической системе единиц очевидный с физической точки зрения вид

$$R_d(\Omega) = 60 \ln(a/a_k).$$

Уместно отметить, что с особенностью поля E_z связано малое время пребывания электронов в прикатодной области ($0 < z \ll a_k$), поскольку их движение начинается с большим (бесконечно большим) ускорением. Очевидно, малым будет и время пребывания электронов в окрестности виртуальных катодов ($z = z_{vc}$), особенности полей в которых имеют такую же степенную зависимость, что и (16):

$$E_z \approx |z - z_{vc}|^{-1/3}.$$

Это обстоятельство существенно влияет на условия возникновения неустойчивостей и динамику процессов в тонкостенных сильнозамагниченных пучках. Под виртуальными катодами здесь, как и принято [2], понимается область пучка с повышенной плотностью зарядов (σ), содержащая точку (z_{vc}) с нулевым потенциалом. Образуются виртуальные катоды в нерегулярных, в том числе и ограниченных по длине, каналах транспортировки пучков.

Если эмиссионные возможности кромочного катода ограничены, то предельный поток полевого импульса (9) не достигает нуля

$$D^2 \neq 0$$

и соответственно в поле E_z возникает другая, более сильная особенность. Для ее определения потенциал у кромки катода удобно представить в виде ряда по цилиндрическим гармоникам с другими степенными показателями

$$\varphi \approx A\rho^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=0}^{n_{\max}} B_n \rho^{\frac{n+3}{4}} \sin\left(\frac{n+3}{4}\theta\right), \quad (23)$$

$$0 < \vartheta < \pi, \quad \rho \ll a_k.$$

По тем же гармоникам (23) нужно разложить и поле в смежной области $\pi < \vartheta < 2\pi$. Если радиус области представления поля (23) выбрать достаточно малым, то амплитуды высших гармоник B_n можно найти из локально симметричного граничного условия типа (19), имеющего сильную особенность в точке $z = 0$, где $\varphi = 0$. Из-за этой особенности ряд (23) получается плохо сходящимся, но им тем не менее можно пользоваться как асимптотическим, если учитывать в нем небольшое число первых членов. Поэтому здесь приводится не общее рекуррентное соотношение, а несколько первых наиболее значимых коэффициентов:

$$B_0 = \frac{4}{3\sqrt{\frac{e}{m}A}} \frac{J}{a_k}, \quad (24,a)$$

$$B_1 = -\frac{1}{3\frac{e}{m}A^2} \left(\frac{J}{a_k}\right)^2, \quad (24,b)$$

$$B_2 = \frac{4}{15\left(\frac{e}{m}\right)^{3/2}A^{7/2}} \left(\frac{J}{a_k}\right)^3. \quad (24,b)$$

Теперь можно получить асимптотическое, например двучленное, приближение для интеграла, входящего в (9)

$$\int_{S_\rho} \left\{ E_z \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \mathbf{z}_0 \right\} dS \approx -\frac{\pi^2}{2} a_k A^2 - \frac{6\pi}{\sqrt{2}} a_k A B_0 \rho_0^{1/4}, \quad (25)$$

из которого, в свою очередь, следует искомое предельное ($\rho_0 = 0$) значение для нормированного потока полевого импульса (9)

$$D^3 = \frac{\pi}{2} a_k \ln(a/a_k) \left(\frac{eA}{mc^2} \right)^2. \quad (26)$$

То же значение (26) принимает и полный поток импульса, переносимый электронами пучка и статическими полями через поверхность S_ρ , причем с любым не слишком большим радиусом ($\rho_0 < \min[a_k, (a - a_k)]$). Независимость потока полного импульса от радиуса ρ_0 выводится непосредственно из закона сохранения (5), но в этом можно убедиться, вычислив в первом приближении поток импульса, переносимый частицами пучка через S_ρ , который в локально симметричном случае равен по величине и противоположен по знаку второму слагаемому в правой части (25), разделенной на 4π .

Полученное соотношение (26) устанавливает зависимость предельного потока импульса D^2 от амплитуды A первого слагаемого в разложении потенциала (23). Этой зависимостью объясняются основные свойства и особенности режимов работы кромочных катодов. Например, величина потока импульса не может принимать отрицательных значений, поскольку мнимые амплитуды A не имеют физического смысла. Но, согласно (8), минимально допустимому значению потока $D^2 = 0$ соответствует максимально возможный ток ($I_{\max} = I_F$) электронного пучка с кромочного катода. Этот режим с максимальным током, очевидно, определяется не свойствами эмиттера, а полем собственного заряда пучка или притяжением электронов зарядами изображения, возникающими на катодном стержне.

Область изменения потока импульса

$$0 \leq D^2 \leq (\gamma_0 - 1)^2 \quad (27)$$

имеет ограничение и сверху, поскольку $I \geq 0$ по определению. Согласно (26), диапазон изменения амплитуды A также ограничен

$$0 \leq A \leq \frac{mc^2}{e} \frac{\gamma_0 - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_k \ln(a/a_k)}. \quad (28)$$

В пределах (28) величина амплитуды основной гармоники поля A определяется током электронного пучка (J), согласно (8) и (26), причем с увеличением тока амплитуда A монотонно убывает, как показано на рис. 4. Если ввести новые переменные

$$I_H = \frac{J}{J_F}, \quad A_H = \frac{D}{\gamma_0 - 1}, \quad (29)$$

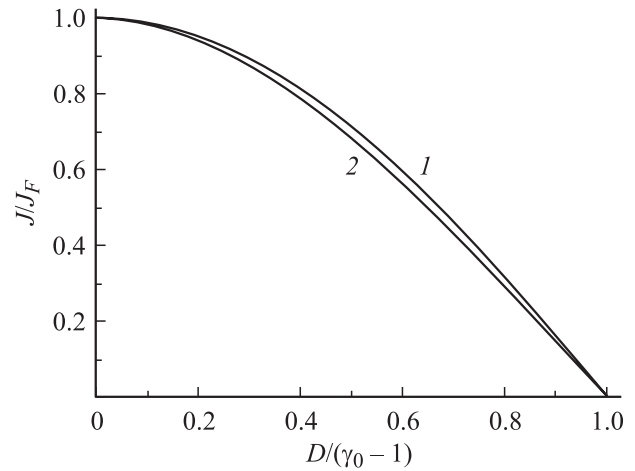


Рис. 4. Зависимость нормированной амплитуды основной гармоники поля A от нормированного тока электронного пучка J для диодной пушки с кромочным катодом; 1 — $\gamma_0 = 2$, 2 — 5.

то оказывается, что функция

$$A_H = A_H(I_H, \gamma_0) \quad (30)$$

слабо зависит от ускоряющего напряжения (γ_0) в области $\gamma_0 > 2$ (рис. 4) и (29) можно рассматривать в качестве приближенных соотношений подобия.

Важной особенностью (30) является

$$\left. \frac{dI_H}{dA_H} \right|_{A_H=0} = 0, \quad (31)$$

т.е. при малых амплитудах ($A_H \ll 1$) ток в первом приближении не зависит от состояния поля у катода, поэтому его можно считать постоянным и равным J_F .

Функциональная зависимость $A = A(J)$ вместе с $B_n = B_n(J, A)$ описывает влияние зарядов пучка на величину и структуру ускоряющего поля в окрестности кромки катода, т.е. характеризует влияние причин, препятствующих увеличению тока (J). Для решения задачи о самосогласованной величине тока электронного пучка требуется еще одна характеристика — зависимость снимаемого с катода тока от состояния поля у эмиттирующей кромки, т.е. нужен закон эмиссии, характеризующий эмиссионные возможности рассматриваемого катода. Если нелокальность учитывать только в первом приближении, то для кромочных катодов удобной формой записи закона эмиссии представляется соотношение

$$J = J(A). \quad (32)$$

При необходимости более корректного учета нелокальных эффектов нужно (32) заменить более общим соотношением, например, в локально симметричном случае

$$J = J(A, B_0). \quad (33)$$

Искомая величина тока электронного пучка с кромочного катода в коаксиальной пушке с магнитной изоляцией находится из совместного решения уравнений (30)

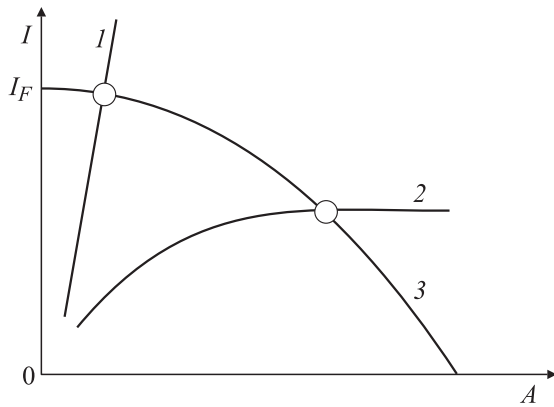


Рис. 5. Графическое решение системы (30), (32); 1 — высокоэмиссионный катод, 2 — низкоэмиссионный катод, 3 — зависимость амплитуды A от тока электронного пучка.

и (32), а в более общем случае из системы

$$J = J(A, B_0, B_1, \dots, B_{n \max}), \quad (34,а)$$

$$J = A(J), \quad B_n = B_n(J, A). \quad (34,б)$$

Как известно [2], для плоских катодов, если пренебречь нелокальными эффектами, эмиссионные зависимости

$$J = J(E_k)$$

(E_k — поле на катоде) вырождаются в ступенчатообразные или близкие к ним функции, и примененный здесь метод решения задачи о самосогласованном токе не имеет заметных преимуществ. В случае же кромочных катодов эмиссионные зависимости (32), по-видимому, более разнообразны и не имеют изломов. Для иллюстрации на рис. 5 приведены два возможных варианта законов эмиссии (32). В первом случае (кривая 1 на рис. 5) эмиссионную способность кромочного катода можно считать высокой, и самосогласованный ток мало отличается от максимального J_F , что является следствием (31). Во втором предельном случае ток электронного пучка определяется эмиссионной способностью катода (кривая 2 на рис. 5). К последнему относится и предельный случай неэмитирующего катода $J \equiv 0$, когда особенности поля соответствует амплитуда

$$A = \frac{U}{\sqrt{\frac{\pi}{2} a_k \ln(a/a_k)}}.$$

Таким образом, по известному закону эмиссии (32) путем решения системы (30), (32) (или более общей (34)) при различных ускоряющих напряжениях (γ_0) можно построить вольт-амперную характеристику электронной пушки, которую, как и в плоских пушках, можно условно разделить на восходящую часть, определяемую полем зарядов пучка (см. рис. 3), и область насыщения, определяемую эмиссионными возможностями катода. С другой стороны, при известной, например из экспериментов, вольт-амперной характеристике

какой-либо пушки и по зависимостям (34, б) нетрудно восстановить эмиссионные кривые (34, а), отражающие индивидуальные свойства катодов, которые остаются неизменными и при использовании этих катодов в других пушках, в том числе и не обладающих азимутальной симметрией.

Имеет смысл отметить, что для восстановления небольшой части кривой в начале координат необходим учет в (34) разброса электронов по скоростям.

Заключение

Вольт-амперная характеристика электронной пушки с высокоэмиссионным сильнозамагниченным кромочным катодом в области малых напряжений ($\gamma_0 - 1 \ll 1$) подчиняется общему закону „трех вторых“. Однако ускоряющее поле на эмитирующей кромке при этом не обращается в нуль, как в плоских диодах, а имеет особенность, т.е. неограниченно велико. Поэтому причиной, препятствующей возрастанию тока электронного пучка, может быть только интегральная характеристика, в качестве которой здесь была выбрана амплитуда первой гармоники A в разложении потенциала (23), поскольку она прямо связана (26) с потоком импульса и соответственно с силой, действующей на эмитирующую кромку. Это обстоятельство существенно изменяет не только свойства пушек с кромочными катодами, но и взаимосвязь их основных параметров и характеристик процессов. Возникла также необходимость в более корректном описании свойств эмитирующих кромок. В статье приведен один из возможных вариантов закона эмиссии. Наверное, это не единственная его форма. Но чтобы определить наиболее удобный его вид, нужны дополнительные исследования, в том числе и нестационарных режимов.

В начале статьи приведено условие (1), при котором толщину стенки катодного стержня можно не учитывать, где учтена только степенная зависимость из соотношения (25). Однако более корректно сравнение с внутренним или естественным масштабом ρ_{\max} , который находится из сопоставления величин амплитуд A и B_0

$$\left(\frac{\Delta}{\rho_{\max}} \right)^{1/4} \ll 1,$$

$$\rho_{\max}^{1/4} = \min \left\{ \frac{A}{B_0} = \frac{3}{4} a_k \frac{\left(\frac{eA}{mc^2} \right)^{3/2}}{\frac{eJ}{mc^3}}, \quad a_k^{1/4}, \quad (a - a_k)^{1/4} \right\}.$$

Естественным масштабом, очевидно, определяется и допустимая проводимость материала катодного стержня. Эти примеры иллюстрируют необходимость продолжения исследований применимости и корректности исходных идеализаций в рассматриваемой тестовой задаче.

В статье часто упоминается ток J_F , впервые полученный в работе [1]. Это не случайно — на наш взгляд, J_F является не только основной характеристикой электронных пушек с кромочными катодами, как отмечается

в [1], но вместе с предельным током

$$I_{\text{lim}} = (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}$$

и током неотражающего симметричного виртуального катода определяет статику и динамику тонкостенных электронных пучков в произвольных каналах транспортировки. Эти величины, очевидно, будут необходимы и для корректной классификации как стационарных, так и нестационарных их состояний.

Список литературы

- [1] Федосов А.И., Литвинов Е.А., Беломытцев С.Я. и др. // Изв. вузов. Физика. 1977. Т. 10. С. 134.
- [2] Гапонов В.И. Электроника. М.: Физматгиз, 1960.