

01;07

Обобщенный вывод уравнений для четырехволнового взаимодействия в фоторефрактивных средах

© В.Ю. Петрунькин,¹ И.В. Мурашко,¹ Е.В. Мокрушина²

¹ Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: evmo@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 28 декабря 2005 г.)

Формирование световых волн в фоторефрактивной среде из оптического шума (фенинга) рассмотрено нетрадиционным способом, с применением леммы Лоренца и процедуры усреднения по ансамблю. Приведен подробный вывод уравнений, описывающих четырехволновое взаимодействие по схеме двойного некогерентного обращающего зеркала. На основании полученной системы проведены компьютерные расчеты, что позволило численно исследовать влияние уровня шумов на пороговые условия генерации, а также обнаружить эффект „верхнего порога“ для сильношумящих материалов без насыщения.

PACS: 03.65.Ge

Введение

Динамика записи и стирания решеток показателя преломления, связанных с четырехволновым взаимодействием световых пучков в фоторефрактивных материалах, является одним из самых сложных вопросов в теории фоторефрактивного кристалла (ФРК). Известны разные подходы к решению этой проблемы: в частности, динамика обращения волнового фронта в схемах двойного обращающего зеркала (DPCM) и полулинейного генератора рассматривалась в работах [1–4].

В статьях [3–4] для описания динамики процесса использовалась система усредненных по ансамблю уравнений, связывающих средние амплитуды световых пучков с корреляционными параметрами, отражающими степень согласования вариаций показателя преломления среды со световыми полями.

В настоящей работе приводится подробный вывод этих уравнений для случая DPCM-геометрии, а также некоторых вариантов численного решения системы, позволяющие получить зависимости амплитуды обращенной волны от времени при разных условиях.

Постановка задачи

Общая схема двойного обращающего зеркала приведена на рис. 1, *a*. На фоторефрактивную среду, обладающую голографическим усилением, слева и справа падают две волны E_1 и E_2 , не когерентные между собой. В результате взаимодействия этих волн со средой из голографического шума (фенинга) формируются две волны, фазово-сопряженные исходным, т.е. из усиленных беспорядочных вариаций показателя преломления выделяется и усиливается особая решетка. Дифрагируя по ней, световое поле E_1 образует волну, фазового сопряженную E_2 , и наоборот.

Так как исходные волны взаимно некогерентны, взаимодействие их с фоторефрактивной средой можно рассматривать независимо. Предположим, что их волновые фронты имеют сложную структуру, а направления распространения характеризуются усредненными волновыми векторами k_1 и k_2 . Представим в среде поле волны,

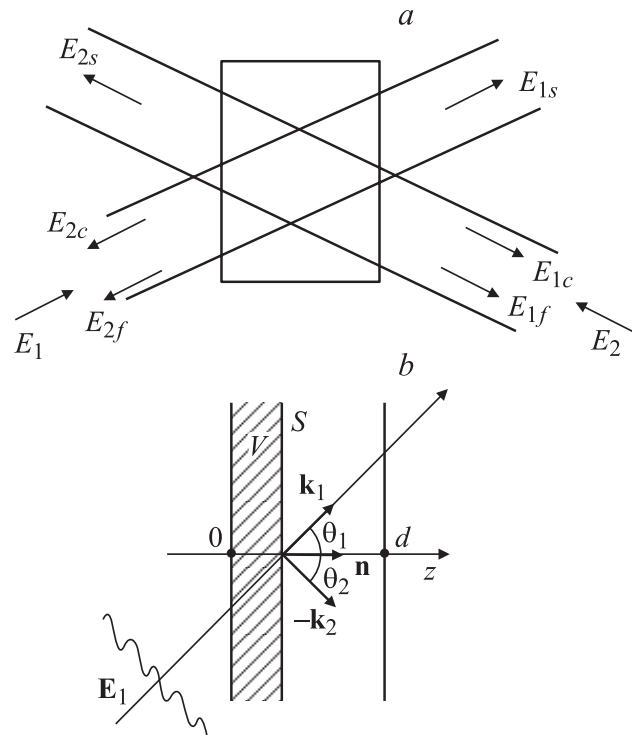


Рис. 1. *a* — схема двойного обращающего зеркала с компонентами исходных волн; *b* — поверхность S и объем V , по которым производится интегрирование полей волны, падающей слева.

падающей слева, как сумму трех компонент (рис. 1):

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}_{1c} + \mathbf{E}_{1f}, \quad (1)$$

где \mathbf{E}_{1s} — прямая волна, имеющая структуру волны, падающей на кристалл слева; \mathbf{E}_{1c} — обращенная волна, фазово-сопряженная по отношению к волне, падающей на кристалл справа. Через \mathbf{E}_{1f} обозначено рассеянное световое поле, вызванное случайными неоднородностями показателя преломления.

Запишем компоненты волны \mathbf{E}_1 в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{1s} = A_{1s}(z, t) \mathbf{e}_1(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r})},$$

$$\mathbf{E}_{1c} = A_{1c}(z, t) \mathbf{e}_2^*(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}; \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_{1f} = A_{1f}(z, t) \mathbf{e}_{1f}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$ — пространственное распределение поля невозмущенной волны, падающей слева; $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$ — пространственное распределение поля невозмущенной волны, падающей справа; $\mathbf{e}_{1f}(\mathbf{r}, t)$ — пространственно-временное распределение случайно рассеянного поля; величины $A_{1s, 1c, 1f}$ — медленно меняющиеся амплитуды соответствующих световых полей.

Соотношения, описывающие компоненты поля \mathbf{E}_2 , можно записать по аналогии

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2s} + \mathbf{E}_{2c} + \mathbf{E}_{2f}; \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_{2s} = A_{2s}(z, t) \mathbf{e}_2(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})},$$

$$\mathbf{E}_{2c} = A_{2c}(z, t) \mathbf{e}_1^*(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}; \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_{2f} = A_{2f}(z, t) \mathbf{e}_{2f}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r})}. \quad (6)$$

Равенства (3) и (6) предполагают, что волна \mathbf{E}_1 в среде в основном рассеивается в направлении, противоположном волновому вектору \mathbf{k}_2 , а \mathbf{E}_2 — в направлении, противоположном вектору \mathbf{k}_1 . В действительности максимум рассеянной волны должен лежать в области максимального усиления, а работа схемы наиболее эффективна при совпадении направлений максимального усиления с векторами $-\mathbf{k}_1$ и $-\mathbf{k}_2$. Однако следует отметить, что выражения (3) и (6) верны только для сред с узконаправленным усилением, таких как, например, кристаллы со структурой силленита во внешнем переменном поле [5].

Введем условия нормировки для функций распределения $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_{1f, 2f}(\mathbf{r})$:

$$\int_S (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^*) ds = 1, \quad \int_S (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^*) ds = 1; \quad (7)$$

$$\left\langle \int_S (\mathbf{e}_{1f} \mathbf{e}_{1f}^*) ds \right\rangle = 1, \quad \left\langle \int_S (\mathbf{e}_{2f} \mathbf{e}_{2f}^*) ds \right\rangle = 1; \quad (8)$$

$$\langle e_{1f} \rangle = 0, \quad \langle e_{2f} \rangle = 0, \quad (9)$$

где S — любое поперечное сечение среды, а $\langle \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю реализаций, образованному случайными распределениями вариаций показателя преломления.

В результате взаимодействия света с фоторефрактивной средой в ней возникает решетка показателя преломления, которую можно рассматривать как возмущение диэлектрической проницаемости $\Delta \epsilon$. В общем случае решетка имеет сложную форму, но, учитывая узконаправленное усиление среды, мы можем записать ее в виде

$$\Delta \epsilon = \epsilon_m(\mathbf{r}, t) e^{i(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r})} + \epsilon_m^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r})}, \quad (10)$$

где ϵ_m — комплексная амплитуда решетки, а волновой вектор $\boldsymbol{\kappa}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \boldsymbol{\kappa} = 0. \quad (11)$$

1. Вывод основных уравнений

Система, полученная в этом разделе, состоит из двух частей: одни уравнения выводятся из общих законов электродинамики, другие — из соотношений, описывающих взаимодействие света с фоторефрактивной средой. Предполагается, что исходное распределение показателя преломления в среде является случайной функцией, поэтому в уравнения входят усредненные по ансамблю значения шумовых составляющих.

1.1. Уравнения, полученные на основе леммы Лоренца

Лемма Лоренца, следующая непосредственно из уравнений Максвелла, связывает в некотором объеме V комплексные амплитуды двух независимых гармонических полей одной частоты. Вообще говоря, лемма Лоренца справедлива для стационарных гармонических полей, а в нашем случае амплитуды полей медленно меняются во времени. Но так как характерное время изменения амплитуд (медленное время) на много порядков больше периода колебаний, мы можем рассматривать его как параметр (т.е. считать поля квазистационарными).

Лемма Лоренца дает (см., например, [6]):

$$\frac{4\pi}{c} \int_V \{(\mathbf{j}_\alpha \mathbf{E}_\beta) - (\mathbf{j}_\beta \mathbf{E}_\alpha)\} dv = \int_{S'} ds \{[\mathbf{H}_\alpha \mathbf{E}_\beta]_n - [\mathbf{H}_\beta \mathbf{E}_\alpha]_n\}. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{E}_{\alpha, \beta}$ и $\mathbf{H}_{\alpha, \beta}$ — соответственно электрические и магнитные компоненты полей α и β , $\mathbf{j}_{\alpha, \beta}$ — токи в объеме V , соответственно являющиеся источниками полей α и β , S' — поверхность, ограничивающая этот объем, n — нормаль к этой поверхности. В качестве токов, возбуждающих поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , введем величины, эквивалентные возмущению диэлектрической проницаемости, вызванному фоторефрактивной решеткой

$$\mathbf{j}_1 = i \mathbf{E}_1 \Delta \epsilon \frac{\omega}{4\pi}, \quad (13)$$

для полей волны, падающей слева, и

$$\mathbf{j}_2 = i \mathbf{E}_2 \Delta \epsilon \frac{\omega}{4\pi}, \quad (14)$$

для полей волны, падающей справа. Будем считать, что все волны являются квазиплоскими, так что их

электрические и магнитные компоненты удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \mathbf{E} \right]. \quad (15)$$

Подставив вместо \mathbf{E}_α в (12) \mathbf{E}_1 или \mathbf{E}_2 в виде разложений (1)–(6), можно последовательно получить уравнения для всех шести медленно меняющихся амплитуд.

Для нахождения полей волны \mathbf{E}_1 в качестве объема интегрирования будем использовать область, лежащую слева от поперечного сечения S (рис. 1, *b*). Поверхность интегрирования кроме плоскости S включает некоторую замыкающую поверхность слева от S , лежащую вне области пересечения световых волн, так что поверхностный интеграл сводится к интегралу по S . В качестве вспомогательного поля β , не имеющего возбуждающих токов внутри объема интегрирования, будем использовать поля единичной амплитуды, фазово-сопряженные искомым. Например, для нахождения амплитуды A_{1c} примем $\mathbf{E}_\beta = \mathbf{e}_2 e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$, $\mathbf{j}_\beta = 0$. Тогда, с учетом (15), подынтегральное выражение в правой части (12) запишется в виде

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{H}_1 \mathbf{e}_2] - [\mathbf{h}_2 \mathbf{E}_1]_n) e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})} = A_{1s} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\left[\left[\frac{\mathbf{k}_1}{k_1} \mathbf{e}_1 \right] \mathbf{e}_2 \right]_n \right. \\ & \left. + \left[\left[\frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \mathbf{e}_2 \right] \mathbf{e}_1 \right]_n \right) e^{-i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \mathbf{r}} \\ & + A_{1c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\left[\left[\frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \mathbf{e}_2^* \right] \mathbf{e}_2 \right] + \left[\left[\frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \mathbf{e}_2 \right] \mathbf{e}_2^* \right] \right) \\ & + A_{1f} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\left[\left[\frac{\mathbf{k}_1}{k_1} \mathbf{e}_{1f} \right] \mathbf{e}_2 \right] + \left[\left[\frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \mathbf{e}_2 \right] \mathbf{e}_{1f} \right] \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (16) не дает вклада в интеграл из-за быстрых осцилляций по оси x . Третье слагаемое превратится в нуль при усреднении по ансамблю вследствие принятых условий нормировки (9). Так что в этом случае интеграл по S сведется к

$$-2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S A_{1c} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^*) ds = -2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1c}. \quad (17)$$

Для вычисления объемного интеграла используем выражение для эквивалентных токов (13). Учитывая равенство (11), исключим из подынтегрального выражения все осциллирующие члены и в результате получим

$$\frac{4\pi}{c} \frac{i\omega}{4\pi} \int_0^z dz' \int_S ds \Delta \varepsilon (\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_2) e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})} = \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz', \quad (18)$$

где

$$M = \int_S \varepsilon_m^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) ds.$$

В выражении (18) z обозначает координату плоскости S , а z' — текущую координату.

Подставив (17) и (18) в (12) и проинтегрировав по z , получим одно из искомым уравнений

$$\frac{\partial A_{1c}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M. \quad (19)$$

Чтобы найти уравнение для A_{1s} , примем $\mathbf{E}_\beta = \mathbf{e}_1^* e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r})}$. Действуя аналогично (16)–(19), в этом случае можно получить

$$\frac{\partial A_{1s}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \{A_{1c} M^* + A_{1f} M_{1f}^*\}, \quad (20)$$

где

$$M_{1f} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\mathbf{e}_{1f}^* \mathbf{e}_1) ds \right\rangle.$$

Заметим, что усредненный по ансамблю интеграл M_{1f} заведомо не равен нулю, так как амплитуда решетки ε_m должна содержать компоненты, коррелирующие со всеми (в том числе и шумовыми) составляющими полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 .

Для получения третьего уравнения следует использовать поле, фазово-сопряженное фенингу. Сложность состоит в том, что вспомогательное поле не должно иметь источников внутри объема интегрирования, а фенинг возникает в среде именно благодаря внутренним источникам — шумовым решеткам, представленным нами в виде эквивалентных токов; следовательно, поле, сопряженное фенингу, также должно иметь источники внутри среды. Поэтому в качестве вспомогательного поля мы выберем волну, фазово-сопряженную фенингу только в области, лежащей вне объема интегрирования (правее плоскости S). Не имея источников внутри объема V , такая волна свободно распространяется в направлении \mathbf{k}_2 , но на поверхности S имеет распределение, фазово-сопряженное рассеянному полю: $\mathbf{E}_\beta(z, z') = \mathbf{e}_{1f}^*(z) e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$.

Проведя вычисления, полностью аналогичные предыдущим, получим, что поверхностный интеграл в этом случае равен $-2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1f}$.

Однако при таком выборе вспомогательного поля его распределение внутри объема интегрирования зависит от положения плоскости S , т.е. от координаты z . Производная объемного интеграла в этом случае будет равна

$$\begin{aligned} & \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \left(\int_0^z A_{1s} dz' \int_S \varepsilon_m^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{1f}^*) ds \right)}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} A_{1s} \int_S \varepsilon_m^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{1f}^*) ds \\ & + \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz' \int_S \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial (\varepsilon_m^* \mathbf{e}_{1f}^*)}{\partial z} \right) ds. \quad (21) \end{aligned}$$

Покажем, что вторым слагаемым в (21) можно пренебречь. Действительно, мы можем принять без ограничения общности, что величина $\langle (\mathbf{e}_{1f} \mathbf{e}_{1f}^*) \rangle$ слабо зависит

от z , т.е. ее производная близка к нулю; отсюда

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{1f}}{\partial z} \mathbf{e}_{1f}^* \right) \right\rangle \simeq 0, \quad (22)$$

что эквивалентно слабой корреляции между \mathbf{e}_{1f} и $\frac{\partial \mathbf{e}_{1f}}{\partial z}$. Так как „шумовая“ часть амплитуды решетки ε_m определяется функцией \mathbf{e}_{1f} из этого также следует слабая корреляция между величинами ε_m и $\frac{\partial \mathbf{e}_{1f}}{\partial z}$, т.е. близость к нулю производной $\frac{\partial(\varepsilon_m^* \mathbf{e}_{1f})}{\partial z}$.

Отбросив второе слагаемое в правой части (21), получим уравнение, аналогичное предыдущим

$$\frac{\partial A_{1f}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2x \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M_{1f}. \quad (23)$$

Действуя таким же образом, можно получить уравнения для компонент волны \mathbf{E}_2 . В этом случае в качестве объема интегрирования берем область, лежащую справа от плоскости S , и используем выражение (14) для эквивалентных токов. Вследствие зеркальной симметричности задачи полученные уравнения будут полностью аналогичны (19), (20) и (23), за исключением знака производной по z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2s}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \{A_{2c} M^* + A_{2f} M_{2f}^*\}; \\ \frac{\partial A_{2c}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{2s} M; \\ \frac{\partial A_{2f}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{2s} M_{2f}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$M_{2f} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\mathbf{e}_{2f}^* \mathbf{e}_2) ds \right\rangle.$$

Используя лемму Лоренца, мы получили систему из шести уравнений, включающих шесть компонент исходных волн, и три новые неизвестные M , M_{1f} и M_{2f} .

1.2. Уравнения, следующие из фоторефрактивных свойств среды

Уравнения для корреляционных интегралов M , M_{1f} и M_{2f} можно получить, рассматривая взаимодействие световых волн с фоторефрактивной средой. Будем считать, что решетка показателя преломления, возникающая в результате такого взаимодействия, сдвинута на $\pi/2$ относительно записывающей интерференционной картины. Это характерно для диффузионного механизма записи, а также для записи во внешнем переменном электрическом поле в кристаллах с большой дрейфовой длиной свободного пробега носителей. Будем также считать, что пространственные частоты записываемых решеток лежат в области максимального двухволнового усиления (что соответствует выбранному нами направлению фенинга).

В этих случаях уравнение для амплитуды периодического поля \mathbf{E}_{sc} , связанного с решеткой пространственного заряда, может быть представлено в виде [5,7]:

$$\tau_e \frac{\partial \mathbf{E}_{sc}}{\partial t} = -im\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{sc} \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right). \quad (25)$$

Здесь τ_e — эффективное время, зависящее от параметров среды и условий записи, в простейшем случае равное времени релаксации фотопроводимости; m — глубина модуляции записывающей интерференционной картины; \mathbf{E}_e — эффективное поле, которое определяется диффузионным полем \mathbf{E}_D и внешним приложенным полем \mathbf{E}_0 ; E_q — значение так называемого предельного поля уровня, пропорциональное концентрации компенсированных (свободных) донорных центров в материале.

Из (25) следует уравнение для амплитуды решетки диэлектрической проницаемости, вызванной полем \mathbf{E}_{sc} (считаем, что свойства материала позволяют записать это уравнение в скалярном виде, что справедливо для большинства практических случаев):

$$\tau_e \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t} = im \frac{\lambda}{\pi} n\Gamma + \varepsilon_m \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right). \quad (26)$$

Здесь λ — длина волны света, n — средний показатель преломления среды, $\Gamma = \frac{\pi}{\lambda} n^3 r E_e$ — коэффициент нелинейной связи, r — электрооптический коэффициент.

На основании (26) можно получить соотношения для величин M , M_{1f} и M_{2f} . В нашем случае глубина модуляции интерференционной картины может быть представлена как

$$m = \frac{(A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) + A_{1s} A_{1f}^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{1f}^*) + A_{2s} A_{2f}^* (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{1f}^*))}{I_0}, \quad (27)$$

где I_0 — суммарная интенсивность всех световых волн в среде. Подставив (27) в (26), домножим обе части получившегося уравнения на $\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^*$, проинтегрируем его по S и усредним по ансамблю. При этом исчезнут члены, содержащие шумовые составляющие световых полей $\mathbf{e}_{1,2f}$, и мы получим уравнение для M^* :

$$\tau_e \frac{\partial M^*}{\partial t} = -i \frac{\lambda n}{\pi} \Gamma \frac{A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*}{I_0} B + M^* \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right), \quad (28)$$

где

$$B = \int_S (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^*) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) ds.$$

Величина B определяет степень перекрытия исходных световых волн \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 .

Чтобы получить уравнение для M_{1f}^* , нужно домножить (26) с подстановкой (27) на $(\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_{1f}^*)$ и усреднить по ансамблю. При этом следует учитывать, что \mathbf{e}_{1f} зависит от t и от z . При усреднении по ансамблю будем считать, что \mathbf{e}_{1f} и \mathbf{e}_{2f} не коррелируют, что эквивалентно пренебрежению обращенным фенингом;

тогда $\langle \int_S (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{2f}^*) (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_{1f}) ds \rangle = 0$. Мы можем также при-
нять, как показано выше, что $\langle \varepsilon_m (\mathbf{e}_1 \frac{\partial \mathbf{e}_{1f}}{\partial t}) \rangle \simeq 0$ (21), (22).
В результате имеем

$$\tau_e \frac{\partial M_{1f}^*}{\partial t} = -i \frac{\lambda n}{\pi} \Gamma \frac{A_{1s} A_{1f}^*}{I_0} C_1 + M_{1f}^* \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right), \quad (29)$$

где

$$C_1 = \left\langle \int_S (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{1f}^*) (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_{1f}) ds \right\rangle.$$

Аналогичным образом, домножив (26) с подстановкой (27) на $(\mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_{2f})$ и усреднив по ансамблю, получим уравнение для M_{2f}^* :

$$\tau_e \frac{\partial M_{2f}^*}{\partial t} = -i \frac{\lambda n}{\pi} \Gamma \frac{A_{2s} A_{2f}^*}{I_0} C_2 + M_{2f}^* \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right), \quad (30)$$

где

$$C_2 = \left\langle \int_S (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{2f}^*) (\mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_{2f}) ds \right\rangle.$$

Можно сказать, что величины C_1 и C_2 определяют степень перекрытия прямых и рассеянных волн. Формально они могут зависеть от времени и координаты z , но из-за принятых нами условий нормировки отклонения этих величин от среднего значения не могут быть значительны (если материал однороден).

2. Окончательный вид уравнений

Полученные нами девять уравнений (19), (20), (23), (24), (28)–(30) образуют систему для девяти неизвестных: шести компонентов исходных световых волн и трех величин, определяющих возмущения (решетки) диэлектрической проницаемости. При получении этих уравнений учитывался сложный характер волновых фронтов, а также были применены методы (усреднение по ансамблю реализаций и лемма Лоренца), которые обычно не используются в фоторефрактивной теории. При выводе предполагалось, что фоторефрактивная среда идеальна, т.е. любая неоднородность показателя преломления может изменяться во времени и либо является случайной флуктуацией, либо вызвана взаимодействием среды со световыми полями. В реальном материале всегда присутствуют малые неоднородности диэлектрической проницаемости, случайно распределенные в пространстве и постоянные во времени. Выделим из них составляющие с волновыми векторами, близкими k , и введем в (10) как малую постоянную добавку $\Delta \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathbf{r}) e^{i(k\mathbf{r})} + \varepsilon_0^*(\mathbf{r}) e^{-i(k\mathbf{r})}$. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1c,2c}}{\partial z} &= \mp \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s,2s} (M + M_0); \\ \frac{\partial A_{1s,2s}}{\partial z} &= \mp \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \{ A_{1c,2c} (M^* + M_0^*) \\ &\quad + A_{1f,2f} (M_{1f,2f}^* + M_{1f_0,2f_0}^*) \}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_{1f,2f}}{\partial z} = \mp \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s,2s} (M_{1f,2f} + M_{1f_0,2f_0});$$

$$\begin{aligned} \tau_e \frac{\partial M^*}{\partial t} &= -i \frac{\lambda n}{\pi} \Gamma \frac{A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*}{I_0} B \\ &\quad + (M^* + M_0^*) \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_e \frac{\partial M_{1f,2f}^*}{\partial t} &= -i \frac{\lambda n}{\pi} \Gamma \frac{A_{1s,2s} A_{1f,2f}^*}{I_0} C_{1,2} \\ &\quad + (M_{1f,2f}^* + M_{1f_0,2f_0}^*) \left(1 + \frac{|\mathbf{E}_e|}{E_q} \right), \quad (31) \end{aligned}$$

где

$$M_0 = \int_S \varepsilon_0^* (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) ds;$$

$$M_{1f_0,2f_0} = \left\langle \int_S \varepsilon_0^* (\mathbf{e}_{1f,2f}^* \mathbf{e}_{1,2}) ds \right\rangle.$$

Отметим, что при $\Delta \varepsilon_0 \neq 0$ малые постоянные шумовые затравки $M_{1f_0,2f_0}$ всегда отличны от нуля, так как шумовые поля $e_{1f,2f}$ должны иметь составляющие, коррелирующие с $\Delta \varepsilon_0$; однако затравка „обращающей“ решетки M_0 может оказаться исчезающе малой, так как корреляция между $\Delta \varepsilon_0$ и полями исходных волн совсем не обязательна.

При выводе системы (31) учитывался сложный характер волновых фронтов и были применены методы (усреднение по ансамблю реализаций и лемма Лоренца), которые обычно не используются в фоторефрактивной теории. Аналогичные уравнения, полученные традиционным способом, не содержат интегральных величин B , C_1 и C_2 , так как выводятся в предположении, что все взаимодействующие волны — плоские [2]. Применив ту же методику, можно получить уравнения для любой геометрии четырехволнового взаимодействия, где происходит формирование направленной волны из начального шумового поля. В частности, в работе [4] приводятся такие уравнения для полулинейного генератора. Там же на основании полученной системы проведены некоторые расчеты и показано, что в этом случае интегральные величины, определяющие степень перекрытия прямой и рассеянной волн, играют большую роль при возбуждении различных мод генерации.

3. Результаты расчетов

На основании уравнений, полученных в данной работе, можно рассчитать зависимости, характерные для схемы двойного обращения, например, динамику всех волновых полей от начала взаимодействия до перехода к установившемуся режиму. В этом разделе приведены результаты хода к установившемуся режиму. В этом разделе приведены результаты численного решения системы (31) при различных значениях параметров, соотнесенных с реальными условиями. Численные расчеты

велись с использованием метода Эйлера [8] по временной координате и метода Милна [8] по пространственной координате. Метод Милна характеризуется меньшей погрешностью счета по сравнению с методом Эйлера, но вместе с тем он более ресурсоемок и не позволяет изменять шаг интегрирования в процессе расчетов. Начальные точки для метода Милна были получены при помощи метода Эйлера. Шаг по пространственной координате был выбран постоянным и не изменялся. Шаг по временной координате был переменным — уменьшался, если относительная погрешность расчетов была выше допустимого значения: 1%.

При вычислениях предполагалось, что средние интенсивности световых волн, падающих на среду справа и слева, одинаковы; среда далека от насыщения, т.е. $E_q \gg |E_e|$.

3.1. Влияние фенинга на динамику роста обращенных волн и пороговые условия

Проведенные нами расчеты позволили теоретически рассмотреть некоторые эффекты, связанные с формированием обращенных волн на основе шумовых решеток. На рис. 2 приведены типичные временные зависимости всех трех компонент одного из исходных световых полей при среднем уровне шумовых затравок. Хорошо видна конкуренция между обращенной волной и фенингом, который сначала быстро растет, а потом отдает часть своей энергии медленно формирующейся обращенной волне.

Динамика обращенных волн вблизи порога генерации показана на рис. 3. На рис. 3, *a* даны зависимости, рассчитанные при нулевых шумовых затравках. Простейшая одномерная модель DPCM [9] дает пороговое значение $\Gamma d \geq 2$. Как видно из графика, эта величина является пороговой и при учете сложной формы взаимодействующих волн ее превышение на 0.5% ведет к более чем тысячекратному росту сигнала. Те же зависимости, рассчитанные при малых ($\sim 10^{-6}$) значениях шумовых затравок, практически не отличаются от кривых, приведенных на рис. 3, *a*.

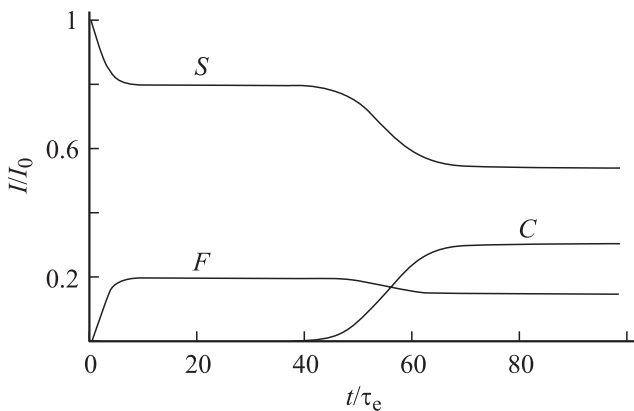


Рис. 2. Типичная динамика интенсивностей пучка накачки (S), обращенной волны (C) и фенинга (F) при старте генерации. $\Gamma d = 2.4$, $M_0 = 5 \cdot 10^{-9}$, $M_{f1,f2} = 2.5 \cdot 10^{-5}$.

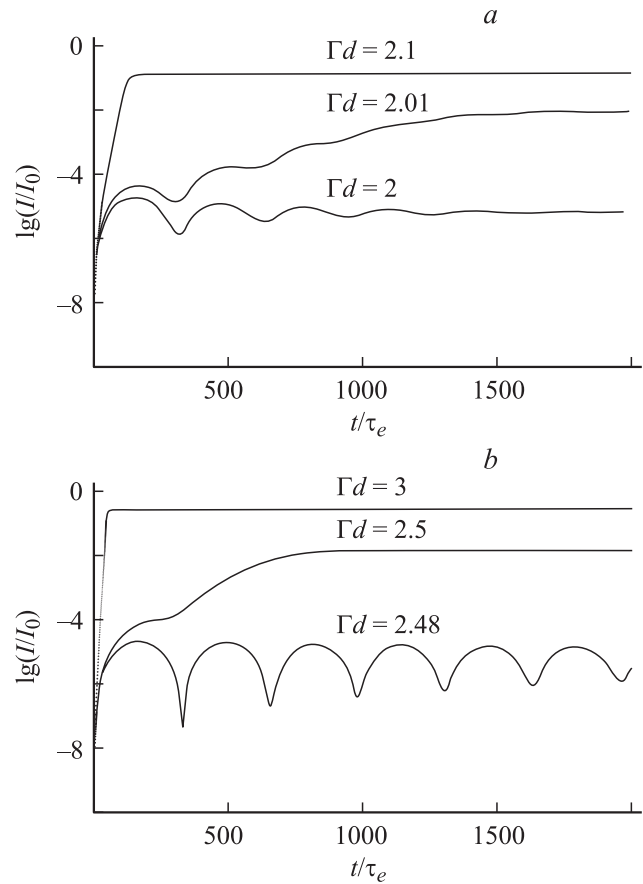


Рис. 3. Динамика обращенных волн вблизи порога генерации при разном уровне шумовых затравок — $M_{f1,f2} = 5 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 3, *b* даны аналогичные зависимости, рассчитанные при высоком уровне шумовых затравок. Как и для рис. 3, *a*, были взяты значения константы нелинейной связи, не более чем на 3% превышающие пороговое. Общий вид кривых рис. 3, *a* и *b* почти не отличается, но порог генерации во втором случае оказывается на 25% выше ($\Gamma d \simeq 2.48$).

Таким образом, из наших расчетов следует, что фенинг, слабо влияя на динамику роста обращенных волн, может при достаточно больших шумовых затравках существенно повысить порог генерации. Рис. 4 демонстрирует рассчитанную зависимость пороговых значений Γd от $M_{1f0,2f0}$. Из рисунка видно, что при высоком уровне шума порог генерации возрастает более чем вдвое.

3.2. „Верхний порог“ генерации

Расчеты показывают, что шум может помешать формированию обращенных волн, даже если пороговые условия превышены. В некоторых случаях обращенные волны формируются только в определенном диапазоне значений Γd — выше порога и ниже „верхнего порога“ (верхняя ветвь графика на рис. 4). При дальнейшем увеличении шумовых затравок „верхний порог“ снижается и в конце концов совпадает с „основным“ пороговым значением; эта точка характеризует предельно допустимый уровень шума, выше которого генерация невозможна.

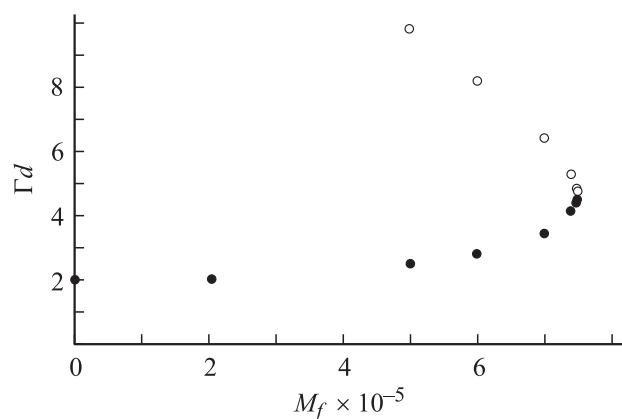


Рис. 4. Зависимость пороговых значений Γd от уровня шумовых затравок. Светлыми точками показан „верхний порог“ генерации.

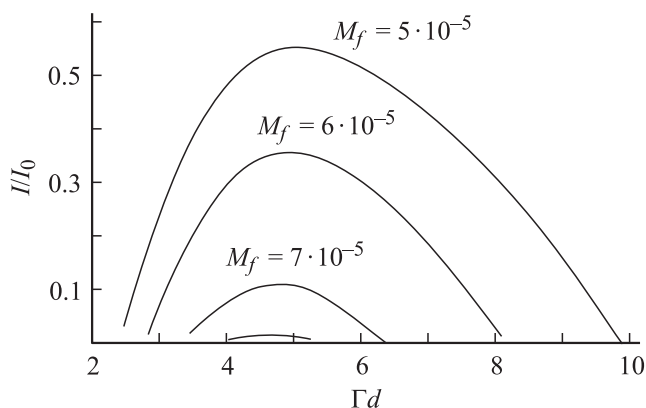


Рис. 5. Зависимости стационарного уровня отраженных волн от константы нелинейной связи при различных уровнях шумовых затравок. $M_0 = 5 \cdot 10^{-9}$.

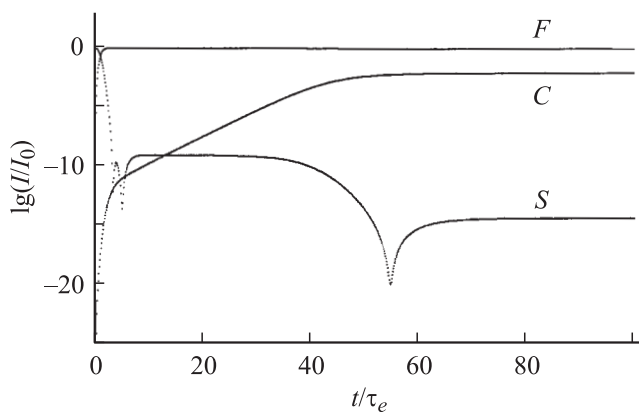


Рис. 6. Динамика интенсивностей пучка накачки (S), отраженной волны (C) и фенинга (F) при старте вблизи „верхнего порога“ генерации. $\Gamma d = 7.5$, $M_{f1, f2} = 6 \cdot 10^{-5}$, $M_0 = 5 \cdot 10^{-9}$.

При высоких шумовых затравках рост коэффициента нелинейной связи (Γd) в области выше порога вызывает сначала возрастание, а затем снижение интенсивности отраженных волн, т.е. каждому значению $M_{1f_0, 2f_0}$ соответствует свой максимальный уровень обращения. Как видно из рис. 5, этот максимум быстро снижается при приближении к „критической точке“.

Существование „верхнего порога“ объясняется высокой (по сравнению с отраженной волной) скоростью возрастания фенинга, что при больших шумовых затравках приводит к быстрому истощению пучка накачки. На рис. 6 показана динамика всех трех световых полей на начальном участке формирования отраженной волны при значении Γd , близком к „верхнему пороговому“. На графике зависимости $E_s(t)$ видны два резких провала: в начале формирования отраженной волны и при ее переходе с стационарного значения. В эти моменты отраженная волна забирает энергию у пучка накачки, интенсивность которого падает почти до нуля, а затем опять возрастает за счет некоторого снижения фенинга. Если же „верхний порог“ превышен, фенинг истощает пучок накачки прежде, чем отраженная волна успеет сформироваться.

Отметим, что истощение пучка накачки (и соответственно появление „верхнего порога“ генерации) возможно лишь в материале, далеком от насыщения.

3.3. „Колебательный“ режим генерации

Зависимости, приведенные на рис. 3, показывают, что вблизи порога отраженная волна растет немонотонно — происходят периодические колебания интенсивности, что может быть вызвано нестабильностью генерации при этих условиях.

Однако расчеты показывают, что подобный „колебательный“ режим может существовать вдали от порога генерации, и не только при росте и формировании отраженной волны, но и в стационарном режиме. Это возможно при относительно высоком уровне сигнальных затравок M_0 (рис. 7). В этом случае стационарному состоянию соответствуют постоянные периодические колебания интенсивности отраженной волны с амплитудой

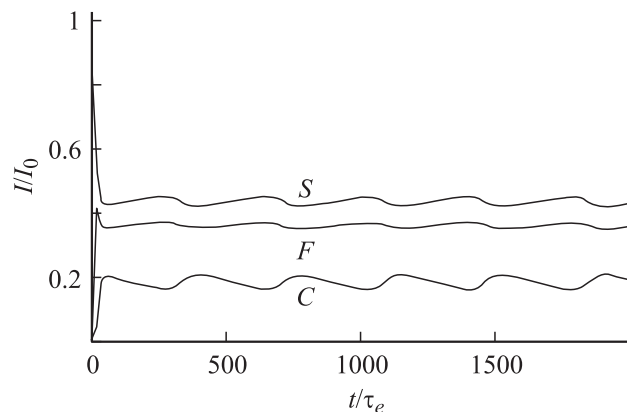


Рис. 7. „Колебательный“ режим генерации $\Gamma d = 2.5$, $M_0 = 5 \cdot 10^{-7}$, $M_{f1, f2} = 4 \cdot 10^{-5}$.

около 10%. Такой режим существует только при определенных условиях: если значение M_0 увеличить (или уменьшить) вдвое, он будет выражен гораздо слабее. Как видно из рисунка, интенсивность прошедшей волны (пучка накачки) при этом колеблется в противофазе; такие же колебания с небольшой задержкой во времени возникают и в интенсивности фенинга. Это показывает, что сущностью данного процесса также является конкуренция между фенингом и обращенной волной, которые обмениваются энергией посредством пучка накачки.

На практике нужный для „колебательного режима“ уровень затравки обращенной волны можно получить, подобрав время стирания уже записанной обращающей решетки. В работе [3] в результате такого эксперимента был получен стабильный колебательный режим генерации обращенных волн; сопряженные колебания интенсивности наблюдались также в шумовой составляющей светового поля.

Заключение

Уравнения, описывающие четырехволновое взаимодействие в фоторефрактивной среде, в данной работе были получены при помощи обобщенных методов, применявшихся ранее в других (достаточно близких) областях оптики, например, при решении задачи о дифракции света на ультразвуке [10]. Расчеты, проведенные на их основе, позволили теоретически рассмотреть эффект влияния уровня шумовых затравок на пороговые условия генерации. Также было показано, что в сильно шумящем материале без насыщения диапазон значений константы нелинейной связи, в котором возможна генерация, ограничен не только снизу, но и сверху, что связано с быстрым истощением пучка накачки на начальном этапе формирования обращенной волны. Численно определен уровень шумовых затравок, выше которого генерация невозможна. Получены теоретические зависимости, описывающие колебания интенсивности обращенной волны в стационарном режиме, которые ранее наблюдались в эксперименте.

Список литературы

- [1] Бельдюгина Н.И., Мамаев А.В., Шкунов В.В. // Квантовая электроника. 1992. Т. 19. № 7. С. 691–697.
- [2] Зозуля А.А. // Квантовая электроника. 1992. Т. 19. № 8. С. 733–751.
- [3] Никифоров Ф.Н., Мурашко И.В., Водоватов И.А. и др. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 2. С. 77–85.
- [4] Murashko I.V., Nikiforov P.N., Petrunkin V.Y. et al. // Proc. of SPIE. 2003. Vol. 5066. P. 230–235.
- [5] Петров М.П., Степанов С.И., Хоменко А.В. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике. СПб.: Наука, 1992.
- [6] Вайнштейн П.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
- [7] Valley G.C., Lam Ju.F. // Topic in Applied Physics. Vol. 61. P. 75. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. P. 75–98.
- [8] Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
- [9] Weiss S., Sternklar S., Fischer B. // Opt. Lett. 1986. Vol. 12. P. 114–116.
- [10] Водоватов И.А., Петрунькин В.Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. XXVI. № 12. С. 1570–1588.