

01;07

## Новый метод расчета спектра и радиационных потерь вытекающих мод многослойных оптических волноводов

© Е.И. Голант, К.М. Голант

Общество с ограниченной ответственностью „Бизнес-Юнитек“,  
119992 Москва, Россия  
e-mail: eugenegolant@b-tech.ru

(Поступило в Редакцию 23 января 2006 г.)

На примере многослойных планарных оптических волноводов, волноведущие свойства которых определяются не полным внутренним отражением от границы сердцевины и оболочки как в обычных оптических волноводах, а антирезонансным отражением от многослойной оболочки, ARROW-волноводов, продемонстрирована эффективность нового численного метода расчета спектра и коэффициента затухания вытекающих электромагнитных мод. Предлагаемый метод равно применим как к расчету электромагнитных мод в диэлектрических волноводах, так и к расчету квантовых состояний электронов в многобарьерных полупроводниковых гетероструктурах.

Приведены результаты сравнения характеристик многослойных волноводов, рассчитанных на основе предлагаемого подхода, с известными, полученными при решении комплексного дисперсионного уравнения в рамках метода матрицы переноса.

В качестве примера приведены результаты расчета спектральной зависимости радиационного затухания первой вытекающей  $TE$ -моды планарного оптического волновода с 52 парами слоев.

PACS: 12.20.Ds, 42.25.Bs

### Введение

Планарные оптические диэлектрические волноводы, основанные на антирезонансном отражении от многослойной оболочки распространяющейся по сердцевине волновода световой волны, так называемые ARROW-структуры, широко исследуются и используются с конца 1980-х гг., когда они были предложены для радикального уменьшения утечки энергии электромагнитной волны в подложку, обладающую большим, чем у сердцевины коэффициентом преломления [1]. С тех пор они нашли широкое применение в таких элементах оптических интегральных схем, как лазеры, сенсоры, ответвители и поляризаторы. Одновременно были развиты многочисленные методы расчета ARROW-структур [2–9] — численные, аналитические и полуаналитические. Все известные численные методы основаны на нахождении комплексных корней дисперсионного уравнения, получаемого с помощью матрицы переноса, связывающей значения волновой функции и ее производной в граничных сечениях структуры. Этот подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, вычисление комплексных коэффициентов матрицы передачи путем прямого произведения матриц передачи отдельных слоев приводит к накоплению ошибок округления, а даже незначительное искажение коэффициентов дисперсионного уравнения приводит к серьезной погрешности в определении комплексной постоянной распространения. Качественное объяснение этого явления таково: присутствие экспоненциально нарастающих компонент в общем решении исходной дифференциальной задачи нарушает вычислительную устой-

чивость матричного произведения, строгое доказательство этого приведено в [10]. Во-вторых, нахождение комплексных корней трансцендентного дисперсионного уравнения требует применения весьма сложных вычислительных процедур [7,8]. Обе эти трудности заметно усугубляются с увеличением числа слоев в оболочке волновода  $N$ , поэтому расчеты, как правило, ограничивались структурами, включающими не более 5 пар слоев. В то же время расчет оптических волноводов, содержащих десятки и сотни пар слоев в оболочке, приобретает все большую актуальность с связи с применением новых технологий для изготовления ARROW. Например, с использованием высокопроизводительного метода плазмохимического осаждения были получены структуры на основе оксинитридного стекла с числом пар слоев в оболочке более 100 [11]. Теми же уравнениями, что и для оптических ARROW-волноводов, описываются квантовые состояния электронов в полупроводниковых гетероструктурах, например, в структурах квантовых каскадных лазеров в режиме когерентного транспорта электронов [12], которые также могут содержать сотни последовательно расположенных потенциальных квантовых ям и барьеров. В связи с этим в настоящей статье предлагается новый подход к расчету вытекающих мод многослойных планарных оптических волноводов и квантовых электронов в многослойных гетероструктурах с когерентным транспортом электронов. Кратко этот подход изложен в [13].

## Новый подход к расчету коэффициента затухания

О нем удобно говорить на языке волнового уравнения, описывающего поведение компонент поля световой волны вдоль координаты  $x$ , т.е. в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны  $z$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k(x)]^2\psi = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — поперечная координата,  $k(x) = \sqrt{[n(x)]^2 k_0^2 - \gamma^2} = k_0 \sqrt{[n(x)]^2 - n_{\text{эф}}^2}$  — поперечный волновой вектор планарного волновода с коэффициентом преломления  $n(x)$ ,  $\gamma = \beta - i\alpha$  — продольная, в общем случае комплексная, постоянная распространения волны, бегущей в направлении  $z$  и имеющей фазовый множитель  $\exp[i(\omega t - \gamma z)]$ ,  $k_0 = \omega/c$  — волновой вектор свободного пространства,  $n_{\text{эф}}$  — эффективный индекс,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость света в пустоте;  $\psi = E_y$  — для  $TE$ -волн и  $H_y$  — для  $TM$ -волн.

Постоянная распространения  $\gamma$  и связанный с ней эффективный индекс  $n_{\text{эф}}$  являются собственными значениями волнового уравнения (1). Настоящими, истинными модами волновода являются действительные решения уравнения (1), имеющие вид стоячих волн. Характер этих решений (мод) определяется соотношением эффективного индекса и индекса  $n(\infty)$  среды, окружающей волновод — воздуха, подложки и т.п.

При  $n_{\text{эф}} > n(\infty)$  волновой вектор  $k(\infty)$  чисто мнимый, компонента решения, имеющая физический смысл, экспоненциально затухает на бесконечности — это обычные, распространяющиеся моды. Дисперсионное уравнение дает дискретный спектр эффективных индексов таких мод.

При  $n_{\text{эф}} < n(\infty)$  волновой вектор  $k(\infty)$  действителен, действительные решения на бесконечности имеют вид стоячих волн, которые можно представить в виде суммы двух противоположно направленных бегущих волн

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \cos[k(\infty)x] + B \sin[k(\infty)x] \\ &= R e^{ik(\infty)x} + S e^{-ik(\infty)x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R = \frac{A-iB}{2}$ ,  $S = \frac{A+iB}{2}$ . Эти решения не нормируются, поскольку не обращаются в нуль на бесконечности и называются излучающими модами, так как уносят (рассеивают) энергию волны в поперечном направлении. При этом извне поступает точно такое же количество энергии. Эти решения считаются не имеющими физического смысла, поскольку включают в себя приходящую из бесконечности волну. Однако именно эти решения могут быть использованы для весьма точного расчета затухания слабоизлучающих мод.

Спектр излучающих мод непрерывен — таких мод бесконечно много. Для каждого значения эффективного индекса  $n_{\text{эф}} < n(\infty)$  существует своя излучающая мода.

При достаточно широкой сердцевине это почти плоские волны. Чем шире сердцевина, тем меньшая доля энергии волны рассеивается в поперечном направлении, — уходит, например, через многослойные оболочки, — тем меньше коэффициент затухания.

При фиксированных размерах волновода и частоте колебаний световой волны  $\omega$  на зависимости постоянной затухания  $\alpha$  от эффективного индекса могут существовать достаточно резкие минимумы, соответствующие самым долгоживущим модам. Эти моды называются вытекающими (leaky) модами. Собственно, расчет и заключается в нахождении спектра этих мод.

При стандартном подходе к расчету вытекающих мод в случае  $n_{\text{эф}} < n(\infty)$  приходящие из бесконечности волны исключаются из (2), остаются только уходящие волны вида

$$\psi(x) = S e^{-ik(\infty)x} \quad \text{или} \quad \psi(x) = R e^{ik(\infty)x}. \quad (3)$$

Решение становится комплексным, корни дисперсионного уравнения определяют комплексную постоянную распространения  $\gamma = \beta - i\alpha$  и эффективный индекс  $n_{\text{эф}}$  вытекающей моды.

Полученные решения имеют дискретный спектр, но это не настоящие моды, поскольку они даже в идеальном случае полного отсутствия потерь в материале не могут существовать без подвода энергии — возбуждения. Однако это полезное понятие, которое позволяет говорить о „потерях на излучение“, причем тем точнее, чем эти потери меньше. Таким образом, само определение потерь на излучение на основе действительной части  $\alpha$  комплексной постоянной распространения  $\gamma$  вытекающей моды носит такой же приближенный характер, как и предлагаемый в настоящей статье не совсем стандартный способ расчета потерь, основанный на идентификации вытекающих мод, с наиболее долгоживущими излучающими модами. Это следует подчеркнуть.

Для расчета многослойного волновода при стандартном подходе с помощью перемножения матриц передачи каждого слоя [14] находится связь между граничными волновыми функциями (напряженностями), которая вместе с условиями существования только уходящих на бесконечность волн дает трансцендентное дисперсионное уравнение относительно комплексной постоянной распространения  $\gamma = \beta - i\alpha$  вытекающей моды.

Какие недостатки у этого метода? Перемножение матриц передачи приводит к накоплению погрешности в коэффициентах дисперсионного уравнения, искомые корни которого чрезвычайно чувствительны к этой погрешности. Качественное объяснение таково: присутствие экспоненциально нарастающих компонент в общем решении исходной дифференциальной задачи нарушает вычислительную устойчивость. Кроме того, поиск комплексных корней сложного трансцендентного уравнения представляет собой нетривиальную проблему. Могут пропускаться корни, находиться ложные решения и т.п. Эти трудности многократно обостряются с увеличением числа слоев волновода. Авторам неизвестны публикации

с расчетом вытекающих мод для волноводов с числом слоев, большим десяти.

Чтобы обойти указанные выше трудности, нами разработан новый способ расчета спектра вытекающих мод многослойных волноводов [13]. Этот метод основан на раздельном вычислении действительной постоянной распространения  $\beta$  (эффективного индекса  $n_{\text{эф}} = \beta c / \omega$ ) и коэффициента затухания  $\alpha$  излучающих мод (2). Непрерывно сканируя эффективный индекс (спектр излучающих мод непрерывен), находим зависимость  $\alpha(n_{\text{эф}})$ , минимумы на которой соответствуют вытекающим модам. Таким образом, вместо задачи поиска на комплексной плоскости корней сложного трансцендентного уравнения получаем более простую задачу поиска локальных минимумов действительной функции одной переменной. Для реализации этой идеи потребовался новый подход к вычислению коэффициента затухания. Какой мысленный эксперимент лежит в основе стандартного подхода к вычислению коэффициента затухания путем решения дисперсионного уравнения в комплексной области? Предполагается, что волновая функция (напряженность) в однородном по  $z$  волноводе экспоненциально затухает к  $z = \infty$ , и, следовательно, экспоненциально нарастает к  $z = -\infty$ . Ясно, что такая модель справедлива только для коэффициентов затухания, достаточно малых по сравнению с обратной длиной волны.

В этом же приближении можно предложить и другую модель. Предположим, что в сечениях  $x = \pm a$  вдоль поперечной оси  $x$  на некотором, достаточно большом, расстоянии  $a$  от центра волновода помещены идеально отражающие плоскости, препятствующие вытеканию электромагнитной энергии из системы. Тогда задача становится хорошей, самосопряженной — с действительными собственными значениями и собственными функциями вида стоячих волн (2), которые можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Энергия, переносимая каждой из этих парциальных волн в единицу времени, и принимается за мощность, излучаемую в поперечном направлении, — мощность потерь. То, что это разумное предположение, можно увидеть, если мысленно мгновенно убрать отражающие плоскости: в первый момент через открытые границы потечет именно эта, парциальная мощность. То, что это хорошее приближение, показывает совпадение результатов, полученных при таком подходе, с ранее опубликованными результатами, полученными стандартными методами. Еще раз следует отметить, что физически оба способа определения потерь — приближенные и имеют одинаковые условия применимости — достаточно малое затухание на масштабе порядка длины волны.

### Точная разностная схема

Задача определения мод многослойного планарного оптического волновода сводится к решению стационарного волнового уравнения (уравнения Шредингера) для

среды с кусочно-постоянным (ступенчатым) профилем коэффициента преломления (потенциальной энергии):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_j^2\psi = 0, \quad (4)$$

где  $k_j = \sqrt{n_j^2 k_0^2 - \gamma^2}$  — поперечный волновой вектор  $j$  участка планарного волновода с коэффициентом преломления  $n_j$ .

На границах между слоями с различными коэффициентами преломления должны выполняться условия связи.

$$\psi(x_{j+}) = \psi(x_{j-}), \quad \frac{1}{\mu_j} \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x_{j+}} = \frac{1}{\mu_{j-1}} \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x_{j-}}, \quad (5)$$

где

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{для } TE\text{-волн} \\ n_j^{-2}, & \text{для } TM\text{-волн} \end{cases}.$$

Знак плюс относится к слою, лежащему в положительном направлении от точки  $j$ , в то время как минус — в отрицательном.

Отметим, что для случая электронных волн в полупроводниковых гетероструктурах  $\mu_j = \frac{m_j^*}{m_0}$ , где  $m_j^*$  — эффективная масса электрона,  $m_0$  — масса свободного электрона. Предполагается, что волноведущая структура ограничена полупространствами с коэффициентами преломления  $n_s$  и  $n_c$ , причем положительное направление оси  $x$  выбрано от  $n_s$  к  $n_c$ .

Для  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$  общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A_j \cos[k_j(x - x_j)] + B_j \sin[k_j(x - x_j)] \\ &= R_j e^{ik_j(x-x_j)} + S_j e^{-ik_j(x-x_j)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R_j = \frac{A_j - iB_j}{2}$ ,  $S_j = \frac{A_j + iB_j}{2}$ . Используя условия связи (5), можно получить явные выражения для коэффициентов матриц  $T_j$ :

$$T_j = \begin{bmatrix} \cos(k_j d_j) & \frac{\mu_j}{k_j} \sin(k_j d_j) \\ -\frac{k_j}{\mu_j} \sin(k_j d_j) & \cos(k_j d_j) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

связывающих значения волновой функции  $\psi$  и непрерывной величины  $\mu_j^{-1} \psi' = \mu_j^{-1} \frac{d\psi}{dx}$  в смежных сечениях

$$\begin{bmatrix} \psi_{j+1} \\ \mu_{j+1}^{-1} \psi'_{j+1} \end{bmatrix} = T_j \begin{bmatrix} \psi_j \\ \mu_j^{-1} \psi'_j \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $d_j = x_{j+1} - x_j$  — толщина слоя  $j$ .

Перемножение матриц  $T_j$  дает так называемую матрицу переноса

$$T = T_{N-1} \dots T_2 T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix},$$

связывающую значения волновой функции и ее производной в граничных сечениях

$$\begin{bmatrix} \psi_c \\ \mu_c^{-1}\psi'_c \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \psi_s \\ \mu_s^{-1}\psi'_s \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $\psi_s = \psi_1$ ,  $\psi_c = \psi_N$ ,  $\mu_s^{-1}\psi'_s = \mu_1^{-1}\psi'_1$ ,  $\mu_c^{-1}\psi'_c = \mu_N^{-1}\psi'_N$ .

Полагая, что при  $x < x_1$ ,  $\psi(x) = R_s e^{ik_s(x-x_1)}$ , а при  $x > x_N$ ,  $\psi(x) = S_c e^{-ik_c(x-x_N)}$ , т.е. в граничных полупространствах имеются только уходящие (при положительном действительном  $ik$  — затухающие) волны, из (6) легко получить дисперсионное уравнение относительно продольной комплексной постоянной распространения  $\gamma$ :

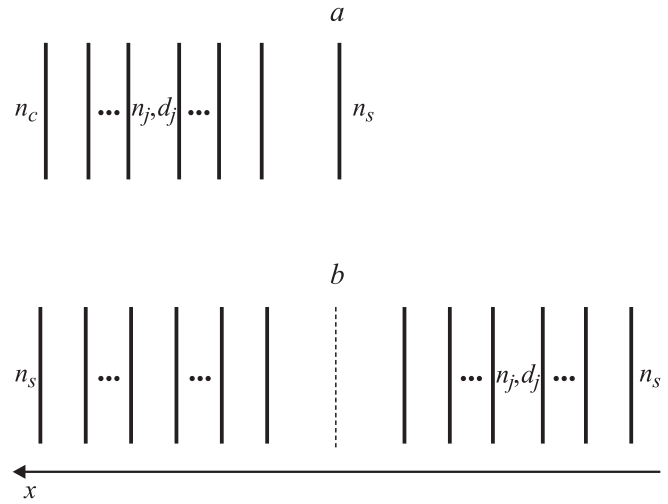
$$\mu_c^{-1}ik_c t_{11} - \mu_s^{-1}\mu_c^{-1}k_s k_c t_{12} + t_{21} + \mu_c^{-1}ik_s t_{22} = 0. \quad (10)$$

Корни этого уравнения  $\gamma = \beta - i\alpha$  дают искомые действительную постоянную распространения  $\beta$  и постоянную затухания  $\alpha$  вытекающих мод волновода. С незначительными вариациями описанный выше подход используется в большинстве известных работ по численному расчету мод в ARROW-структурах.

Следует заметить, что уравнениям (7), (8) можно придать вид разностной схемы, связывающей значения волновой функции  $\psi$  в трех последовательных точках  $\psi_{j-1}$ ,  $\psi_j$ ,  $\psi_{j+1}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_j^{-1} \frac{k_j d_j}{\sin(k_j d_j)} \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{d_j} - \mu_{j-1}^{-1} \frac{k_{j-1} d_{j-1}}{\sin(k_{j-1} d_{j-1})} \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{d_{j-1}} \right] \frac{2}{d_j + d_{j-1}} \\ & + \left[ \mu_j^{-1} k_j^2 \frac{\text{tg}(k_j d_j / 2)}{k_j d_j / 2} + \mu_{j-1}^{-1} k_{j-1}^2 \frac{\text{tg}(k_{j-1} d_{j-1} / 2)}{k_{j-1} d_{j-1} / 2} \right] \psi_j = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта схема имеет вид, характерный для стандартной разностной аппроксимации уравнения (1) с условиями связи (2). Более того, так как при  $kd \rightarrow 0$   $\frac{k_j d_j}{\sin(k_j d_j)} \rightarrow 1$ ,  $\frac{\text{tg}(k_{j-1} d_{j-1} / 2)}{k_{j-1} d_{j-1} / 2} \rightarrow 1$ , схема (8) в этом пределе непосредственно переходит в стандартную разностную схему второго порядка точности относительно  $\max(d_j)$  для уравнений (4), (5). Однако в отличие от стандартной полученная разностная схема является точной для волноводных структур со ступенчатым поперечным распределением коэффициента преломления, т.е. алгебраически эквивалентной уравнениям (7), (8). Именно в этом смысле речь может идти о точном методе конечных разностей. Важным преимуществом записи уравнений (7), (8) в форме (11), является возможность применения для решения (11) с крайними условиями различных типов чрезвычайно эффективных и численно устойчивых методов, развитых для решения разностных уравнений с трехдиагональными матрицами, в частности, метода встречной сопряженной прогонки.



**Рис. 1.** Схематическое изображение слоев рассматриваемых ARROW-волноводов: *a* — несимметричного, *b* — симметричного.

В настоящей работе на основе схемы (11) рассчитываются два вида волноводных структур: несимметричные структуры с вытеканием энергии в подложку,  $n_c > \beta/k_0 > n_s$  (рис. 1, *a*) и симметричные структуры с вытеканием энергии как в оболочку, так и в подложку  $n_c = n_s > \beta/k_0$  (рис. 1, *b*). В обоих случаях в сечении  $j = 0$  на границе волновода с подложкой (полупространством  $n_s$ ) задаются произвольные, отличные от нуля, значения волновой функции  $\psi_0$  или ее производной  $\psi'_0$ . В случае симметричных структур достаточно ограничить расчет половиной структуры от границы с подложкой до середины сердцевинки волновода, задавая в середине сердцевинки либо нуль волновой функции (для антисимметричных мод) либо нуль ее производной (для симметричных мод):

$$\begin{aligned} \psi_N = 0 \quad \text{или} \quad \psi'_N = \frac{\psi_N \cos(k_{N-1} d_{N-1}) - \psi_{N-1}}{d_{N-1}} \\ \times \frac{k_{N-1} d_{N-1}}{\sin(k_{N-1} d_{N-1})} \frac{\mu_{N-1}}{\mu_N} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае несимметричных структур с полным внутренним отражением от оболочки волновода волновая функция затухает в оболочке по экспоненциальному закону с показателем  $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - n^2 k_0^2}$ , так что на границе с оболочкой крайнее условие имеет вид  $\psi_N - \kappa_c \psi'_N = 0$ . Из этого условия, выразив производную волновой функции через ее значения в двух соседних точках, с помощью (7), (8) легко можно получить разностное крайнее условие

$$\begin{aligned} & \left[ \cos(k_{N-1} d_{N-1}) - \frac{\mu_{N-1}}{\mu_N} \kappa_c d_{N-1} \frac{\sin(k_{N-1} d_{N-1})}{k_{N-1} d_{N-1}} \right] \psi_N - \psi_{N-1} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Присоединив крайние условия (12) или (13) к системе уравнений (11), получим замкнутую систему из

$N$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными и действительной симметричной трехдиагональной матрицей, эффективно решаемую одним из методов, специально разработанных для таких систем.

Полученная система уравнений решается в предположении отсутствия затухания  $\alpha = 0$  и действительной волновой функции  $\psi_N$ . Таким образом, решение волнового уравнения (1) ищется в виде стоячих волн, т.е. в виде (6) с действительными коэффициентами  $A_j$  и  $B_j$  и, соответственно, комплексно сопряженными коэффициентами  $R_j$  и  $S_j$ . Следствием этих условий является то, что поперечный волновой вектор  $k_j = \sqrt{n_j^2 k_0^2 - \beta^2}$  принимает либо чисто действительные, либо чисто мнимые значения, так что все коэффициенты систем (11), (12) и (11), (13) действительны. В результате по заданным продольной постоянной распространения  $\beta$  и действительным значениям волновой функции  $\psi_0$  (или ее производной  $\psi'_0$ ) на границе решение уравнений (11), (12) и (11), (13) и дает действительные же значения волновой функции во всех остальных точках (сечениях) волноводной структуры.

### Расчет затухания

При таком подходе подразумевается, что в волновод извне, через одну или обе границы с внешними полупространствами поступает электромагнитная мощность, обеспечивающая отсутствие затухания распространяющейся волны. Поступающая мощность, очевидно, равна мощности, излучаемой волной во внешнее пространство. Обозначим эту мощность (отнесенную к единице площади излучаемой поверхности) —  $P_x$ , а мощность, переносимую волной внутри волновода в направлении распространения  $z$  (отнесенную к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости  $x, z$ ) —  $P_z$ . Отношение  $P_x(\beta)/P_z(\beta) = \alpha$  имеет смысл коэффициента затухания рассматриваемой моды и изменяется с изменением  $\beta$ . Минимумы на зависимости  $P_x(\beta)/P_z(\beta)$  соответствуют самым долгоживущим модам, для которых реализуются наиболее благоприятные условия антирезонансного отражения от оболочки ARROW-волновода.

Таким образом, сложная задача поиска комплексных корней трансцендентного дисперсионного уравнения сводится к существенно более простой задаче поиска минимумов действительной функции одной действительной переменной. Мощность, излучаемая волной в подложку  $P_x$ , может быть найдена на основе применения теоремы Пойнтинга к той компоненте волновой функции (3), которая соответствует вытекающей волне —  $R_s e^{ik_s(x-x_1)}$ :

$$P_x = \begin{cases} (\epsilon_0/2)c(k_s/k_0)R_s R_s^* \\ R_s R_s^* = (\psi_0^2 + \psi_0'^2/k_s^2)/4 \quad TE \\ Z_0 n_s^2 (\epsilon_0/2)c(k_s/k_0)R_s R_s^* \\ R_s R_s^* = [\psi_0^2 + (n_0^2/n_s^2)\psi_0'^2/k_s^2]/4 \quad TM \end{cases}, \quad (14)$$

где  $Z_0$  — волновое сопротивление вакуума. Аналогичным образом может быть найдена плотность мощно-

сти, излучаемой в оболочку (cladding) при  $\beta/k_0 \leq n_c$ . Мощность, переносимая волной в слое  $j$  волновода в направлении распространения  $z$ , равна

$$P_{zj} = \begin{cases} (\epsilon_0/2)c \frac{\beta}{k_0} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi^2(x) dx & TE \\ \frac{Z_0}{n_j^2} (\epsilon_0/2)c \frac{\beta}{k_0} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi^2(x) dx & TM \end{cases}, \quad (15)$$

где

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi^2(x) dx = \frac{d_j}{2} \left[ A_j^2 \left( 1 + \cos k_j d_j \frac{\sin k_j d_j}{k_j d_j} \right) + B_j^2 \left( 1 - \cos k_j d_j \frac{\sin k_j d_j}{k_j d_j} \right) + A_j B_j \sin k_j d_j \frac{\sin k_j d_j}{k_j d_j} \right],$$

$$A_j = \psi_j, \quad B_j = \psi'_j/k_j.$$

Суммарная мощность, переносимая волной, складывается из всех  $P_{zj}$ :  $P_z = \sum_{j=0}^N P_{zj}$ .

Следует отметить, что метод расчета мод планарных ARROW-волноводов, позволяющий избежать поиска корней дисперсионных уравнений в комплексной плоскости, был предложен ранее в [2]. В этой работе так же предполагался режим стоячих волн во внешних по отношению к волноводу полупространствах. Это предположение позволило для ARROW-волноводов на основе метода матрицы переноса (комплексной) построить приближенные дисперсионные уравнения, имеющие только действительные корни. Потери  $\alpha$ , связанные с вытеканием энергии волны, находились в [2] с помощью численного дифференцирования элемента матрицы переноса относительно  $\beta$ .

Наш подход содержит два новых, принципиально важных элемента по сравнению с [2]. Это, во-первых, замена построения дисперсионного уравнения с помощью комплексной матрицы переноса устойчивым численным решением волнового уравнения при помощи полностью действительного точного конечно-разностного метода (EFDM), и, во-вторых, предложенный нами метод вычисления вытекающей мощности, позволяющий при определении коэффициента затухания  $\alpha$  избежать таких процедур, как численное дифференцирование или численное определение ширины резонансной кривой, приводящих к заметному снижению точности вычисления  $\alpha$ .

### Сравнение результатов

С целью оценки точности разработанного метода был проведен расчет постоянной распространения (эффективного индекса) и затухания  $TE$ -мод планарных оптических волноводов, характеристики которых другими методами были рассчитаны в работах [2,7,8].

В табл. 1–5 приведены результаты расчета характеристик первых двух  $TE$ -мод известных структур

Таблица 1.

ARROW-A:  $n_s = 3.5, n_1 = 1.45, n_2 = 3.5, n_3 = 1.45, n_c = 1.0; d_1 = 4.0, d_2 = 0.1019, d_3 = 2.0985, \lambda_0 = 1.3 \mu\text{m}$  [3–5]

| Present Method |             |                      | Reference [2] |                      | Reference [2] (exact) |                      |
|----------------|-------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Mode           | $\beta/k_0$ | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$   | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$           | $Loss, \text{dB/cm}$ |
| $TE_1$         | 1.4417085   | 0.25                 | 1.4417085     | 0.25                 | 1.4417085             | 0.25                 |
| $TE_2$         | 1.417524200 | 340.3                | 1.41798       | 270                  | 1.4176                | 407                  |

Таблица 2.

ARROW-B:  $n_s = 3.85, n_1 = 1.54, n_2 = 1.46, n_3 = 1.54, n_c = 1.0; d_1 = 4, d_2 = 0.3, d_3 = 2, \lambda_0 = 0.633 \mu\text{m}$  [6]

| Present Method |             |                      | Reference [2] |                      | Reference [2] (exact) |                      |
|----------------|-------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Mode           | $\beta/k_0$ | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$   | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$           | $Loss, \text{dB/cm}$ |
| $TE_1$         | 1.538252749 | 0.1083               | 1.5382528     | 0.11                 | 1.5382527             | 0.11                 |
| $TE_2$         | 1.53368551  | 97.48                | 1.5336896     | 95                   | 1.5336856             | 98                   |

Таблица 3.

Two sided ARROW 1:  $n_s = 3.8, n_1 = 1.46, n_2 = 2.3, n_3 = 1.46, n_4 = 2.3, n_5 = 1.46, n_c = 3.8; d_1 = 2, d_2 = 0.088, d_3 = 4, d_4 = 0.088, d_4 = 4, \lambda_0 = 0.633 \mu\text{m}$

| Present Method |             |                      | Reference [2] |                      | Reference [2] (exact) |                      |
|----------------|-------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Mode           | $\beta/k_0$ | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$   | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$           | $Loss, \text{dB/cm}$ |
| $TE_1$         | 1.457852273 | 0.1052               | 1.4578523     | 0.11                 | 1.4578523             | 0.11                 |
| $TE_2$         | 1.451845190 | 96.87                | 1.4518589     | 76                   | 1.4518454             | 98                   |

Таблица 4.

Two sided ARROW 2:  $n_s = 3.16, n_1 = 3.55, n_2 = 3.16, n_3 = 3.55, n_4 = 3.16, n_5 = 3.55, n_6 = 3.16, n_7 = 3.55, n_c = 3.16; d_1 = 0.237, d_2 = 2, d_3 = 0.237, d_4 = 4, d_5 = 0.237, d_6 = 2, d_7 = 0.237, \lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$

| Present Method |             |                      | Reference [2] |                      | Reference [2] (exact) |                      |
|----------------|-------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Mode           | $\beta/k_0$ | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$   | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$           | $Loss, \text{dB/cm}$ |
| $TE_1$         | 3.154049689 | 0.5266               | 3.1540497     | 0.53                 | 3.1540497             | 0.53                 |
| $TE_2$         | 3.139384329 | 110.2                | 3.1393856     | 103                  | 3.1393856             | 113                  |

Таблица 5.

Two sided ARROW 3:  $n_s = 1.46, n_1 = 2.3, n_2 = 1.46, n_3 = 2.3, n_4 = 1.46, n_5 = 2.3, n_6 = 1.46, n_c = 3.5; d_1 = 0.089, d_2 = 2, d_3 = 0.089, d_4 = 4, d_5 = 0.089, d_6 = 2, \lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$

| Present Method |             |                      | Reference [2] |                      | Reference [2] (exact) |                      |
|----------------|-------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Mode           | $\beta/k_0$ | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$   | $Loss, \text{dB/cm}$ | $\beta/k_0$           | $Loss, \text{dB/cm}$ |
| $TE_1$         | 1.457855835 | 0.06238              | 1.4578558     | 0.06                 | 1.4578558             | 0.06                 |
| $TE_2$         | 1.451870544 | 62.35                | 1.4518726     | 49                   | 1.4518551             | 58                   |

ARROW-волноводов, полученных с помощью нашего метода и, для сравнения, результаты расчета этих же структур из [2].

Анализ результатов расчетов, приведенных в таблицах 1–5, показывает, что для основной  $TE_1$ -моды с малыми потерями результаты наших расчетов совпадают (в пределах точности цифр, данных в [2]) как с резуль-

татами расчетов по методу [2], так и со значениями, цитируемыми в [2] как „точные“ (exact). Для существенно сильнее излучающей  $TE_2$ -моды наши результаты заметно ближе к „точным“.

Для сравнения с более новыми и точными данными, полученными в [7,8] на основе численных методов поиска комплексных корней дисперсионных уравнений (6),

Таблица 6.

3-layer ARROW Waveguide:  $n_s = 3.85$ ,  $n_1 = 1.46$ ,  $n_2 = 2.30$ ,  $n_3 = 1.46$ ,  $n_c = 1.0$ ;  
 $d_1 = 6.3\lambda_0$ ,  $d_2 = 0.142\lambda_0$ ,  $d_3 \approx 3.15\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$

| Mode      | Present Method |                             | Reference [7] |                        |
|-----------|----------------|-----------------------------|---------------|------------------------|
|           | $\beta/k_0$    | $\alpha/k_0$                | $\beta/k_0$   | $\alpha/k_0$           |
| $TE_1$    | 1.457941265    | $5.419587209 \cdot 10^{-8}$ | 1.45794       | $5.4189 \cdot 10^{-8}$ |
| $TE_2$    | 1.451919115    | $5.199112471 \cdot 10^{-5}$ | 1.45192       | $5.2871 \cdot 10^{-5}$ |
| $TE_3$    | 1.451174944    | $1.885212344 \cdot 10^{-4}$ | 1.45117       | $1.9203 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_4$    | 1.441371363    | $4.379243431 \cdot 10^{-6}$ | 1.44137       | $4.3745 \cdot 10^{-6}$ |
| $TE_5$    | 1.427413890    | $2.102732713 \cdot 10^{-4}$ | 1.42741       | $2.1317 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_6$    | 1.424450980    | $7.516176088 \cdot 10^{-4}$ | 1.42445       | $7.6673 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_7$    | 1.407680313    | $3.368141566 \cdot 10^{-5}$ | 1.40768       | $3.3582 \cdot 10^{-5}$ |
| $TE_8$    | 1.385654140    | $4.822274684 \cdot 10^{-4}$ | 1.38565       | $4.8967 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_9$    | 1.379006390    | $1.688517962 \cdot 10^{-3}$ | 1.37900       | $1.7263 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{10}$ | 1.355673200    | $1.293284387 \cdot 10^{-4}$ | 1.35567       | $1.2860 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_{11}$ | 1.325099450    | $8.817196572 \cdot 10^{-4}$ | 1.32510       | $8.9350 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_{12}$ | 1.313214440    | $3.018813082 \cdot 10^{-3}$ | 1.31320       | $3.0948 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{13}$ | 1.283292450    | $3.564870128 \cdot 10^{-4}$ | 1.28330       | $3.5311 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_{14}$ | 1.243206300    | $1.431140516 \cdot 10^{-3}$ | 1.24321       | $1.4438 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{15}$ | 1.224199440    | $4.815467475 \cdot 10^{-3}$ | 1.22418       | $4.9486 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{16}$ | 1.187203960    | $8.195186046 \cdot 10^{-4}$ | 1.18720       | $8.0634 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_{17}$ | 1.135928490    | $2.157567629 \cdot 10^{-3}$ | 1.13592       | $2.1513 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{18}$ | 1.107020710    | $7.276317705 \cdot 10^{-3}$ | 1.10700       | $7.4694 \cdot 10^{-3}$ |
| $TE_{19}$ | 1.062409230    | $1.733843321 \cdot 10^{-3}$ | 1.06241       | $1.6648 \cdot 10^{-3}$ |

Таблица 7.

9-layer ARROW Waveguide:  $n_s = 3.5$ ,  $n_1 = 1.46$ ,  $n_2 = 1.50$ ,  $n_3 = 1.46$ ,  $n_4 = 1.50$ ,  $n_5 = 1.46$ ,  $n_6 = 1.50$ ,  $n_7 = 1.46$ ,  $n_8 = 1.50$ ,  
 $n_9 = 1.46$ ,  $n_c = 1.0$ ;  $d_1 = 2.0$ ,  $d_2 = 0.448$ ,  $d_3 = 4.0$ ,  $d_4 = 0.448$ ,  $d_5 = 2.0$ ,  $d_6 = 0.448$ ,  $d_7 = 4.0$ ,  
 $d_8 = 0.448$ ,  $d_9 = 2.0$ ,  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$

| Mode   | Present Method |                              | Reference [8] |                             |
|--------|----------------|------------------------------|---------------|-----------------------------|
|        | $\beta/k_0$    | $\alpha/k_0$                 | $\beta/k_0$   | $\alpha/k_0$                |
| $TE_1$ | 1.457920191    | $0.0071059441 \cdot 10^{-4}$ | 1.457920191   | $0.007106242 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_2$ | 1.457791244    | $0.0090529995 \cdot 10^{-4}$ | 1.457791244   | $0.009053396 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_3$ | 1.453780369    | $0.1145698295 \cdot 10^{-4}$ | 1.453780369   | $0.114698816 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_4$ | 1.453045405    | $0.4186909382 \cdot 10^{-4}$ | 1.453045406   | $0.420121480 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_5$ | 1.451864810    | $0.6904035922 \cdot 10^{-4}$ | 1.451864807   | $0.693651857 \cdot 10^{-4}$ |
| $TE_6$ | 1.450269492    | $0.7293545637 \cdot 10^{-4}$ | 1.450269491   | $0.732515869 \cdot 10^{-4}$ |

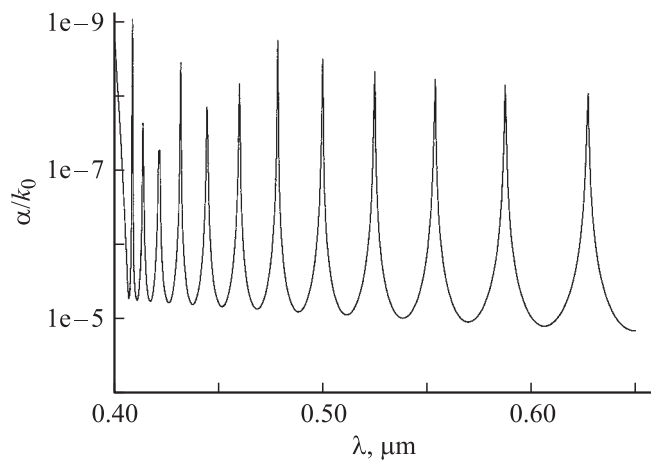
Таблица 8.

4-layer Lossless Waveguide:  $n_s = 1.5$ ,  $n_1 = 1.66$ ,  $n_2 = 1.60$ ,  $n_3 = 1.53$ ,  $n_4 = 1.66$ ,  $n_c = 1.0$ ;  
 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.5$ ,  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$

| Mode   | Present Method |                | Reference [8] |              |
|--------|----------------|----------------|---------------|--------------|
|        | $\beta/k_0$    | $\alpha/k_0$   | $\beta/k_0$   | $\alpha/k_0$ |
| $TE_4$ | 1.461515200    | 0.007027450589 | 1.461856641   | 0.007155871  |
| $TE_5$ | 1.381626100    | 0.001622539422 | 1.382489223   | 0.018165877  |
| $TE_6$ | 1.279615400    | 0.002901151215 | 1.281364436   | 0.035877392  |
| $TE_7$ | 1.139829100    | 0.003970660680 | 1.142314462   | 0.052876075  |

был приведен расчет первых 19  $TE$ -мод трехслойного ARROW-волновода из работы [7] и первых 6  $TE$ -мод девятислойного ARROW-волновода из [7,8]. Результаты приведены в табл. 6 и 7.

Видно полное совпадение (до десяти значащих цифр) полученных нами постоянных распространения (эффektivных индексов) мод с решениями комплексного дисперсионного уравнения, полученного в работах [6,7].



**Рис. 2.** Зависимость от длины волны коэффициента затухания первой вытекающей моды планарного оптического волновода.

Что касается потерь (коэффициента затухания), то здесь, как и следовало ожидать, совпадение значительно хуже: 4–5 значащих цифр для мод с малыми потерями и 2–3 — с относительно большими. Однако для практического применения такой точности расчета коэффициента затухания вполне достаточно. Увеличение относительной точности нашего метода с уменьшением величины затухания обусловлено резонансным характером интерференции волн в оболочке ARROW-волноводов. В условиях резонанса выражение (14) является очень хорошей аппроксимацией излучаемой волноводом мощности (мощности потерь), которая становится тем лучше, чем более острый характер носит резонанс, иными словами, чем более долгоживущей является рассматриваемая мода.

В нерезонансном случае значения коэффициента затухания, рассчитанные с использованием (11)–(13), начинают заметно расходиться с получаемыми с помощью дисперсионного уравнения (9). Это демонстрируют приводимые в табл. 8 результаты расчета вытекающих (leaky) мод четырехслойного планарного волновода из работы [7].

В качестве примера применения предлагаемого метода расчета на рис. 2 приведена зависимость от длины волны коэффициента затухания первой вытекающей моды планарного оптического волновода [11], состоящего из сердцевины толщиной  $80\ \mu\text{m}$  с коэффициентом преломления 1.46, окруженной оболочкой из 52 пар слоев одинаковой толщины  $0.323\ \mu\text{m}$  с чередующимся коэффициентом преломления 1.45/1.46.

## Заключение

Развит новый подход к численному расчету вытекающих мод в планарных оптических волноводах и квантовых полупроводниковых наноструктурах. В основе лежат две идеи: замена традиционно используемого метода матрицы передачи (Transfer Matrix Method, TMM) на

предложенный нами точный метод конечных разностей (Exact Finite Difference Method, EFDM) и использование нового способа вычисления коэффициента затухания вытекающих мод, приближенного, но асимптотически стремящегося к точному при уменьшении затухания.

Проведено сравнение точности нашего метода со всеми доступными опубликованными данными по численному расчету эффективного индекса и коэффициента затухания ARROW-волноводов, получено хорошее совпадение.

На основе этого нового подхода разработана компьютерная программа, позволяющая с высокой степенью точности и вычислительной эффективности находить эффективные индексы и коэффициенты затухания вытекающих мод любого порядка в многослойных планарных оптических волноводах с произвольным числом слоев. Возможность точного расчета многослойных ARROW-волноводов чрезвычайно важна, в частности, для их перспективного применения в качестве элементов оптических интегральных приборов.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-02-16441 и 04-02-17177).

## Список литературы

- [1] *Duguay M.A., Kokubun Y., Koch T.L., Pfeiffer L.* // Appl. Phys. Lett. 1986. Vol. 49. P. 13–15.
- [2] *Liu B., Shakouri A., Bowers J.E.* // Opt. and Quant. Electronics. 1999. Vol. 31. P. 1267–1276.
- [3] *Jiang W., Chrostowski J., Fontaine M.* // Opt. Commun. 1989. Vol. 72. P. 180.
- [4] *Kubica J., Uttamchandani D., Culshaw B.* // Opt. Commun. 1990. Vol. 78. P. 133.
- [5] *Huang W.P., Shubair R.M., Nathan A., Chow Y.L.* // J. Lightwave Technol. 1992. Vol. 10. P. 1015.
- [6] *Baba T., Kokubun Y.* // IEEE J. Quantum. Electron. 1992. Vol. 28. P. 1689.
- [7] *Anemogiannis E., Glytsis E.N., Gaylord T.K.* // J. Lightwave Tech. 1999. Vol. 17. P. 929.
- [8] *Chen C., Berini P., Feng D., Tanev S., Tzolov V.P.* // Opt. Express. 2000. Vol. 7. P. 260.
- [9] *Sheng M.-H., Chang H.-W.* // Appl. Opt. 2005. Vol. 44. N 5. P. 751–764.
- [10] *Mayer A., Vigneron J.-P.* // Phys. Rev. 1999. Vol. 59. P. 4659.
- [11] *Golant K.M., Golant E.I.* // 10<sup>th</sup> Microoptics Conf., September 1–3, 2004, Jena, Germany. Proc. on Cd-ROM. P. L–63.
- [12] *Kramer B.* // Adv. in Solid State Phys. 2003. Vol. 43. P. 351.
- [13] *Голант Е.И.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 24. С. 81.
- [14] *Борн М., Вольф Э.* // Основы оптики. М.: Наука, 1970. Гл. 1. С. 92.