07

Динамика связанных волн в световодах с переменными по длине дисперсионными и нелинейными параметрами

© И.О. Золотовский, Д.И. Семенцов

Ульяновский государственный университет,
432700 Ульяновск, Россия

(Поступило в Редакцию 13 октября 2004 г. В окончательной редакции 8 ноября 2005 г.)

Исследуется динамика двухволнового импульса в световоде с распределенными по длине параметрами дисперсии и нелинейности и реализуемой линейной и кроссмодуляционной межволновой связью. Для различных профилей дисперсии групповых скоростей и нелинейности получены зависимости от продольной координаты длительности и скорости частотной модуляции распространяющегося импульса.

PACS: 42.25.Bs, 42.81.Dp

Введение

Среди проблем нелинейной волоконной оптики, интенсивно обсуждаемых в последнее время, особое место занимает проблема распространения однонаправленных связанных волн. Обычно подобного рода образования наблюдаются в туннельно-связанных световодах [1–3], периодических структурах [4,5], анизотропных средах [6]. Интерес к подобного рода системам обусловлен особыми свойствами световодов, дисперсионные параметры которых имеют сильную зависимость не только от свойств материала самого волокна, но и начальных условий его возбуждения [7,8]. С другой стороны, в системах волоконно-оптической связи широкое применение в последнее время находят световоды с переменными по длине параметрами. Так, реализация конкретного распределения по длине световода хроматической дисперсии позволяет ограничить дисперсионное уширение импульса [9–12]. В работах [13,14] была обнаружена возможность усиления солитонного импульса с сохранением его формы в световоде с определенным образом подобранной продольной неоднородностью инкремента усиления. Следовательно, реализация сильной межволновой связи, как и формирование заданных распределений параметров световода (дисперсии групповых скоростей (ДГС), керровской нелинейности, усиления и т. д.) открывают дополнительные возможности для управления динамикой распространяющегося в световоде излучения. В этой связи представляет интерес рассмотрение возможности совмещения трансформационных свойств как неоднородных световодов, так и световодов с сильной межмодовой связью, т. е. возможности создания и эффективного использования неоднородных туннельно-связанных световодов. В настоящей работе исследуется динамика распространения однонаправленных волн в световоде с сильной линейной и нелинейной (кроссмодуляционной) межволновой связью, а также с зависящими от продольной координаты параметрами линейной связи, хроматической дисперсии и керровской нелинейности.

Общие уравнения

Распространение волнового пакета, формируемого двумя взаимодействующими модами, с учетом зависимости от координаты z, дисперсии групповых скоростей, нелинейности волноведущей среды керровского типа, межмодовой расстройки скоростей, а также дисперсии линейной межмодовой связи описывается следующей системой уравнений для временных огибающих двух $(j = 1, 2)$ взаимодействующих мод [7,8]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{(-1)^j}{v(z)}\frac{\partial A_j}{\partial \tau} - i\frac{d_j(z)}{2}\frac{\partial^2 A_j}{\partial \tau^2} + i(\gamma_{cj}(z)|A_j|^2 + \gamma_{kj}(z)|A_{3-j}|^2)A_j = -i\hat{\sigma}(z)A_{3-j}. \quad (1)$$

Здесь введены время в бегущей системе координат $\tau = t - \int_0^z dz'/u(z')$, групповая скорость волнового пакета $u(z) = 2u_1u_2/(u_1+u_2)$, где $u_j(z) = (\partial\beta_j/\partial\omega)_0^{-1}$ и $d_j(z) = (\partial^2\beta_j/\partial\omega^2)_0$ — групповые скорости и параметры дисперсии групповых скоростей каждой из мод, где соответствующие производные берутся на несущей частоте импульса ω_0: $\beta_j(z)$ — константы распространения, $v^{-1} = (u_1 - u_2)/2u_1u_2$ — расстройка групповых скоростей; γ_{cj} и γ_k — параметры нелинейности, определяющие фазовую самомодуляцию и кроссмодуляцию взаимодействующих мод. Учет дисперсии межволновой связи производится заменой параметра линейной связи $\sigma(z)$ на оператор

$$\hat{\sigma}(z) = \sigma(z)\left(1 - (-1)^j i\mu(z)\frac{\partial}{\partial\tau}\right), \quad (2)$$

где параметр $\mu(z)$ определяется соотношением [15]:

$$\mu(z) \cong \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\sigma(z)}\frac{\partial\sigma(z)}{\partial\omega}. \quad (3)$$

Решение уравнений (1) может быть получено в приближении сильной линейной связи однонаправленных волн, формирующих единый волновой пакет, при которой средняя длина межмодового взаимодействия $L_\sigma = \langle|\sigma|\rangle^{-1}$ для каждой точки световода меньше соответствующих характеристических длин: дисперсионной $L_{dj} = \tau_0^2/\langle|d_j|\rangle$, длины нелинейной фазовой само- и кроссмодуляции $L_{nj} = \langle\gamma_{cj} + \gamma_{kj}\rangle I_0$, межмодового разбегания $L_\omega = \langle v\rangle\tau_0$ и характерной длины неоднородности — l_0. Здесь средние значения параметров на трассе z определяются стандартным образом, например, $\langle v(z)\rangle = \big(\int\limits_0^z v(z')dz'\big)/z$, параметры τ_0 и I_0 — начальные длительность и пиковая интенсивность вводимого в световод излучения. В этом случае временная огибающая соответствующей моды может быть представлена в виде суммы двух парциальных импульсов (ПИ):

$$A_j = (-1)^{j+1} a_1(\tau, z)\exp\left(i\int\limits_0^z|\sigma(z)|dz\right) + a_2(\tau, z)\exp\left(-i\int\limits_0^z|\sigma(z)|dz\right), \qquad (4)$$

где a_f — медленно меняющиеся с координатой z амплитуды ПИ. Для указанных амплитуд справедливы следующие уравнения:

$$\frac{\partial a_f}{\partial z} - \frac{iD_f}{2}\frac{\partial^2 a_f}{\partial\tau^2} + 2\gamma(|a_f|^2 + s|a_{3-f}|^2)a_f = 0, \qquad (5)$$

где $f = 1, 2$, а параметры $4\gamma = \gamma_{c1} + \gamma_{c2} + \gamma_{k1} + \gamma_{k2}$ и $s = (\gamma_{c1} + \gamma_{c2})/2\gamma$. В (5) введена эффективная дисперсия

$$D_f(z) = \frac{d_1 + d_2}{2} + \frac{(-1)^f}{v^2|\sigma|}\big(1 + (v\sigma\mu)^2\big), \qquad (6)$$

определяющая свойства волноведущей среды по отношению к ПИ и включающая материальную и межмодовую (второе слагаемое) дисперсии.

Уравнения (1) должны решаться совместно с начальными условиями для временных огибающих мод $A_j(\tau, z)$, определяемыми условиями возбуждения световода. Общий вид начальных условий задается соотношением $A_2(\tau, 0) = \psi A_1(\tau, 0)$, где параметр ψ определяет тип возбуждения волокна. При $\psi = \pm 1$ имеют место симметричное либо антисимметричное, а при $\psi = 0$ — одномодовое возбуждение световода. Для амплитуд ПИ с учетом (4) начальные условия могут быть записаны в виде $a_f(\tau, 0) = \alpha_{f0}\theta(\tau)$, где для пиковых значений амплитуд ПИ справедливо соотношение

$$a_{f0} = \frac{1}{2}\big[1 + (-1)^f\psi\big]A_{10}, \qquad (7)$$

а временная функция $\theta(\tau)$ определяет форму вводимого в световод волнового пакета.

Линейный случай

Если в процессе распространения волнового пакета по световоду нелинейными эффектами можно пренебречь, система уравнений (5) может быть точно решена при любом профиле $D_f(z)$. Пусть на вход световода подается гауссов частотно-модулированный импульс и для амплитуд составляющих его мод выполняются соотношения $A_f(\tau, 0) = A_{f0}\theta(\tau)$, где

$$\theta(\tau) = \exp\big(-(1 + i\alpha_0\tau_0^2)\tau^2/2\tau_0^2\big). \qquad (8)$$

С учетом (8) для амплитуд ПИ может быть получено точное решение уравнения (5):

$$a_f(z, \tau) = a_{f0}V_f^{-1/2}\exp\left[-\frac{\tau^2}{2V_f^2\tau_0^2} + i\varphi_f\right], \qquad (9)$$

где

$$V_f^2 = (1 - \alpha_0\langle D_f\rangle z)^2 + (\langle D_f\rangle\tau_0^{-2}z)^2,$$

$$2\varphi_f = V_f^{-2}\big[\langle D_f\rangle(\alpha_0^2 + \tau_0^{-4})z - \alpha_0\big]\tau^2 - \operatorname{arctg}\frac{\langle D_f\rangle z}{\tau_0^2(1 - \alpha_0\langle D_f\rangle z)}.$$

Длительность соответствующего ПИ становится минимальной в точке z_f, для которой выполняется условие

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \tau_0^{-4}} = z_f\langle D_f(z_f)\rangle. \qquad (10)$$

В этой точке значение чирпа $\alpha(z_f) = (\partial^2\varphi/\partial\tau^2)_{z_f}$ равно нулю, а длительность ПИ, для которого выполняется условие компрессии, составляет

$$\tau_f = \tau_0/(1 + \alpha_0^2\tau_0^4)^{1/2}. \qquad (11)$$

В случае однородного (по длине световода) параметра ДГС ($D_f = \text{const}$) система (9) имеет решения, которые были подробно проанализированы в работах [7,8].

Отметим, что при симметричном или антисимметричном двухмодовом возбуждении световода, как следует из (7), амплитуда одного из ПИ равна нулю ($a_1 = 0$ при симметричном возбуждении, $a_2 = 0$ при антисимметричном). С практической точки зрения этот тип возбуждения световода можно считать наиболее важным, поскольку именно он позволяет успешно использовать управляемость эффективных дисперсионных параметров.

Нелинейный случай

В [10] было показано, что в неоднородных по длине волноведущих системах без усиления (и затухания) динамика волновых пакетов может быть корректно описана на основе вариационного подхода, согласно которому динамика импульсов анализируется на основе системы уравнений Лагранжа, для пробных функций, определяющих характеристики импульса и отвечающих исследуемой системе уравнений (5) [16]. Следуя этой методике, для построения лагранжиана в качестве пробных выберем функции, описывающие наиболее часто встречающиеся на практике импульсы — гауссовой и секанс-гиперболической формы соответственно

$$a_f(z,\tau) = C_f \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\tau_I^2} + i\frac{\alpha\tau^2}{2} + i\varphi_f\right), \qquad (12\text{а})$$

$$a_f(z,\tau) = C_f \operatorname{sech}(\tau/\tau_I)\exp\big(i(\varphi_f + \alpha\tau^2)\big). \qquad (12\text{б})$$

Роль варьируемых параметров здесь выполняют действительные амплитуды $C_f(z)$, фазы $\varphi_f(z)$, длительность $\tau_I(z)$ и скорость частотной модуляции (чирп) $\alpha(z)$ ПИ. Отметим, что в рассматриваемом случае отсутствия разбегания ПИ длительности и чирпы обоих ПИ должны быть равными и описываться следующей замкнутой системой уравнений:

$$C_f^2\tau_I = \text{const}, \qquad (13\text{а})$$

$$\frac{\partial\tau_I}{\partial z} = k_1 D_{\text{eff}}(z)\alpha\tau_I, \qquad (13\text{б})$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = k_2 D_{\text{eff}}(z)\tau_I^{-4} - k_3 D_{\text{eff}}(z)\alpha^2 + k_4 R_{\text{eff}}(z)(W_1+W_2)\tau_I^{-3}, \qquad (13\text{в})$$

где энергия ПИ $W_f = |a_{f0}|^2\tau_0 = |C_f|^2\tau_I \equiv \text{const}$. Для импульсов гауссовой формы $k_{1,2,3} = 1$, $k_4 = 1/\sqrt{2}$, а для импульсов секанс-гиперболической формы $k_{1,3} = 2$, $k_{2,4} = 2/\pi^2$. Входящие в (13) эффективные параметры определяются соотношениями

$$D_{\text{eff}}(z) = \frac{W_1D_1 + W_2D_2}{W_1+W_2} = \frac{d_1+d_2}{2} + \frac{2\psi}{1+\psi^2}\frac{1+(\mu\sigma v)^2}{v^2|\sigma|},$$

$$R_{\text{eff}}(z) = 2\gamma\frac{W_1^2+W_2^2+2sW_1W_2}{(W_1+W_2)^2} = 2\gamma + \frac{\gamma_{c1}+\gamma_{c2}-\gamma_{k1}-\gamma_{k2}}{4}\left(\frac{1-\psi^2}{1+\psi^2}\right)^2. \qquad (14)$$

Пусть выражения для эффективных параметров дисперсии и нелинейности можно представить следующим образом: $D_{\text{eff}} \equiv d(z)D_0$, $R_{\text{eff}} \equiv r(z)R_0$, где величины D_0 и R_0 не зависят от z. В этом случае как для импульсов гауссовой, так и секанс-гиперболической формы можно получить следующее уравнение, определяющее длительность рассматриваемого волнового пакета

$$\frac{\partial^2\tau_I}{\partial\xi^2} = k_1k_2D_0^2\tau_I^{-3} + k_1k_4R_0\big(r(\xi)/d(\xi)\big)(W_1+W_2)D_0\tau_I^{-2}, \qquad (15)$$

где $\xi = \int\limits_0^z s(z')dz'$. В общем случае система уравнений (13), как и следующее из нее уравнение для длительности импульса (15), должны решаться численным методами с учетом конкретных зависимостей $d(z)$ и $r(z)$. Однако для целого ряда практически важных случаев можно найти точные решения. Более того, из общего вида уравнения (15) следует, что, меняя значения параметров $d(z)$ и $r(z)$, можно эффективно управлять длительностью и, как следствие, интенсивностью распространяющихся импульсов.

Частные решения и их анализ

Рассмотрим подробнее некоторые наиболее показательные частные случаи, позволяющие найти точные решения системы (13). Так, в случае, когда $d(z) \equiv r(z)$ эта система уравнений позволяет для длительности импульса записать следующее уравнение:

$$\left(\frac{d\tau_I}{d\xi}\right)^2 + U(\tau_I) = U_0, \qquad (16)$$

$$U(\tau_I) = \lambda_4D_0^2\tau_I^{-2} + \lambda_5R_0(W_1+W_2)D_0\tau_I^{-1},$$

$$U_0 = \big(\lambda_1D_0\tau_0\alpha(0)\big)^2 + \lambda_2D_0^2\tau_0^{-2} + \lambda_3R_0(W_1+W_2)D_0\tau_0^{-1},$$

где для импульсов гауссовой формы параметры $\lambda_{1,2,4} = 1$, $\lambda_{3,5} = \sqrt{2}$, а для импульсов секанс-гиперболической формы $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,5} = 8/\pi^2$, $\lambda_{3,4} = 4/\pi^2$. Уравнение (16) можно рассматривать как уравнение движения частицы в потенциальном поле $U(\tau_I)$, возникающее, например, в задаче Кеплера [17]. Так, при $U_0 > 0$ решение уравнения (16) соответствует в динамике частицы ее инфинитному движению в потенциальном поле, что для импульса означает его временное уширение. Из условия $U_0 = 0$ можно определить энергию импульса $W_0 = W_1 + W_2$, превышение которой приводит к формированию солитоноподобного импульса. При $U_0 < 0$ решение уравнения (16) описывает финитное движение, которое можно трактовать как квазисолитонный режим распространения излучения, при котором длительность импульса $\tau_I(z)$ периодически меняется около значения, соответствующего минимуму функции $U(\tau_I)$ и определяемого выражением $\tau_S = 2\lambda_4D_0/\lambda_5R_0(W_1+W_2)$.

Некоторые точные решения системы (13) можно получить и в том случае, когда $d(z) \neq r(z)$. Рассмотрим некоторые из них.

1. Профиль дисперсии групповых скоростей на длине световода определяется зависимостью

$$D_{\text{eff}}(z) = D_0\exp(-nz), \qquad (17)$$

где дисперсия $D_0 < 0$, а нелинейность $R_{\text{eff}} = R_0$. Если на вход световода подается частотно-модулированный импульс с начальной длительностью $\tau_0 = -k_2D_0/k_4R_0(W_1+W_2)$ и скоростью частотной модуляции $\alpha_0 = -\eta/k_1D_0$, для текущего значения длительности и чирпа импульса верны следующие соотношения:

$$\tau_I = \tau_0\exp(-\eta z), \quad \alpha = \alpha_0\exp(\eta z). \qquad (18)$$

Эффективное управление профилем (зависимостью от z) ДГС становится возможным в современных фотонно-кристаллических (ФК) световодах [18,19] и световодах с изменяемым профилем поперечного сечения [20,21]. В „дырчатых“ ФК-световодах и световодах с изменяемым радиусом сердцевины технологически несложно на заданной длине реализовать распределение [17]. Пусть в этом случае входные значения параметров нелинейности и ДГС составляют $R_0(I_{10} + I_{20}) \cong 0.01\,\mathrm{m}^{-1}$ и $D_0 \cong -10^{-26}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}$, а длительность вводимых в световод импульсов гауссовой и секанс-гиперболической формы $\tau_0 \cong 10^{-12}\,\mathrm{s}$. Если параметр неоднородности дисперсии $\eta \cong 0.4\,\mathrm{m}^{-1}$, то, согласно (18), на длине световода $L \cong 10\,\mathrm{m}$ импульс может быть сжат до длительности $\tau_I(L) \cong 2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}$. При этом чирп должен иметь значение порядка $\alpha \cong 2 \cdot 10^{28}\,\mathrm{s}^{-2}$.

Если после описанного временного сжатия „погасить“ чирп сформированного импульса (при последующем его введении в линейный световод с нормальной и постоянной по длине ДГС, например, в одномодовом ФК-световоде с большим диаметром сердцевины [22]), то длительность импульса можно довести до значений нескольких фемтосекунд, сделав его при этом спектрально ограниченным.

Некоторые из рассматриваемых далее случаев неоднородности световода являются достаточно искусственными, однако они приводятся для демонстрации уникальных возможностей рассматриваемых систем. Наряду с этим возможность получения аналитического решения уравнений (1) для конкретной неоднородности световода представляет интерес для более глубокого понимания особенностей динамики излучения в подобного рода структурах. Тем более что реализация ситуаций, указанных ниже, при современном состоянии технологии изготовления световодов не должна представлять, на наш взгляд, неразрешимых проблем.

2. Профиль нелинейности на длине световода дается выражением $R = R_0/(1 - \eta z)$, а ДГС полагается одинаковой на всей длине световода т. е. $D = D_0$. Если на вход световода подается импульс с теми же параметрами, что и в предыдущем случае, то для текущего значения длительности и чирпа имеем следующие соотношения:

$$\tau_I = \tau_0(1 - \eta z), \quad \alpha = \alpha_0/(1 - \eta z). \tag{19}$$

Подобная ситуация на практике может быть востребована в случае необходимости реализации уширения импульса на малых длинах световода.

3. Профиль нелинейности задан суперпозицией двух функций:

$$R_{\mathrm{eff}}(z) = C_1 \exp(-3\eta z) + C_2 \exp(\eta z), \tag{20}$$

а $D_{\mathrm{eff}} = D_0$. Константы C, связанные с начальными значениями параметров импульса и световода, определяются соотношениями

$$C_1 = \eta^2 \tau_0^3 / k_1 k_2 R_0 (W_1 + W_2) D_0,$$
$$C_2 = -k_2 D_0 / k_4 R_0 (W_1 + W_2) \tau_0.$$

Если на вход световода подается частотно-модулированный импульс с длительностью $\tau_0^2 > \sqrt{k_1 k_2} D_0/\eta$ (при $D_0 > 0$) и чирпом $\alpha_0 = -\eta/k_1 D_0$, то длительность получаемого при этом солитоноподобного импульса меняется в точном соответствии с формулой (19). Минимальная длительность импульса, которая при использовании рассматриваемой схемы сжатия может быть получена на длине световода $z_m = \frac{1}{2\eta} \ln(\tau_0^4 \eta^2 / k_1 k_2 D_0^2)$, составляет $\tau_{\min} = (\sqrt{k_1 k_2} D_0/\eta)^{1/2}$. При этом случаю $\tau_I = \tau_{\min}$ соответствует текущая нелинейность $R(z_m) = 0$. Значение чирпа остается неизменным на всем пути следования импульса, т. е. $\alpha = \alpha_0$. Заданный функцией (20) профиль нелинейности может быть практически реализован только на длине световода $L < z_m$, поскольку параметр $R(z)$ не может принимать отрицательных значений. В случае $\tau_0^2 < \sqrt{k_1 k_2} |D_0/\eta|$ для рассматриваемого профиля нелинейности решение типа $\tau_I = \tau_0 \exp(-\eta z)$ реализуется при $D_0 < 0$. При этом сжатие может быть сколь угодно большим при условии, что $R(z)$ неограниченно возрастает. Данный пример представляет интерес, поскольку демонстрирует принципиальную возможность солитоноподобного сжатия при $D_0 > 0$ и при уменьшающемся $R(z)$. В данном случае сжатие реализуется за счет начального чирпа вводимого в световод излучения, а нелинейность уменьшает степень и увеличивает длину сжатия.

4. Профиль неоднородности среды по длине световода задан так, что

$$r(z)/d(z) = C_1 \exp(-3\eta\xi) + C_2 \exp(\eta\xi), \tag{21}$$

причем константы C_1 вводятся так же, как и в предыдущем случае. Если на вход световода подается частотно-модулированный импульс с начальным значением чирпа $\alpha_0 = -\eta/k_1 d(0) D_0$, то получаем импульс, длительность которого $\tau_I = \tau_0 \exp(-\eta\xi)$ уменьшается на всем пути следования до тех пор, пока выполняется условие (21). Если $\tau_0^2 > \sqrt{k_1 k_2} |D_0/\eta|$, компрессия начинается в области с нормальной эффективной дисперсией световода и, минуя точку со значением $\xi_m = \frac{1}{2\eta} \ln(\tau_0^4 \eta^2 / k_1 k_2 D_0^2)$, „уходит“ в область с противоположным значением эффективной дисперсии световода ($D_{\mathrm{eff}} < 0$) в области $z > \xi_m$. При этом можно добиться выполнения условия $\tau_I \to 0$ за счет $d(\xi) \to 0$ (т. е. $D_{\mathrm{eff}} \to 0$), хотя в этом случае в уравнение (1) необходимо дополнительно ввести дисперсионные параметры выше второго порядка.

Заключение

Проведенный анализ указывает на возможность практического использования световодов с продольной неоднородностью нелинейности, дисперсии групповых скоростей и сильным межволновым взаимодействием. В настоящее время имеются достаточные технологические возможности реализации соответствующих профилей дисперсионных и нелинейных параметров и достижения определенных функциональных зависимостей длительности импульса $\tau_I \equiv \tau_I(z)$ и скорости частотной модуляции $\alpha \equiv \alpha(z)$. В результате можно говорить о возможности эффективного управления параметрами солитоноподобных импульсов. В работе созданы теоретические предпосылки для создания на основе рассмотренных структур принципиально новых систем управления лазерным излучением.

Список литературы

[1] *Майер А.А.* // Квант. электрон. 1984. Т. 11. № 2. С. 157–161.
[2] *Абдуллаев Ф.Х., Абрамов Р.М., Гончаров В.И., Дарманян С.А.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 101–109.
[3] *Майер А.А.* // УФН. 1995. Т.165. № 9. С. 1037–1075.
[4] *Васильев С.А., Дианов Е.М., Курков А.С., Медведков О.И., Протопопов В.Н.* // Квант. электрон. 1997. Т. 24. № 10. С. 151–154.
[5] *Васильев С.А., Дианов Е.М., Стародубов Д.С., Фролов А.А., Медведков О.И.* // Квант. электрон. 1997. Т. 24. № 10. С. 160–162.
[6] *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
[7] *Золотовский И.О., Семенцов Д.И.* // Опт. и спектр. 1999. Т. 86. № 5. С. 737–739.
[8] *Золотовский И.О., Семенцов Д.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 9. С. 84–90.
[9] *Knox F.M., Doran N.J., Blow K.J.* et al. // Electron. Lett. 1996. Vol. 32. P. 54–55.
[10] *Габитов И., Турицын С.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 10. С. 814–819.
[11] *Абдуллаев Ф.Х., Навотный Д.В.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 39–44.
[12] *Насиева И.О., Федорук М.П.* // Квант. электрон. 2003. Т. 33. № 10. С. 908–912.
[13] *Moores J.D.* // Opt. Lett. 1996. Vol. 21. N 2. P. 555–559.
[14] *Серкин В.Н., Беляева Т.Л.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. № 12. С. 649–654.
[15] *Майер А.А., Каратаев С.Г.* // Квант. электрон. 1996. Т. 23. № 1. С. 43–46.
[16] *Anderson D.* // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 27. P. 3135–3141.
[17] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.
[18] *Желтиков А.М.* // УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 73–105.
[19] *Желтиков А.М.* // УФН. 2004. Т. 174. № 12. С. 1301–1318.
[20] *Lenz G., Eggleton B.J.* // JOS. A. B. 1998. Vol. 15. N 10. P. 2979–2988.
[21] *Ахметшин У.Г., Богатырев В.А., Сенаторов А.К., Сысолятин А.А., Шалыгин М.Г.* // Квант. электрон. 2003. Т. 33. № 3. С. 265–267.
[22] *Желтиков А.М.* // УФН. 2000. Т. 170. № 11. С. 1203–1215.