

01;04

## Упрощенный метод описания эволюции температуры плазмы токамака с нарастающим магнитным островом

© Н.Н. Сперанский

Государственный научный центр Российской Федерации  
Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
142190 Троицк, Московская область, Россия  
e-mail: nsperanskii@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 19 апреля 2005 г. В окончательной редакции 4 апреля 2006 г.)

Описан новый простой метод решения уравнения теплопроводности с учетом теплопереноса вдоль силовых линий в плазме токамака с нестационарным магнитным островом. Метод, проиллюстрированный на простейшем численном примере, позволяет свести трехмерную задачу эволюции температуры плазмы токамака в присутствии нескольких магнитных островков к системе одномерных уравнений.

PACS: 52.55.Fa

### Введение

Статья посвящена упрощению численного моделирования процесса термоизоляции плазмы в установках токамак. Вопрос о термоизоляции высокотемпературной плазмы токамака является важнейшим при создании термоядерного реактора. Термоизоляция плазмы токамака существенно нарушается возникающими в плазме магнитными островками: винтовыми магнитными образованиями с собственной магнитной осью. Появление таких островков может приводить к явлению срыва: неожиданному и относительно быстрому выбрасыванию горячей плазмы на стенку камеры, охлаждению всего шнура и затуханию электрического тока плазмы. Явление срыва неприемлемо для токамака как термоядерного реактора.

До сих пор задача о перераспределении температуры плазмы в присутствии магнитных островов решалась посредством трехмерных и двумерных кодов применительно к задаче о срыве со многими островами [1,2] и в целях исследования перераспределения тепла в окрестности уединенного острова [3].

В данной работе аналогичная задача решается методом разложения на винтовые фурье-гармоники. Это позволяет использовать в численном решении одномерный код, что значительно упрощает задачу описания перераспределения тепла в плазме винтовыми возмущениями. Препятствием к использованию этого метода до сих пор служило то, что в уравнении теплопроводности слагаемое, описывающее перенос тепла вдоль силовых линий, в линейном приближении содержит особенность. Эта особенность снимается, если учесть дополнительные нелинейные слагаемые.

Задача о распределении тепла в магнитном острове может быть решена посредством учета всего двух винтовых гармоник температуры. При этом учитываются необходимые нелинейные слагаемые. В результате такого упрощенного описания наблюдается эффект выравнивания тепла вдоль силовых линий магнитного

острова, который известен из двумерного решения [3]. Степень точности метода, когда учитываются две гармоники температуры, иллюстрируется посредством учета следующей, третьей, гармоники температуры.

Новый метод решения уравнения теплопроводности будет проиллюстрирован через решение задачи о развитии запертой моды. Под запертой модой в физике токамаков понимают вынужденное плазменное возмущение, которое развивается под действием внешних стационарных возмущений, останавливающих вращение плазменного шнура [4]. Для наибольшей простоты задачи не будем учитывать вращение магнитного острова. Будем считать, что остановка вращения уже произошла, и в плазме развивается магнитный остров. Смысл выбранной иллюстрации в том, чтобы смоделировать большой магнитный остров, при котором нелинейность задачи существенна, и поэтому возможные недостатки предложенного метода должны быть наиболее выражены. Актуальность такого примера связана с тем, что запертая мода приводит к срыву в токамаке [5–7].

Задача о развитии запертой моды — это фактически задача эволюции плазмы токамака совместно с развитием винтовых возмущений. Развитый здесь простой метод решения уравнения теплопроводности применим, если на конечное число фурье-гармоник разложен и возмущенный магнитный поток винтового возмущения.

Общеизвестный простой метод Резерфорда, позволяющий описывать квазистационарный рост магнитных островов винтовых гармоник [8,9], наибольшее распространение получил применительно к случаю, когда в гармоническом разложении магнитного потока учитывается лишь одна винтовая гармоника.

Скорость роста магнитного острова запертой моды может быть произвольной, так как она индуцирована внешним возмущением. Поэтому, в отличие от метода Резерфорда, будем учитывать инерцию в уравнении движения и возмущенную скорость в законе Ома, но при этом будем пользоваться тем же квазилинейным подходом, что и в методе Резерфорда, когда магнитный

поток складывается из нулевой и первой винтовой гармоник. Нелинейность задачи будет учитываться через нелинейное влияние первой гармоники магнитного потока на нулевую.

В силу дополнительного учета инерции и скорости движения вещества в законе Ома точность такого подхода должна быть выше точности подхода Резерфорда. Приведем два варианта решения нашей задачи, которые различаются тем, что в них выбрано различное число гармоник плазменных величин. О степени точности решения будем судить по вкладу высших гармоник. Для простоты пренебрежем кривизной плазменного шнура: будем моделировать плазменный шнур прямым круглым цилиндром с отождествленными концами.

В первом простейшем случае разложения на гармоники полоидальный магнитный поток внутри цилиндрической камеры токамака представим в виде суммы двух гармоник

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha = m\theta - n\xi$ ,  $\theta$  — полоидальный и  $\xi$  — тороидальный углы, вычисляемые относительно камеры токамака,  $m$  и  $n$  — полоидальное и тороидальное числа. Гармоники потока (1) являются функциями малого радиуса  $r$ , вычисляемого от заданной в пространстве оси камеры. Магнитное поле, в которое входит поток (1), зададим по формуле

$$\mathbf{B} = B_\xi \mathbf{n}_\xi + \frac{1}{R} [\nabla \psi \mathbf{n}_\xi], \quad (2)$$

где  $B_\xi$  — тороидальное поле,  $\mathbf{n}_\xi$  — орг вдоль оси цилиндра,  $R$  — большой радиус, который в нашем приближении является постоянной величиной.

Температуру представим в виде трех гармоник

$$T = T_0 + T_1 \cos \alpha + T_2 \cos 2\alpha. \quad (3)$$

То, что в (1), (3) выбирается разное число гармоник, не существенно. Так же разное число гармоник магнитного потока и температуры выбираются в [3].

Во втором случае разложения увеличим точность описания распределения тепла и винтового возмущения. Будем полагать, что

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos \alpha + \psi_2 \cos 2\alpha. \quad (4)$$

Температуру представим четырьмя гармониками

$$T = T_0 + T_1 \cos \alpha + T_2 \cos 2\alpha + T_3 \cos 3\alpha. \quad (5)$$

Далее будет показано, что даже в присутствии достаточно большого внешнего стационарного возмущения размер магнитного острова первой гармоники и распределение плазменного тепла слабо зависят от того, выбираются ли разложение (1), (3) или (4), (5). Для описания перераспределения тепла винтовой модой достаточно использовать разложение (1), (3).

## Система уравнений

Будем пользоваться стандартными уравнениями магнитной гидродинамики, принятыми для описания винтовых возмущений в плазменном цилиндре. Скорость представим в виде

$$\mathbf{v} = R[\nabla u \mathbf{n}_\xi], \quad (6)$$

где поток скорости  $u$  — величина, пропорциональная возмущенному электрическому потенциалу.

Спроецировав гидродинамическое уравнение движения электронов на силовую линию и опустив слагаемые, обязанные инерции, вязкости и неоднородности давления, получим уравнение для полоидального магнитного потока

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{R}{r} \left( \psi' \frac{\partial y}{\partial \theta} - u' \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + I \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{cR}{\sigma} J, \quad (7)$$

где  $J$  — тороидальный ток плазмы,  $c$  — скорость света,  $\sigma$  — проводимость плазмы, штрих обозначает производную по малому радиусу.

Согласно закону Максвелла,

$$J = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \psi}{R} \right). \quad (8)$$

Основной нелинейный эффект квазилинейного приближения связан с нелинейным вкладом в (7) первых гармоник величин  $\psi$  и  $u$  в нулевую гармонику.

Взяв тороидальную проекцию ротора от одножидкостного уравнения движения, получим уравнение

$$m_i n c \frac{d}{dt} w = \left\{ -\frac{\psi'}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} + \frac{I}{R} \frac{\partial J}{\partial \xi} + \frac{J'}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} + \eta_\perp \Delta w, \quad (9)$$

где  $m_i$  — масса ионов,  $n$  — концентрация плазмы, которую полагаем постоянной во всей расчетной области,  $I = RB_\xi$ ,  $\eta_\perp$  — поперечная вязкость. При этом

$$w = -R \nabla_\perp (R \nabla u), \quad (10)$$

где  $\nabla_\perp$  — градиент без тороидальной составляющей.

Будем полагать, что температура ионов и электронов одинакова. Уравнение для температуры плазмы запишем в виде

$$\frac{3}{2} n \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla T) \right) = \nabla \mathbf{q}_\parallel + \nabla (K_\perp \nabla T) + \frac{J^2}{\sigma}, \quad (11)$$

$$\mathbf{q}_\parallel = K_\parallel (\mathbf{b} \nabla T) \mathbf{b}, \quad (12)$$

где  $K_\perp$  — коэффициент теплопроводности Мерзкина–Мухоматова [10], несколько видоизмененный у магнитной оси,  $\mathbf{b}$  — единичный вектор вдоль магнитного поля,  $K_\parallel$  — классический электронный коэффициент теплопереноса вдоль силовых линий, ограниченный при  $T = 150$  eV. Аналогичное ограничение использовано в [2], оно моделирует ограничение коэффициента  $K_\parallel$  вследствие неклассических эффектов и одновременно облегчает численный расчет. В связи с тем, что  $K_\parallel$  является функцией температуры, его дифференцирование в (11) приведет к появлению слагаемого порядка  $(\mathbf{b} \nabla T)^2$ , которое опустим как малое.

## Гармоническое разложение уравнения (11)

Система уравнений (6)–(11) должна быть разложена в первом случае на гармоники (1), (3), во втором — на (4), (5). Гармоническое разложение уравнений (6)–(10) проводилось ранее в [11]. Оно достаточно просто. Проблему составляет разложение слагаемого, обязанного параллельному теплопереносу в (11) на гармоники (1), (3).

Слева в (11) входит скорость плазмы (6). Поток скорости плазмы  $u$  для случая разложения (1), (3) представляется в виде

$$u = u_1 \sin \alpha, \quad (13)$$

для разложения (4), (5) в виде

$$u = u_i \sin \alpha + u_2 \sin 2\alpha. \quad (14)$$

Подробно остановимся на слагаемом справа, описывающем перенос тепла вдоль силовых линий. При достаточно медленных движениях в уравнении (11) оно является главным.

Приравняв это слагаемое к нулю, мы могли бы записать линейное решение для возмущенной температуры в виде

$$T_1 = -\frac{m\psi_1}{\lambda r I} T'_0, \quad (15)$$

где  $\lambda = \frac{m}{r} b_0 - \frac{n}{R}$ ,  $T_0$  — нулевая гармоника температуры,  $b_0 = -\frac{\psi'_0}{I}$ .

Для винтовых мод решение (15) имеет особенность на резонансной поверхности, где  $\lambda = 0$ . Это не позволяет ограничиться линейным приближением (15). Чтобы преодолеть эту особенность, следует более корректно представить слагаемое с параллельным переносом. Для этого и производится учет второй гармоники в разложении (3). Появляющиеся при этом нелинейные слагаемые устраняют особенность решения (15).

Разложим поток вдоль силовых линий с учетом (1), (3). При этом

$$b_\theta = b_0 - \frac{\psi'_1}{I} \cos \alpha,$$

$$b_r = -\frac{m\psi_1}{rI} \sin \alpha, \quad b_{\xi=1}.$$

Модуль (12) запишем в виде

$$|\mathbf{q}_\parallel| = K_\parallel (\mathbf{b} \nabla T) = A_1 \sin \alpha \sin \alpha + A_2 \sin 2\alpha, \quad (16)$$

где

$$A_1 = K_\parallel \left\{ -\left( \lambda T_1 + \frac{m\psi_1}{rI} T'_0 \right) + \frac{m}{2rI} (2\psi'_1 T_2 + \psi_1 T'_2) \right\}, \quad (17)$$

$$A_2 = K_\parallel \left\{ -2\lambda T_2 + \frac{m}{2rI} (\psi'_1 T_1 - \psi_1 T'_1) \right\}. \quad (18)$$

Тогда дивергенция потока вдоль силовых линий в (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla(|\mathbf{q}_\parallel| \mathbf{b}) = & -\frac{m}{2rI} \frac{d}{dr} (\psi_1 A_1) \\ & + \left\{ \lambda A_1 - \frac{m}{2r} I (\psi_1 A'_2 + 2\psi'_1 A_2) \right\} \cos \alpha \\ & + \left\{ 2\lambda A_2 - \frac{m}{2rI} (\psi'_1 A_1 - \psi_1 A'_1) \right\} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

После подстановки (19) в (11) уравнение (11) легко разлагается на систему уравнений для гармоник (3), которые связаны за счет параллельного теплопереноса. Поскольку здесь рассматривается параллельный перенос в цилиндрическом приближении, то использовалось условие  $\nabla \mathbf{b} = 0$ .

Случай, когда дивергенция потока (12) раскладывается с учетом гармоник (4), (5), приведен в Приложении.

В стационарном случае, чтобы все три компоненты (19) обратились в нуль, достаточно

$$A_1 = A_2 = 0. \quad (20)$$

Условие (20) позволяет исключить  $T_2$  и получить уравнение лишь для  $T_1$ . Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{m\psi_1}{2rI} \right)^2 T''_1 + \frac{m^2}{8r^2 I^2} \psi_1 \left[ 2\psi'_1 - \frac{\psi_1}{r} - \frac{\psi_1 \lambda'}{\lambda} \right] T'_1 \\ - \frac{m^2}{8r^2 I^2} \left[ \psi_1 \left( \psi''_1 - \frac{\psi'_1}{r} - \frac{\lambda'}{\lambda} \psi'_1 \right) + 2(\psi'_1)^2 \right] T_1 \\ + \lambda^2 T_1 = -\frac{m\psi'_1}{rI} \lambda T'_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает первую гармонику равновесной температуры в пренебрежении поперечным теплопереносом. Если в (21) опустить первые три слагаемых, имеющие коэффициенты  $0(\psi_1^2)$ , получим результат (15). Особенность (15) снимается благодаря этим слагаемым.

## Численный расчет

В численной модели физические величины нормировались так же, как это делалось ранее в [11]. В модели рассматривался круглый плазменный шнур единичного радиуса. На радиусе 1.3 располагается идеальный кожух.

Для численного решения системы (6)–(12) задавалось распределением тока в виде

$$J_\xi = e J_0 (1 - r^2)^s, \quad (22)$$

где  $s = q(r=1)/q(r=0) - 1$ ,  $e = 1$  и  $e = 0$  при  $r > 1$ . В программе величина коэффициента  $J_0$  подбирается в соответствии со значением  $q(r=1)$ . Для расчета будем использовать профиль тока, для которого при  $t = 0$ ,  $q(r=0) = 1.2$ ,  $q(r=1) = 4.5$ .

Температура плазмы в начальный момент задавалась в виде

$$T_e = T_i = (300e(1 - r^2)^{2s/3} + 5) \text{ eV}. \quad (23)$$

Проводимость среды при  $r > 1$  формально принималась с эффективной спитцеровской температурой 5 eV. Концентрация плазмы, для простоты, задавалась постоянной величиной  $n = 310^{13} \text{ cm}^{-3}$ .

В (23) температура на оси подбиралась такой, чтобы сразу приблизительно выполнялось условие

$$\nabla(K_{\perp} \nabla T_0) = -\frac{J^2}{\sigma} \quad (24)$$

и изменение температуры без развития магнитного острова было незначительным.

Для решения уравнений движения (9), (10) на границе плазмы ( $r = 1$ ) ставились нулевые граничные условия. Уравнение для магнитного потока (6) решалось во всем пространстве до идеального кожуха.

В рамках наших уравнений пространство  $1 < r < 1.3$  можно рассматривать как пространство камеры токамака, экранированное проводящей диафрагмой. Для нулевой гармоники магнитного потока задавались граничные условия

$$\psi'_0(r = 0) = 0, \quad \psi_0(r = 1.3) = \text{const}. \quad (25)$$

Для винтовых гармоник потока полагалось

$$\psi_2(r = 0) = \psi_2(r = 1.3) = 0, \quad (26)$$

$$\psi_1(r = 0) = 0,$$

$$\psi_1(r = 1.3) = -\psi_{10} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t - 0.1}{0.2}\right) \right), \quad (27)$$

где время  $t$  измеряется в миллисекундах. Формула (27) задает внешнее винтовое возмущение, генерирующее остров в плазме.

Величина  $\psi_{10} = 0$  при  $t < 0.1 \text{ ms}$ , при  $t > 0.1 \text{ ms}$ ,  $\psi_{10}$  выбиралось таким, чтобы возмущенное радиальное поле на радиусе  $r = 1.3$  было равно  $0.01B_{\xi}$ . Внутри пустой камеры токамака это поле спадает по закону  $r^2$ .

Система уравнений (6)–(12) решалась в первом случае разложенная на гармоники (1), (3), (13), во втором — на (4), (5), (14). При этом внешнее возмущение задавалось по закону (27).

Рост полушарий магнитных островов в первом и втором случаях представлен на рис. 1. Кривая 1 задает рост острова единственной гармоники, индуцированной возмущением (27) для разложения (1), (3), (13). Кривые 2 и 3 задают рост островов мод 2/1 и 4/2 соответственно для разложения (4), (5), (14). Важно, что кривые 1 и 2 оказываются близкими по величине.

Во втором разложении (4), (5), (14) появляется остров 4/2, обязанный винтовому потоку гармоники  $\psi_2$ . Этот остров находится внутри острова 2/1, поэтому его

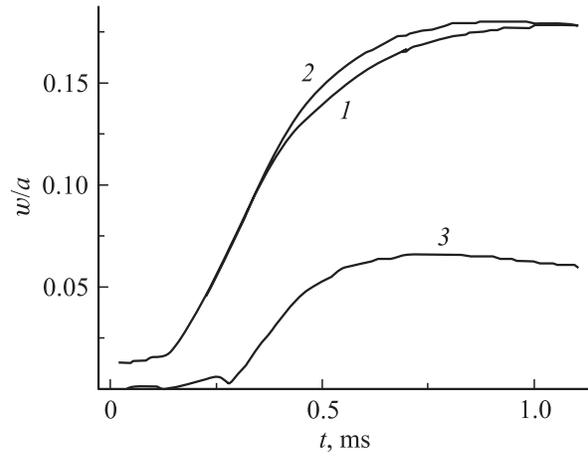


Рис. 1. Зависимость полуширин магнитных островов от времени.

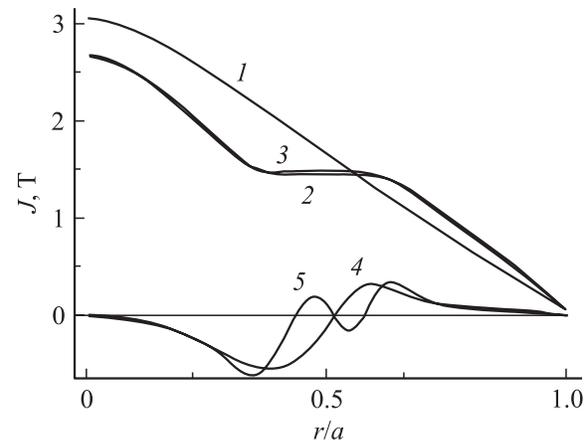


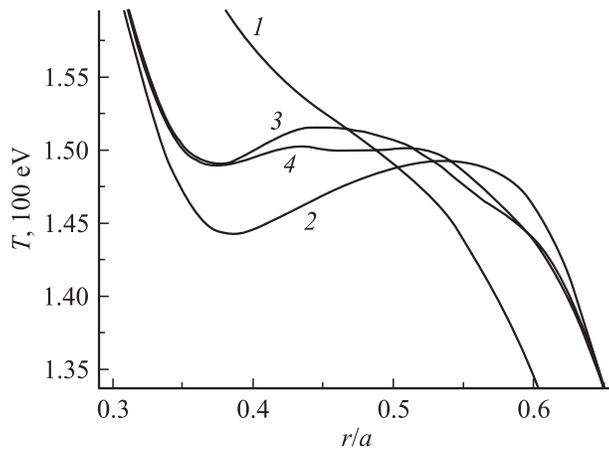
Рис. 2. Радиальная зависимость плазменных величин.

вклад в перераспределение тепла оказывается незначительным.

Различие между кривыми 1 и 2 обусловлено нелинейным взаимодействием первой гармоники  $\psi_1$  со второй  $\psi_2$ . Кроме того,  $\psi_2$  дает свой вклад в  $\psi_0$ , что также сказывается на полуширине острова гармоники  $\psi_1$ .

Рассмотрим, как изменилась температура плазмы. На рис. 2 задано радиальное распределение температуры для первого и второго случаев при  $t = 1 \text{ ms}$  в плоскости, проходящей через 0 — точку магнитного острова. Кривой 1 представлено начальное распределение температуры при  $t = 0.1 \text{ ms}$ , одинаковое для обоих случаев. Кривые 2 и 3 задают температуру для обоих случаев при  $t = 1 \text{ ms}$ .

Кривые 2 и 3 практически совпадают. Это указывает на то, что для изучения распределения температуры можно ограничиваться разложением (1), (3), (13). При этом результирующие возмущенные токи: в первом случае  $J_1$  — кривая 4, и во втором  $J_1 + J_2$  — кривая 5 различаются существенно.



**Рис. 3.** Радиальная зависимость гармоник температуры для разложения (4), (5), (14) при  $t = 1$  ms.

На рис. 3 представлен вклад гармоник в распределение температуры для расчета с разложением (4), (5), (14) при  $t = 1$  ms. Кривая 1 описывает нулевую гармонику температуры  $T_0$ . Как видно, она претерпела некоторый изгиб в области резонансной поверхности. Это изменение обязано отличию от нуля коэффициента  $A_1$ ,  $A_2$  в нулевой гармонике (4П), см. Приложение. Кривая описывает сумму температур  $T_0 + T_1$ , что имеет место в 0-точке магнитного острова, где  $\alpha = 0$ . Сравнивая кривые 1 и 2, можно судить о величине вклада первой гармоники. Кривая 3 описывает сумму  $T_0 + T_1 + T_2$ , что позволяет видеть относительный вклад гармоники  $T_2$ , 4 — описывает результирующую температуру плазмы поперек магнитного острова  $T_0 + T_1 + T_2 + T_3$ .

Роль гармоники  $T_3$  незначительна. Обязанная ей абсолютная поправка имеет вклад порядка 2, поправка, внесенная второй гармоникой — 6, первой — 15 eV. Из этого ряда можно понять, что вклад неучтенной гармоники  $T_4$  должен быть порядка 2/3 eV.

Как видно, в нашем случае температура на кривой 4 рис. 3 с хорошей точностью выровнена лишь в средней части острова. Полная ширина магнитного острова в данном случае равна  $2W = 0.32$ .

Критическая ширина острова, меньше которой выравнивание тепла в пределах острова не наблюдается, может быть вычислена по оценочной формуле [12].

$$2W_c = \left( \frac{K_{\perp}}{K_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{8Rq}{q'}}, \quad (28)$$

справа взяты значения величин на резонансной поверхности.

В нашем случае, формула (28) дает  $2W_c = 0.26$  от малого радиуса, ширина области, где внутри магнитного острова температура заметно выровнена, равна  $2(W - W_c^2/W) \approx 0.11$ , что оказывается в согласии с кривой 4 рис. 3.

## Заключение

1. Простейшее разложение возмущенных величин на гармоники (1), (3), (13) позволяет описать перераспределение плазменного тепла развитым винтовым возмущением. Иллюстрация этого явления до сих пор требовала двумерных расчетов. Степень сходимости такого численного решения по мере увеличения числа учтенных гармоник может быть оценена посредством сравнения результатов моделирования в рамках разложения (1), (3), (13) и (4), (5), (14). При этом двумерный расчет [3] показывает, что точное решение уравнения теплопроводности внутри магнитного острова с учетом (28) представляет собой прямую горизонтальную линию.

2. Предложенный здесь квазилинейный подход может быть относительно легко уточнен не только в области увеличения числа кратных гармоник. В нем возможен учет тороидальности шнура, вращения плазмы, различия температур ионов и электронов, крупномасштабных звуковых движений, возможен учет бутстрэп-тока.

Уравнения (6)–(10), обобщенные на случай тороидального шнура, выписаны в [13], в [14] они дополнены уравнением теплопроводности и использованы для описания охлаждения плазменного шнура запертой модой, состоящей из набора тороидально зацепленных гармоник. При этом для решения уравнения теплопроводности использовался метод, описанный в данной работе.

Для описания охлаждения плазмы вращающимся островом следует учитывать большее число гармоник. Параметры плазмы следует представлять в

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos \alpha + \psi_2 \sin \alpha,$$

$$u = u_0 + u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha;$$

$$T = T_0 + T_1 \cos \alpha + T_3 \cos 2\alpha + T_2 \sin \alpha + T_4 \sin 2\alpha, \quad (29)$$

где, согласно (6), скорость полоидального вращения  $V_{\theta} = -Rdu_0/dr$ .

Для каждой гармоники должно быть записано свое уравнение. И выражение для потока тепла (19) также нужно будет дополнить нечетными гармониками. Если учитывается несколько магнитных островов разной спиральности, то разложение (29) следует сделать для каждого возмущения со своим значением чисел  $m$  и  $n$ .

## Приложение

Запишем выражение для дивергенции теплового потока (12) при использовании разложения (4), (5).

$$b_{\theta} = b_0 - \frac{\psi'_1}{I} \cos \alpha - \frac{\psi'_2}{I} \cos 2\alpha, \quad (1П)$$

$$b_r = -\frac{m\psi_1}{rI} \sin \alpha - \frac{2m\psi_2}{rI} \sin 2\alpha, \quad b_{\xi} = 1. \quad (2П)$$

Величину потока (15) запишем в виде

$$K_{\parallel}(\mathbf{b}\nabla T) = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin 2\alpha + A_3 \sin 3\alpha + A_4 \sin 4\alpha + A_5 \sin 5\alpha. \quad (3\Pi)$$

Соответственно с учетом (1\Pi)–(3\Pi) дивергенция потока вдоль силовых линий имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{q}_{\parallel} = & -\frac{m}{2rI} \frac{d}{dr} [\psi_1 A_1 + 2(\psi_2 A_2)] \\ & + \left[ \lambda A_1 - \frac{m}{2rI} (\psi_1 A'_2 + 2\psi'_1 A_2 + \psi'_2 A_1 \right. \\ & + 2\psi_2 A'_1 + 3\psi'_2 A_3 + 2\psi_2 A'_3) \left. \right] \cos \alpha \\ & + \left[ 2\lambda A_2 - \frac{m}{2rI} (\psi'_1 A_1 - \psi_1 A'_1 \right. \\ & + 3\psi'_1 A_3 + \psi_1 A'_3 + 4\psi'_2 A_4 + 2\psi_2 A'_4) \left. \right] \cos 2\alpha \\ & + \left[ 3\lambda A_3 - \frac{m}{2rI} (2\psi'_1 A_2 - \psi_1 A'_2 + \psi'_2 A_1 - 2\psi_2 A'_1 \right. \\ & + 4\psi'_1 A_4 + \psi_1 A'_4 + 5\psi'_2 A_5 + 2\psi_2 A'_5) \left. \right] \cos 3\alpha, \end{aligned} \quad (4\Pi)$$

где

$$\lambda = \frac{m}{r} b_0 - \frac{n}{R},$$

$$A_1 = K_{\parallel} \left\{ -\left( \lambda T_1 + \frac{m\psi_1}{rI} T'_0 \right) + \frac{m}{2rI} (2\psi'_1 T_2 + \psi_1 T'_2) + \frac{m}{2rI} (2\psi_2 [T'_3 - T'_1] + \psi'_2 [3T_3 - T_1]) \right\},$$

$$A_2 = K_{\parallel} \left\{ -2\left( \lambda T_2 + \frac{m\psi_2}{rI} T'_0 \right) + \frac{m}{2rI} (\psi'_1 T_1 - \psi_1 T'_1 + 3\psi'_1 T_3 + \psi_1 T'_3) \right\},$$

$$A_3 = K_{\parallel} \left\{ -3\lambda T_3 + \frac{m}{2rI} (2\psi'_1 T_2 - \psi_1 T'_2 - 2\psi_2 T'_1 + \psi'_2 T_1) \right\},$$

$$A_4 = K_{\parallel} \frac{m}{2rI} \{ 2\psi'_2 T_2 - 2\psi_2 T'_2 + 3\psi'_1 T_3 - \psi_1 T'_3 \},$$

$$A_5 = K_{\parallel} \frac{m}{2rI} \{ 3\psi'_2 T_3 - 2\psi_2 T'_3 \}.$$

Учет величин  $A_4$  и  $A_5$  означает, что  $T_4 = T_5 = 0$ . Ряд можно оборвать иначе, полагая, что  $T_4$  и  $T_5$  таковы, что  $A_4 = A_5 = 0$ . Этот способ выбран в разложении (17), (18), где предполагается, что невычисляемое  $T_3$  таково, что  $A_3 = 0$ .

Если в задаче рассматривается несколько магнитных островов, то для каждого из них требуется сделать разложение потока по формулам (19) или (4\Pi). При этом можно учесть тороидальное зацепление тепловых гармоник. Для этого надо разложить величину  $\nabla \mathbf{b} = (\mathbf{b}\nabla R)/R$  и величину  $\lambda$  на гармоники. При этом  $R = R_0 - r \cos \theta$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от внутреннего обхода тора,  $R_0$  — радиус оси камеры.

## Список литературы

- [1] Bondeson A., Parker R.D., Hugon M. et al. // Nuclear Fusion. 1991. Vol. 31. P. 1695–1716.
- [2] Robert G., Drake J.F. // Physics of Fluids. B. 1991. Vol. 3. P. 372–383.
- [3] Meskat J.P., Zohm H., Gantenbein G. et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2001. Vol. 43. P. 1325–1332.
- [4] Nave M.F.F., Wesson J.A. // Nuclear Fusion. 1990. Vol. 30. P. 2575–2583.
- [5] Scoville J.T., La Haye R.J., Kellman A.G. et al. // Nuclear Fusion. 1991. Vol. 31. P. 875–890.
- [6] Belov A.M., Lazarev V.B., Alekseev A.G. et al. // 28th EPS Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. 2001. Vol. 25A. P. 2125–2128.
- [7] Mirnov S.V., Semenov I.B., Belov A.M. et al. // Nuclear Fusion. 2000. Vol. 40. P. 727–730.
- [8] Ruzerford P.H. // Physics of Fluids. 1973. Vol. 6. P. 1903–1908.
- [9] White R.B., Monticelle D.A., Rosenbluth M.N. et al. // Physics of Fluids. 1977. Vol. 20. P. 800–805.
- [10] Мережкин В.Г., Мухоматов В.С., Полевой А.П. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 131–140.
- [11] Сперанский Н.Н. // Физика плазмы. 1990. Т. 16. С. 548–553.
- [12] Fitzpatrick R. // Physics of Plasmas. 1995. Vol. 2 (3). P. 825–838.
- [13] Сперанский Н.Н. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. С. 1318–1329.
- [14] Сперанский Н.Н. // Препринт ТРИНИТИ. № 0105-А. Троицк. 2003.