01

Обобщение теории термофоретического движения дублета твердых частиц с учетом скачка температуры на их поверхности

© Ю.И. Яламов, А.С. Хасанов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: rectorat@mgou.ru

(Поступило в Редакцию 28 февраля 2006 г.)

Построена теория термофореза двух крупных однородных твердых сферических аэрозольных частиц, движущихся параллельно линии их центров, с использованием теории линейных операторов. Получены формулы для силы Стокса, термофоретической силы, скорости термофореза аэрозольной частицы с учетом скачка температуры на ее поверхности и влияния второй частицы. Для практических расчетов приведены приближенные формулы.

PACS: 05.20.Dd

Введение

Представляет интерес теория движения и взаимодействия двух частиц с учетом поверхностных явлений и объемных особенностей частиц. Указанные особенности приводят к целому классу линейных задач. Единый подход для их решения упростил бы проблему обобщения известных формул для скорости термофореза с учетом этих особенностей. С помощью предложенного нами метода можно получить известные результаты и обобщить их. Хотя с помощью данного метода можно построить теорию термофореза двух частиц с учетом и их объемных особенностей, в данной работе мы ограничимся теорией термофореза с учетом скачка температуры на поверхности частиц и выведем формулы, являющиеся основой для последующих обобщений.

Рассмотрим движение двух одинаковых крупных твердых сферических однородных частиц, взвешенных в однокомпонентном газе. Газовая среда покоится вдали от частиц, а ее температура T_e имеем вид $T_e = T_\infty + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$, где T_∞ — поле постоянного градиента температуры ∇T, $\varepsilon^{(j)}$ — возмущение, вызванное движением j-й частицы (верхний индекс j означает номер частицы и $j \in \{1, 2\}$). Движение происходит вдоль линии центров параллельно градиенту температуры ∇T, т.е. является осесимметрическим, а вращение частиц отсутствует. В качестве положительного направления оси Oz выберем направление постянного градиента температуры ∇T. Пусть l — расстояние между центрами частиц, a — радиус частицы, $O_1(0, 0, 0)$, $O_2(0, 0, l)$ — центры частиц. Учет поверхностных эффектов и проблема точности приближенных вычислений накладывают ограничения на величину l. Пусть λ — средняя длина свободного пробега молекул газовой среды. Частица считается крупной [1], если $\lambda/a \le 0.01$. Поэтому, считая величину минимального зазора между частицами равной $0.01a$, получим ограничение $l \ge a + 0.01a + a = 2.01a$. Пусть $t = a/l$, $t_0 = a/(2.01a) = 100/201$. В общем случае $0 \le t \le 0.5$, а в данной работе мы считаем, что $0 \le t \le t_0 = 100/201 = 0.4975$. Так как движение является осесимметрическим, то в сферической системе координат нет зависимости от координаты φ. Пусть P — произвольная точка, r_1, θ_1 — сферические координаты точки P в системе координат с центром в точке O_1, а r_2, θ_2 — в системе координат с центром в точке O_2. Тогда $T_\infty = T_1 + |\nabla T| r_1 \cos\theta_1$ в системе координат, связанной с первой частицей, и $T_\infty = T_1 + |\nabla T| l + |\nabla T| r_2 \cos\theta_2$ в системе координат, связанной со второй частицей, где T_1 — температура невозмущенного поля постоянного градиента ∇T в точке O_1. Пусть $T_i^{(j)}$ — поле температур внутри j-й частицы, тогда T_e, $T_i^{(j)}$ удовлетворяют уравнением [1] $\nabla^2 T_e = 0$, $\nabla^2 T_i^{(j)} = 0$. Граничные условия для T_e, $T_i^{(j)}$ на поверхности частиц имеют вид [1]:

$$T_e - T_i^{(j)} = C_T \lambda \frac{\partial T_e}{\partial r_j}, \quad \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}, \tag{1}$$

где $C_T = 2.179$ — коэффициент скачка температуры для простого газа; κ_e, κ_i — коэффициенты теплопроводности газовой среды и частиц соответственно. Кроме того, $\lim \varepsilon^{(j)} = 0$ при $r_j \to \infty$, $\lim T_i^{(j)} < \infty$ при $r_j \to 0$. При вычислении мгновенной термофоретической скорости частиц поля скоростей и давления могут быть определены стационарными уравнениями Стокса [1] $\nabla^2 \mathbf{v} = 1/\eta \nabla p$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{v}$ и p — поля скоростей и давления газовой среды, а η — ее вязкость. Пусть $\mathbf{U}$ — мгновенная термофоретическая скорость рассматриваемого дублета частиц. Тогда $\mathbf{U} = -Uk$, где $U = |\mathbf{U}|$, $\mathbf{k}$ — вектор базиса $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Неизвестную величину U мы рассматриваем как положительную непрерывную функцию на отрезке $[0, t_0]$. Граничные условия теплового скольжения на поверхностях частиц имеют вид [2]:

$$v_{r_j} = -U\cos\theta_j, \quad v_{\theta_j} = U\sin\theta_j + \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0 \rho_e a} \frac{\partial T_e}{\partial \theta_j}, \tag{2}$$

где K_{Tsl} — коэффициент теплового скольжения газовой среды, ρ_e — ее плотность, T_0 — невозмущенное внешним источником постоянного градиента температуры ∇T значение поля температуры внешней среды. Скорость $\mathbf{v}$ рассматривается как сумма [2] $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$, где $\mathbf{v}^{(j)}$ — возмущение поля скоростей, вызванное движением j-й частицы. Аналогичным образом $p = p_0 + p^{(1)} + p^{(2)}$, где p_0 — невозмущенное значение движения, $p^{(j)}$ — возмущение поля давления, вызванное движением j-й частицы. Вдали от частиц мы имеем условия $\lim \mathbf{v}^{(j)} = 0$, $\lim p^{(j)} = 0$ при $r_j \to \infty$. Пусть $\mathbf{F}^{(j)}$ — результирующая сила, действующая на j-ю частицу. Так как термофоретическое движение рассматривается как равномерное, то

$$\mathbf{F}^{(j)} = 0. \tag{3}$$

Основной целью данной работы является получение на основе приведенных уравнений и граничных условий формулы для скорости термофореза пары гидродинамически взаимодействующих однородных частиц с учетом скачка температуры на их поверхности, обобщающей соответствующей формулы для одиночной частицы и являющейся основой для последующих обобщений с учетом различных эффектов.

Решение уравнений теплопроводности

Возмущения $\varepsilon^{(j)}$ ищем в виде $\varepsilon^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{en}^{(j)} H_{-n-1}^{(j)}$, где $A_{en}^{(j)}$ — неопределенные коэффициенты, $H_{-n-1}^{(j)} = P_n^{(j)}/r_j^{n+1}$, $P_n^{(j)} = P_n(\cos\theta_j)$, P_n — многочлены Лежандра. Поля температур $T_i^{(j)}$ ищем в виде

$$T_i^{(1)} = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_{in}^{(1)} H_n^{(1)},$$

$$T_i^{(2)} = T_1 + |\nabla T| l + \sum_{n=0}^{\infty} A_{in}^{(2)} H_n^{2},$$

где $A_{in}^{(j)}$ — неопределенные коэффициенты, $H_n^{(j)} = r_j^n P_n^{(j)}$. Пусть

$$T_a = |\nabla T| a, \qquad A_{in}^{(1)} = T_a a^{-n} x_{in}^{(1)},$$

$$A_{in}^{(2)} = (-1)^n T_a a^{-n} x_{in}^{(2)}, \qquad A_{en}^{(1)} = T_a a^{n+1} x_{en}^{(1)},$$

$$A_{en}^{(2)} = (-1)^n T_a a^{n+1} x_{en}^{(2)},$$

где $x_{en}^{(j)}$, $x_{in}^{(j)}$ — неопределенные коэффициенты, тогда

$$T_i^{(1)} = T_1 + T_a \sum_{n=0}^{\infty} x_{in}^{(1)} (r_1/a)^n P_n^{(1)},$$

$$T_i^{(2)} = T_1 + |\nabla T| l + T_a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{in}^{(2)} (r_2/a)^n P_n^{(2)}.$$

Рассмотрим T_e в системе координат, связанной с первой частицей. Как известно [3], $(-1)^n H_{-n-1}^{(2)} = \sum\limits_{s=0}^{\infty} k_{sn} H_s^{(1)}$, где $k_{sn} = l^{-n-s-1} C_{n+s}^n$, $C_{n+s}^n = (n+s)!/(n!s!)$. Отсюда

$$T_e = T_1 + T_a \left[\frac{r_1}{a} P_1^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(2)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n t^{n+s+1} \left(\frac{r_1}{a}\right)^s P_s^{(1)} \right]. \tag{4}$$

Так как [3] $H_{-n-1}^{(1)} = \sum\limits_{s=0}^{\infty} k_{sn} (-1)^s H_s^{(2)}$, то в системе координат с центром в точке O_2

$$T_e = T_1 + |\nabla T| l + T_a \left[\frac{r_2}{a} P_1^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{en}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+1} P_n^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_{n+s}^n t^{n+s+1} \left(\frac{r_2}{a}\right)^s P_s^{(2)} \right]. \tag{5}$$

Так как $\frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \frac{\kappa_i}{\kappa_e} \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$, то из первой части условия (1) получим два уравнения:

$$P_1^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} P_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(2)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n t^{n+s+1} P_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{in}^{(1)} \left(1 + n \frac{C_T \lambda}{a\tau}\right) P_n^{(1)}, \tag{6}$$

$$P_1^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{en}^{(2)} P_n^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_{n+s}^n t^{n+s+1} P_s^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{in}^{(2)} \left(1 + n \frac{C_T \lambda}{a\tau}\right) P_n^{(2)}, \tag{7}$$

где $\tau = \kappa_e/\kappa_i$. Из второй части условия (1) получим еще два уравнения:

$$P_1^{(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} (n+1) P_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(2)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s}^n s t^{n+s+1} P_s^{(1)} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} x_{in}^{(1)} n P_n^{(1)}, \tag{8}$$

$$P_1^{(2)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{en}^{(2)} (n+1) P_n^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} x_{en}^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s s C_{n+s}^n t^{n+s+1} P_s^{(2)} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_{in}^{(2)} n P_n^{(2)}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что $x_{e0}^{(1)} = x_{e0}^{(2)} = 0$. Из (6) и (7) имеем $x_{i0}^{(1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{en}^{(2)} t^{n+1}$, $x_{i0}^{(2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{en}^{(1)} t^{n+1}$. Для решения тепловой части задачи достаточно найти векторы $X_e^{(j)} = (x_{e1}^{(j)}, x_{e2}^{(j)}, \dots)^T$, $X_i^{(j)} = (x_{i1}^{(j)}, x_{i2}^{(j)}, \dots)^T$. Векторы $X_e^{(j)}$, $X_i^{(j)}$ должны удовлетворять условиям: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{en}^{(j)}| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{in}^{(j)}| < +\infty$, поэтому их поиск будем вести в пространстве $l_1 = \{(x_1, x_2, \dots)^T | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty\}$, которое является полным нормированным (банаховым) пространством [4] с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, где $X = (x_1, x_2, \dots)^T$.

Покажем существование и единственность векторов $X_e^{(j)}$, $X_i^{(j)}$ в пространстве l_1. Пусть L — пространство ограниченных линейных операторов, действующих из l_1 в l_1. Пространство L является банаховым [4]. Норма оператора A, согласованная с нормой вектора X, определяется по формуле $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. Пусть $L_1^{(M)}$ — линейное пространство матриц с бесконечным числом строк и столбцов, элементы которых a_{sn} удовлетворяют условию: $\sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}| < \infty$. Пространство $L_1^{(M)}$ является нормированным с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Линейный оператор, действующий по формуле $Y = AX$, где $A \in L_1^{(M)}$, $X \in l_1$, является оператором из L с нормой $\|A\| = \sup_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Такой оператор будем называть матричным и обозначать через ту же букву A.

Пусть элементы матриц Λ_1, Λ_{-1}, M определены по формулам $(\Lambda_1)_{sn} = -s/(s+1)\delta_{sn}$, $(\Lambda_{-1})_{sn} = 1/s\delta_{sn}$, $(M)_{sn} = C_{n+s}^n t^{n+s+1}$, где $(A)_{sn}$ — элемент матрицы A с индексами s, n, а δ_{sn} — символ Кронекера. Ясно, что $\|\Lambda_1\| = 2$, $\|\Lambda_{-1}\| = 1$. Можно доказать, что $\|M\| \le t/(1-t)$, отсюда $\|M\| < 1$ при $\forall t \in [0, t_0]$. Пусть $E_1 = (1, 0, 0 \dots)^T \in l_1$, E — единичная матрица из $L_1^{(M)}$. В уравнениях (6)–(9) в повторных суммах можно поменять порядок суммирования. Приравняв коэффициенты при одинаковых многочленах Лагранжа, получим уравнения относительно неизвестных векторов $X_e^{(j)}$, $X_i^{(j)}$:

$$\Lambda_{-1} X_e^{(1)} + \Lambda_{-1} M X_e^{(2)} - \left(\Lambda_{-1} + \frac{C_T \lambda}{a\tau} E\right) X_i^{(1)} = -E_1, \tag{10}$$

$$\Lambda_{-1} X_e^{(2)} + \Lambda_{-1} M X_e^{(1)} - \left(\Lambda_{-1} + \frac{C_T \lambda}{a\tau} E\right) X_i^{(2)} = E_1, \tag{11}$$

$$\Lambda_1 X_e^{(1)} + M X_e^{(2)} - \frac{1}{\tau} X_i^{(1)} = -E_1, \tag{12}$$

$$\Lambda_1 X_e^{(2)} + M X_e^{(1)} - \frac{1}{\tau} X_i^{(2)} = E_1. \tag{13}$$

Определим бесконечную последовательность функций $\varphi_s(x)$, где $s \in N$:

$$\varphi_s(x) = \frac{1-x}{1+x+x/s}. \tag{14}$$

Ясно, что $-1 < \varphi_s(x) \le 1$. Определим матрицу Λ_e, элементы которой имеют вид

$$(\Lambda_e)_{sn} = \varphi_s\left(\tau + sC_T \frac{\lambda}{a}\right) \delta_{sn}. \tag{15}$$

Ясно, что $\|\Lambda_e\| \le 1$. Система (10)–(13) имеет единственное решение. Приведем только формулы для $X_e^{(j)}$:

$$X_e^{(1)} = -X_e^{(2)} = -\left(E - \Lambda_e M\right)^{-1} \Lambda_e E_1. \tag{16}$$

Если оператор A отображает банахово пространство в себя и $\|A\| < 1$, то оператор $E - A$ обратим [4], и $(E-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Так как $\|\Lambda_e M\| \le \|\Lambda_e\| \, \|M\| < 1$, то $E - \Lambda_e M$ обратим при $\forall t \in [0, t_0]$. Из формулы (16) следует, что $X_e^{(j)} \in l_1$. Перейдем к гидродинамической части задачи.

Решение уравнений гидродинамики

Как известно [3], в случае осесимметрического течения с осью Oz, обтекающего сферу, исчезающие на бесконечности поля скоростей и давления в случае отсутствия вращения сферы имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big[\nabla \Phi_{-n-1} - (n-2)/\big(2\eta n(2n-1)\big) r^2 \nabla p_{-n-1}$$

$$+ (n+1)/\big(\eta n(2n-1)\big) \mathbf{r} p_{-n-1}\big],$$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}$, где Φ_{-n-1}, p_{-n-1} — гармонические функции, представлющие собой в выбранной системе координат объемные сферические гармоники порядка — $(n+1)$, умноженные на неопределенные коэффициенты.

Если коэффициенты при Φ_{-n-1} и p_{-n-1} искать в виде A_n и $B_n \eta n(2n-1)/(n+1)$, то исчезающие на бесконечности поля скоростей и давления имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + \alpha_n B_n r^2) \nabla H_{-n-1} + B_n \mathbf{r} H_{-n-1}\right]$$

и

$$\eta \sum_{n=1}^{\infty} B_n n(2n-1)/(n+1) H_{-n-1},$$

где $\alpha_n = 0.5(2-n)/(n+1)$. Исходя из этих соображений поля $\mathbf{v}^{(j)}$, $p^{(j)}$ ищем в виде

$$\mathbf{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n^{(j)} + \alpha_n B_n^{(j)} r_j^2\right) \nabla H_{-n-1}^{(j)} + B_n^{(j)} \mathbf{r}_j H_{-n-1}^{(j)}\right],$$

$$p^{(j)} = \eta \sum_{n=1}^{\infty} n(2n-1)/(n+1) B_n^{(j)} H_{-n-1}^{(j)},$$

где $A_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$ — неопределенные коэффициенты. Пусть $\mathbf{i}_r^{(j)} = \mathbf{r}_j / r_j$, $\upsilon_j = (\mathbf{v}, \mathbf{i}_r^{(j)})$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение,

$$A_n^{(1)} = Ua^{n+2}a_n^{(1)}, \quad A_n^{(2)} = (-1)^n Ua^{n+2}a_n^{(2)},$$

$$B_n^{(1)} = Ua^n b_n^{(1)}, \quad B_n^{(2)} = (-1)^n Ua^n b_n^{(2)}, \tag{17}$$

где $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$ — неопределенные коэффициенты, $\beta_{sn} = [n - 1.5 + 1.5/(n+1)]/(2s+3)$, $\gamma_{sn} = -(s - 0.5 + 1.5/(n+1) - s(s+1)/(n+s))/(2s-1)$. Для v_1 и v_2 справедливы следующие разложения:

$$v_1 = U\sum_{n=1}^{\infty}\left[-(n+1)\left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+2} a_n^{(1)} + \frac{n}{2}\left(\frac{a}{r_1}\right)^n b_n^{(1)}\right]P_n^{(1)}$$

$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} C_{n+s}^n t^{n+s+1} s\left(\frac{r_1}{a}\right)^{s-1}$$

$$\times\left[a_n^{(2)} + b_n^{(2)}\left(\beta_{sn}\left(\frac{r_1}{a}\right)^2 + \frac{\gamma_{sn}}{t^2}\right)\right]P_s^{(1)}, \tag{18}$$

$$v_2 = U\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[-(n+1)\left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+2} a_n^{(2)} + \frac{n}{2}\left(\frac{a}{r_2}\right)^n b_n^{(2)}\right]P_n^{(2)}$$

$$+ U\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s C_{n+s}^n t^{n+s+1} s\left(\frac{r_2}{a}\right)^{s-1}$$

$$\times\left\{a_n^{(1)} + b_n^{(1)}\left[\beta_{sn}\left(\frac{r_2}{a}\right)^2 + \frac{\gamma_{sn}}{t^2}\right]\right\}P_s^{(2)}. \tag{19}$$

Из граничных условий (2) следует, что распределения скоростей на поверхностях частиц $\mathbf{v}_a^{(j)}$ в соответствующих сферических системах координат (r, θ, φ) должны иметь вид

$$\mathbf{v}_a^{(j)}(\theta_j) = U\left(-\cos\theta_j, \sin\theta_j + K/T_a\frac{\partial T_e}{\partial\theta_j}, 0\right),$$

где

$$K = \frac{K_{Tsl}\eta}{UT_0\rho_e}\left|\nabla T\right|. \tag{20}$$

Как известно [3], проверку условия (2) можно свести к проверке следующих условий на поверхностях обеих частиц:

$$v_j = \left(\mathbf{i}_r^{(j)}, \mathbf{v}_a^{(j)}\right), \quad r_j\frac{\partial v_j}{\partial r_j} = -r_j\left(\nabla, \mathbf{v}_a^{(j)}\right). \tag{21}$$

Условия (21) можно переписать в виде

$$v_j = -U\cos\theta_j,$$

$$r_j\frac{\partial v_j}{\partial r_j} = -\frac{KU}{T_a}\frac{1}{\sin\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin\theta_j\frac{\partial T_e}{\partial\theta_j}\right). \tag{22}$$

При подстановке разложений (18), (19), (4), (5) в условия (22) воспользуемся тождеством [5]

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)\right) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0.$$

Так же как в тепловой части задачи, из условий (22) получим уравнения относительно неопределенных коэффициентов. Запишем эти уравнения в матричном виде. Пусть $A^{(j)} = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots)^T$, $B^{(j)} = (b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \ldots)^T$. Ясно, что эти векторы должны удовлетворять условиям: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(j)}| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n^{(j)}| < +\infty$, поэтому их поиск также будем вести в пространстве l_1 и покажем существование и единственность решения. Определим матрицы Λ_2, Λ_3, M_β, M_γ по следующим формулам: $(\Lambda_2)_{sn} = (s+2)/s\,\delta_{sn}$, $(\Lambda_3)_{sn} = (s-1)/(s+1)\,\delta_{sn}$, $(M_\beta)_{sn} = C_{n+s}^n t^{n+s+1}\beta_{sn}$, $(M_\gamma)_{sn} = C_{n+s}^n t^{n+s-1}\gamma_{sn}$, где $s, n \in N$. Ясно, что $\|\Lambda_2\| = 3$, $\|\Lambda_3\| = 1$. Покажем, что матрицы M_β, M_γ при любом $t \in [0, t_0]$ являются элементами линейного нормированного пространства матриц $L_2^{(M)}$ с нормой $\|A\|_2 = \sum_{s,n=1}^{\infty}|a_{sn}|$. Ясно, что $L_2^{(M)}$ является подмножеством $L_1^{(M)}$ и $\|A\| \le \|A\|_2$. Рассмотрим множество матриц A, элементы которых могут быть представлены в виде:

$$a_{sn} = P(s,n)/Q(s,n)C_{n+s}^n t^{n+s-1+q}, \tag{23}$$

где $P(s,n)$, $Q(s,n)$ — некоторые многочлены относительно s и n, $Q(s,n) \ge 1$ при всех индексах s, n, a $q \ge 0$. Покажем, что такая матрица принадлежит $L_2^{(M)}$ при любом $t \in [0, t_0]$. По теореме Дирихле для двойных рядов $\|A\|_2$ не зависит от порядка суммирования, и можно применить диагональный порядок суммирования:

$$\|A\|_2 = \sum_{s,n=1}^{\infty}|a_{sn}| = \sum_{i=2}^{\infty}t^{i-1+q}\sum_{s+n=i}|P(s,n)/Q(s,n)|C_i^n.$$

Пусть α — степень многочлена $P(s,n)$. Существует $C > 0$, что $|P(s,n)/Q(s,n)| \le C(s+n)^\alpha$ при всех $s, n \in N$. Тогда

$$\sum_{s+n=i}|P(s,n)/Q(s,n)|C_i^n \le Ci^\alpha\sum_{s+n=i}C_i^n$$

$$= Ci^\alpha\sum_{n=1}^{i-1}C_i^n \le Ci^\alpha\sum_{n=0}^{i}C_i^n = Ci^\alpha 2^i.$$

Радиус сходимости ряда $\sum_{i=2}^{\infty}Ci^\alpha 2^i i^{i-1+q}$ равен 0.5. Следовательно, $\|A\|_2 = \sum_{s,n=1}^{\infty}|a_{sn}|$ является равномерно сходящимся рядом на отрезке $[0, t_0]$. Множество матриц с элементами вида (23) замкнуто относительно умножения слева или справа на диагональную матрицу Λ, элементы которой имеют вид $(\Lambda)_{ss} = P(s)/Q(s)$, где $P(s)$, $Q(s)$ — некоторые многочлены относительно s и $Q(s) \ge 1$ при всех s. Отсюда следует, что матрицы M, M_β, M_γ, $\Lambda_1^{-1}M$, $M\Lambda_1^{-1}$, $\Lambda_e M$, $M\Lambda_e$ принадлежат $L_2^{(M)}$.

Уравнения относительно неизвестных векторов $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ могут быть записаны в виде

$$\Lambda_1 A^{(1)} + 0.5B^{(1)} + MA^{(2)} + (M_\beta + M_\gamma)B^{(2)} = -E_1,$$

$$\Lambda_1 A^{(2)} + 0.5B^{(2)} + MA^{(1)} + (M_\beta + M_\gamma)B^{(1)} = E_1,$$

$$\Lambda_2 A^{(1)} + 0.5\Lambda_1^{-1}B^{(1)} + \Lambda_3 MA^{(2)} + (M_\beta + \Lambda_3 M_\gamma)B^{(2)} = K\left[E_1 + (E - M)X_e^{(1)}\right],$$

$$\Lambda_2 A^{(2)} + 0.5\Lambda_1^{-1}B^{(2)} + \Lambda_3 MA^{(1)} + (M_\beta + \Lambda_3 M_\gamma)B^{(1)} = -K\left[E_1 + (E - M)X_e^{(1)}\right].$$

Эта система имеет единственное решение. Приведем только формулу для векторов $B^{(j)}$:

$$B^{(j)} = (-1)^j \left[(E - R^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_1^{-1})(E - M\Lambda_1^{-1})^{-1} - K(E - R^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_e)(E - M\Lambda_e)^{-1}\right]E_1, \tag{24}$$

где

$$R^- = \Lambda_5 M_\beta + \Lambda_6 M_\gamma - \Lambda_6 M\Lambda_1^{-1}\left(E - M\Lambda_1^{-1}\right)^{-1}(0.5E - M_\beta - M_\gamma), \tag{25}$$

а элементы диагональных матриц Λ_4, Λ_5, Λ_6 определяются по формулам $(\Lambda_4)_{sn} = (s+1)\delta_{sn}$, $(\Lambda_5)_{sn} = (2s+3)\delta_{sn}$, $(\Lambda_6)_{sn} = (2s+1)\delta_{sn}$, $s, n \in N$.

Так как $\|M\Lambda_1^{-1}\| \le \|M\|\,\|\Lambda_1^{-1}\| < 1$, то оператор $E - M\Lambda_1^{-1}$ обратим. Можно показать, что $\|R^-\| < 1$ при всех $t \in [0, t_0]$, следовательно, $(E - R^-)^{-1}$ также существует. Ясно, что $B^{(j)} \in l_1$ при всех $t \in [0, t_0]$. Перейдем к выводу основных формул на основе найденных решений.

Формулы для сил и термофоретической скорости

Как известно [2,3], результирующая сила, действующая на j-ю частицу, равна $\mathbf{F}^{(j)} = -4\pi\nabla(r_j^3\Psi_{-2}^{(j)})$, где $\Psi_{-2}^{(j)} = 0.5\eta B_1^{(j)}H_{-2}^{(j)}$. Так как из формул (17) следует, что $B_1^{(j)} = (-1)^{j+1}Uab_1^{(j)}$, то

$$\mathbf{F}^{(j)} = (-1)^j 2\pi\eta aUb_1^{(j)}\mathbf{k}. \tag{26}$$

Определим матричный оператор, действующий из l_1 в R по формуле $y = E_1^T X$, где $E_1^T = (1, 0, 0, \ldots)$, $X = (x_1, x_2, 0.0.\ldots)^T \in l_1$, $y \in (-\infty, +\infty)$. Пусть

$$f(t, \Lambda_e) = E_1^T(E - R^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_e)(E - M\Lambda_e)^{-1}E_1. \tag{27}$$

В матричных обозначениях $f(t, \Lambda_e) = [(E - R^-)^{-1} \times \Lambda_4(E - \Lambda_e)(E - M\Lambda_e)^{-1}]_{11}$, т.е. является элементом с индексами 1, 1 матрицы $(E - R^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_e) \times (E - M\Lambda_e)^{-1}$. Функция $f(t, \Lambda_e)$ является непрерывной на отрезке $[t, t_0]$. Найдем значение этой функции при уменьшении гидродинамического взаимодействия между частицами

$$\lim_{l\to\infty} f(t, \Lambda_e) = \lim_{t\to 0} f(t, \Lambda_e) = f(0, \Lambda_e) = E_1^T\Lambda_4(E - \Lambda_e)E_1 = 2(1 - E_1^T\Lambda_e E_1) = 2\big(1 - \varphi_1(\tau + C_T\lambda/a)\big), \tag{28}$$

где $\varphi_s(x)$ определяется по формуле (14). Найдем предельное значение функции $f(t, \Lambda_e)$ при стремлении коэффициента теплопроводности частицы к нулю. Так как $\lim\limits_{\tau\to\infty}\Lambda_e = \Lambda_1^{-1}$ в смысле сходимости в $L_1^{(M)}$, то

$$\lim_{\kappa_i\to 0} f(t, \Lambda_e) = \lim_{\tau\to\infty} f(t, \Lambda_e) = f(t, \Lambda_1^{-1}) \tag{29}$$

в смысле равномерной сходимости по t на отрезке $[0, t_0]$.

Наконец, найдем предельное значение функции $f(t, \Lambda_e)$ при стремлении коэффициента теплопроводности частицы к нулю и уменьшении гидродинамического взаимодействия между частицами

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{\kappa_i\to 0} f(t, \Lambda_e) = \lim_{t\to 0}\lim_{\tau\to\infty} f(t, \Lambda_e) = f(0, \Lambda_1^{-1}) = 3. \tag{30}$$

Пусть

$$f_{th}(t, \Lambda_e) = \frac{f(t, \Lambda_e)}{f(0, \Lambda_e)} = \frac{f(t, \Lambda_e)}{2[1 - \varphi_1(\tau + C_T\lambda/a)]},$$

$$f_{st}(t) = \frac{f(t, \Lambda_1^{-1})}{f(0, \Lambda_1^{-1})} = \frac{f(t, \Lambda_1^{-1})}{3}. \tag{31}$$

Ясно, что $f_{st}(t) = \lim\limits_{\kappa_i\to 0} f_{th}(t, \Lambda_e) = \lim\limits_{\tau\to\infty} t_{th}(t, \Lambda_e)$ в смысле равномерной сходимости по t на отрезке $[0, t_0]$.

Так как $b_1^{(j)} = E_1^T B^{(j)}$, то на основании формулы (24) представим формулу (26) в следующем виде:

$$\mathbf{F}^{(j)} = 2\pi\eta a\left[3Uf_{st}(t) - 2\,\frac{K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{T_0\rho_e} \times \left(1 - \varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right)f_{th}(t, \Lambda_e)\right]\mathbf{k}. \tag{32}$$

Сила $\mathbf{F}^{(j)}$ равна сумме двух сил: силы Стокса $\mathbf{F}_{st}^{(j)}$ и термофоретической силы $\mathbf{F}_{th}^{(j)}$:

$$\mathbf{F}_{st}^{(j)} = 6\pi\eta aUf_{st}(t)\mathbf{k}, \tag{33}$$

$$\mathbf{F}_{th}^{(j)} = -4\pi\eta^2 a\,\frac{K_{Tsl}}{T_0\rho_e}\left[1 - \varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right]f_{th}(t, \Lambda_e)\nabla T. \tag{34}$$

Из условия (3) получим

$$\mathbf{U} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho_e}\left[1 - \varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right]\frac{f_{th}(t, \Lambda_e)}{f_{st}(t)}\,\nabla T. \tag{35}$$

Так как $f_{th}(0, \Lambda_e) = f_{st}(0) = 1$, то при $t = 0$ из формулы (35) можно получить формулу для скорости $\mathbf{U}_1$ одиночной однородной частицы [1]:

$$\mathbf{U}_1 = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho_e}\left[1 - \varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right]\nabla T. \qquad (36)$$

Из (35), (36) получим формулу для поправки u к скорости $\mathbf{U}_1$:

$$u(t) = \frac{f_{th}(t, \Lambda_e)}{f_{st}(t)}. \qquad (37)$$

Из формул (33) и (34) следует, что $f_{st}(t)$ — поправка на закон Стокса, а $f_{th}(t, \Lambda_e)$ — на силу термофореза. Приведенные формулы являются точными. Так как они выражены через бесконечномерные операторы, то перейдем к приближенным формулам. Отметим, что если в формуле (35) в матрицах пренебрегать элементами вида $o(t^3)$, то

$$\mathbf{U} = -\frac{2K_{Tsl}\eta}{3T_0\rho_e}\left[1 - \varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right]$$
$$\times\left[1 + t^3\left(1 + 2\varphi_1\left(\tau + C_T\,\frac{\lambda}{a}\right)\right)\right]\nabla T.$$

Формулы для приближенных вычислений

Как известно [6], матрица A называется блочной, если ее элементы одной или несколькими горизонтальными и вертикальными линиями распределены по прямоугольным блокам. Эти блоки обозначаются через A_{ij}, где i — номер блочной строки, j — номер блочного столбца. Матрица называется блочно-диагональной, если все ее блоки на главной диагонали квадратные, а остальные блоки состоят из нулей. Пусть $k \in N$, а $L_{b,k}^{(M)}$ — класс блочно-диагональных матриц, состоящих из двух диагональных блоков следующего вида: A_{11} — некоторая конечная матрица размером $k \times k$, A_{22} — диагональная матрица из $L_1^{(M)}$. Класс $L_{b,k}^{(M)}$ — подмножество класса $L_1^{(M)}$, он замкнут относительно операций умножения на число, сложения и умножения матриц, а если $A \in L_{b,k}^{(M)}$ и $\|A\| < 1$, то $(E - A)^{-1} \in L_{b,k}^{(M)}$, для обращения матрицы $E - A$ достаточно обратить ее диагональные блоки.

В формуле (27) фигурирует первый диагональный элемент некоторой бесконечной матрицы. Если эту матрицу заменить для приближенных вычислений некоторой матрицей из $L_{b,k}^{(M)}$ при некотором $k \in N$, то у последней матрицы достаточно найти ее первый диагональный блок. Для матрицы A, элементы которой имеют вид (23), определим при $\forall k \geq 3$ матрицу $A^{[k]}$, которая получена от матрицы A путем обнуления всех элементов a_{sn} при $s + n \geq k$ и матрицу $A^{\{k\}} = A - A^{[k]}$. Тогда $A = A^{[k]} + A^{\{k\}}$, $A^{[k]} \in L_{b,k-2}^{(M)}$, $A^{\{k\}} \in L_2^{(M)}$ при любом $t \in [0, t_0]$. Так как $A^{\{k\}} \to 0$ в $L_2^{(M)}$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [0, t_0]$, то при $k \to \infty$ $A^{[k]} \to A$ в $L_1^{(M)}$ равномерно по $t \in [0, t_0]$.

Заменим в формуле (27) матрицы M, M_β, M_γ на матрицы $M^{[k]}$, $M_\beta^{[k]}$, $M_\gamma^{[k]}$. Пусть

$$R_k^- = \Lambda_5 M_\beta^{[k]} + \Lambda_6 M_\gamma^{[k]}$$
$$- \Lambda_6 M^{[k]}\Lambda_1^{-1}\big(E - M^{[k]}\Lambda_1^{-1}\big)^{-1}\big(0.5E - M_\beta^{[k]} - M_\gamma^{[k]}\big).$$

У этой матрицы второй диагональный блок равен нулю, и можно показать, что $R_k^- \to R$ в $L_1^{(M)}$ равномерно по $t \in [t, t_0]$.

Матрицы $(E - R_k^-)^{-1}\Lambda_4\,(E - \Lambda_1^{-1})(E - M^{[k]}\,\Lambda_1^{-1})^{-1}$, $(E - R_k^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_e)(E - M^{[k]}\Lambda_e)^{-1}$ являются блочно-диагональными. Достаточно найти их первые диагональные блоки. При $k \geq 3$ искомые блоки выражаются через первые диагональные с размерами $(k-2) \times (k-2)$ соотвтетствующих матриц. Пусть

$$f_{st}^{[k]}(t) = \frac{1}{3}\Big[(E - R_k^-)^{-1}\Lambda_4\big(E - \Lambda_1^{-1}\big)\big(E - M^{[k]}\Lambda_1^{-1}\big)^{-1}\Big]_{11}, \qquad (38)$$

$$f_{th}^{[k]}(t, \Lambda_e) = \frac{[(E - R_k^-)^{-1}\Lambda_4(E - \Lambda_e)(E - M^{[k]}\Lambda_e)^{-1}]_{11}}{2[1 - \varphi_1(\tau + C_T\lambda/a)]}, \qquad (39)$$

$$u^{[k]} = \frac{f_{th}^{[k]}(t, \Lambda_e)}{f_{st}^{[k]}(t)}. \qquad (40)$$

Функции, построенные по формулам (38)–(40), с ростом k стремятся к соответствующим точным функциям равномерно на отрезке $[0, t_0]$. В связи с быстрой сходимостью в этой задаче можно реализовать следующую эмпирическую процедуру. Выполнив вычисления с некоторым достаточно малым шагом Δt, построим график зависимости изучаемой величины t на отрезке $[0, t_0]$ при каком-то значении $k \geq 3$ (k при этом входит в программу вычислений как параметр). Увеличив k, можно убедиться, что график рассматриваемой зависимости, начиная с некоторого номера k_0, практически не меняется.

Хотя графики можно считать установившимися и при меньших значениях k_0, расчеты в данной работе мы проводили с помощью программы Excel при предельном для этой программы значении $k = 54$. Это означает, что в матрицах M, M_β обнуляются элементы вида $o(t^{55})$, а в матрице M_γ — элементы вида $o(t^{53})$. Поправки к закону Стокса, вычисленные по формуле (38), совпадают с поправками, приведенными в работе [3]. Значение $f_{st}^{[k]}$, вычисленное по формуле (38) при предельном значении $t = t_0 = 0.4975$ равно 0.6457.

Мы считали, что $t \in [0, t_0]$, но по формуле (38) можно оценить и предельное значение f_{st} в случае касающихся частиц. Значение $f_{st}^{[k]}$, вычисленное по формуле (38) при соответствующем значении $t = 0.5$, равно 0.6451 (приведенное в работе [3] значение равно 0.645). В работе [7] для одиннадцати значений $l/a = 1/t$ и трех значений

$\tau = 0.1$; 0.04; 0.01 приведены значения u. Отклонение этих значений от соответствующих значений u, вычисленных по формуле (40), соответствует погрешности вычислений в работе [7].

Заключение

Из формул (33)–(35) можно получить известные результаты. Приближенные значения $f_{st}^{[k]}$ и $u^{[k]}$, вычисленные по формулам (38) и (40) при $k = 54$, близки к известным. Формулы (33)–(35) обобщают известные результаты с учетом скачка температуры на поверхностях частиц. Таким образом, описанный метод можно применить для дальнейшего обобщения известных результатов. Отметим также, что этим методом можно решать задачи и с учетом объемных особенностей частиц.

Список литературы

[1] *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных средах. Ер.:Луйс, 1985. С. 208.

[2] *Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н.* Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337–341.

[3] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.

[4] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

[5] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1953. 379 с.

[6] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1970. 384 с.

[7] *Мелехов А.П.* Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц: Автореф. канд. дисс. М., 1985.