

01;03

Аналитический нелинейный расчет равновесной формы заряженной капли, равноускоренно движущейся в электростатическом поле

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 15 марта 2006 г.)

В аналитической асимптотической процедуре получено выражение для равновесной формы заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, равноускоренно движущейся в коллинеарных электростатическом и гравитационном полях, в квадратичном приближении по амплитуде отклонения равновесной формы капли от сферической. Выяснилось, что равновесная форма капли при заряде и напряженности внешнего электрического поля, далеких от критических в смысле реализации неустойчивости по отношению к собственному и индуцированному зарядам, весьма близка к вытянутой сфероидальной форме, подверженной незначительному даже при больших значениях заряда капли и напряженности электростатического поля грушевидному искажению.

PACS: 47.55.db

Введение

Аналитические асимптотические исследования нелинейных осцилляций заряженных капель во внешних силовых полях [1–5] сопряжены с известными трудностями, обусловленными громоздкостью расчетов при использовании в асимптотических разложениях двух малых параметров: амплитуды нелинейных осцилляций и величины равновесной деформации капли в силовых полях. При наличии внешних силовых полей поправки к частотам мод, определяющим начальную деформацию равновесной в силовом поле формы капли, появляются уже в расчетах второго порядка малости, но обусловлены не нелинейностью системы, а отклонением равновесной формы капли в силовом поле от сферической [1–5]. Такие поправки уместно называть не нелинейными, хотя они и проявляются лишь в нелинейных расчетах, а деформационными. Корректные расчеты истинно нелинейных поправок к частотам осцилляций, появляющихся лишь в расчетах третьего порядка малости, в этом случае необходимо проводить на основе аналитических выражений равновесных форм заряженных капель в силовых полях, выписанных с точностью не ниже квадратичной по амплитуде отклонения равновесной формы капли от сферической. В связи с этим актуально определение равновесных форм заряженных капель во внешних силовых полях в квадратичном приближении по величине равновесной деформации.

Постановка задачи

Рассмотрим каплю идеальной, несжимаемой идеальной проводящей жидкости, несущую заряд Q , свободно двигающуюся в вакууме в коллинеарных однородном электростатическом поле напряженностью E_0 и поле

силы тяжести g . Зададимся целью рассчитать форму равновесной поверхности капли в описанной системе из условия баланса давлений на равновесной ее поверхности с точностью до слагаемых второго порядка малости по отклонению формы капли от сферической. Принимая плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус сферической (в отсутствие электростатического и гравитационного полей) формы капли R в качестве трех основных масштабов измерения физических величин, перейдем к безразмерным переменным, в которых $\rho = \sigma = R = 1$. (За зарядом Q , напряженностью E_0 и ускорением поля силы тяжести g в безразмерных переменных в нижеследующем изложении оставим прежние обозначения.)

Очевидно, что в описанных условиях капля будет двигаться равноускоренно в вертикальном направлении. В зависимости от соотношения величин Q , E_0 и g возможны две ситуации: сила, действующая на каплю со стороны электрического поля, параллельна направлению ускорения поля сил тяжести $E \parallel g$ либо направлена в противоположную сторону $E_0 \parallel -g$. Оба случая можно учесть, если задаться конкретным направлением вектора E_0 , а заряды капли брать как положительными, так и отрицательными.

Примем, что напряженность электростатического поля направлена вертикально вверх, противоположно ускорению поля сил тяжести $E \parallel -g$. В коллинеарных полях E_0 и g равновесная поверхность будет обладать осевой симметрией. Обозначим ось симметрии OZ и также направим ее вертикально вверх.

Форму равновесной поверхности капли будем искать из условия баланса давлений, действующих на свободную поверхность капли. Динамическое условие на свободной поверхности капли в общем случае в тензорных

обозначениях имеет вид

$$(p_{ik}^{(2)} - p_{ii}^{(1)})n_k = p_\sigma n_i.$$

Здесь p_σ — давление сил поверхностного натяжения, n_i — орт внешней для капли нормали, $p_{ik}^{(j)}$ — тензор напряжений (верхний индекс $j = 1$ соответствует капле $j = 2$ — внешней среде), определяемый для идеальной жидкости выражением $p_{ik}^{(j)} = -p^{(j)}\delta_{ik} + \pi_{ik}^{(j)}$, где $p^{(j)}$ — давление в среде, получаемое из уравнения Эйлера, δ_{ik} — дельта-символ Кронекера, $\pi_{ik}^{(j)}$ — тензор напряжений внешних сил. При наличии электрического поля в качестве $\pi_{ik}^{(j)}$ выступает максвелловский тензор напряжений.

Примем, что внешняя среда имеет нулевую плотность, а ее диэлектрическая проницаемость равна единице. В этом случае максвелловский тензор напряжений будет иметь вид $\pi_{ik}^{(2)} = \delta_{ik}E^2/8\pi$, а первая компонента тензора напряжений определится для внешней среды постоянным внешним давлением $p^{(2)} = p_0 = \text{const}$. В вакууме $p_0 = 0$.

Поскольку внутри капли в используемой модели идеально проводящей жидкости электрическое поле отсутствует, то тензор $\pi_{ik}^{(1)}$ обращается в нулевой. Для отыскания распределения поля давлений в жидкости капли следует исходить из уравнения Эйлера. Поскольку заряженная капля ускоренно движется в гравитационном и электростатическом полях, для удобства проведения нижеследующих математических выкладок перейдем в неинерциальную систему координат, связанную с центром масс капли. При этом в правую часть уравнения движения — уравнение Эйлера — необходимо добавить объемную силу инерции \mathbf{f}_a , равную произведению плотности жидкости на инерциальное ускорение \mathbf{a} , которое в свою очередь равно по абсолютной величине, но противоположно по направлению ускорения центра масс капли в лабораторной системе отсчета. Если сила гравитации не равна силе, действующей на заряд капли со стороны электростатического поля, т.е. не уравновешивает ее, то центр масс капли движется с ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g} + 3QE_0/4\pi$ и, следовательно, сила инерции (в безразмерной записи) определится равенством $\mathbf{f}_a = -\mathbf{a}$. С учетом принятых направлений оси OZ и вектора \mathbf{E}_0 выражение для силы инерции можно записать в градиентном виде

$$\mathbf{f}_a = \nabla \left(gz - \left(\pm \frac{3QE_0}{4\pi} z \right) \right).$$

Здесь и далее под Q будем понимать абсолютную величину заряда, в то время как знак заряда, а следовательно, и направление электрической силы, действующей на каплю, будет явно указываться знаками \pm .

Уравнение Эйлера для движения жидкости в капле запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^{(1)} + \mathbf{g} + \mathbf{f}_a$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^{(1)} - \nabla \left(\pm \frac{3QE_0}{4\pi} z \right),$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости в капле, которое в системе координат, связанной с центром масс капли, в состоянии равновесия тождественно равно нулю. Интегрирование уравнения Эйлера при $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$ позволяет получить выражение для распределения давления в капле в равновесном состоянии: $p^{(1)} = p_* - (\pm 3QE_0z/4\pi)$, p_* — постоянное давление в капле в отсутствие внешних сил. Как в выписанном уравнении Эйлера, так и в полученном аналитическом выражении для давления в капле, обращает на себя внимание факт отсутствия ускорения поля сил тяжести g , что в реальности легко объяснимо: капля в поле сил тяжести свободно падает на гравитирующий центр и, следовательно, в отсутствие других силовых полей находится в состоянии невесомости. При наличии же внешнего электростатического поля и заряда на капле именно они оказывают силовое воздействие как на жидкость в объеме капли, так и на ее свободную поверхность.

Представим выписанные выражения для давлений и максвелловских тензоров напряжений в капле и среде в динамическое граничное условие и, спроектировав его на орт нормали к поверхности, получим

$$p_* - p_0 + p_{EQ} + p_{ga} = p_\sigma, \quad (1)$$

где $p_{EQ} = E^2/8\pi$ — давление электрической силы; $p_{ga} = -(\pm 3QE_0z/4\pi)$ — суммарное давление поля сил тяжести и силы инерции.

Искомое аналитическое выражение для формы равновесной поверхности капли в сферических координатах выпишем в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r = r(\theta) = 1 + f(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu);$$

$$|f(\theta)| \ll 1; \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (2)$$

полагая, что функция $f(\theta)$ описывает малое отклонение формы от сферы. Последнее предположение позволяет нам воспользоваться методом асимптотического разложения по малому параметру ε , который введем формальным образом на основе соотношения $|f(\theta)| \sim \varepsilon$. Соотнести ε с величинами присутствующих в задаче физических параметров помогут следующие рассуждения.

Описание асимптотической процедуры

Заряд капли не нарушает сферичности ее равновесной формы и поэтому имеет нулевой порядок малости по амплитуде деформации во внешних силовых полях: $Q \sim \varepsilon^0$. Как отмечено выше, поле сил тяжести в свободно падающей на гравитирующий центр капле также

не оказывает силового воздействия на ее свободную поверхность и приводит к деформации формы, т.е. $g \sim \varepsilon^0$. Деформацию сферической формы капли вызывает внешнее электростатическое поле, в котором капля поляризуется, а силы взаимодействия разноименных поляризационных зарядов на противоположных вершинах капли с внешним электростатическим полем направлены в противоположные стороны. Зависящая от угла θ компонента давления электростатического поля на свободную поверхность капли $\sim E_0^2$ приводит к деформации равновесной сферической формы (как и для случая незаряженной капли) [6,7]. Следовательно, можно принять, что $|f(\theta)| \sim E_0^2 \sim \varepsilon$, или $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Взаимодействие заряда Q и электростатического поля E_0 с отклонением формы капли $f(\theta)$ будет приводить к появлению добавок в соответствующих давлениях, имеющих величину не ниже первого порядка малости, т.е. ε , $\sim \varepsilon^{3/2}$, ε^2 и т.д. Поэтому коэффициенты a_n в (2) представим в виде разложения по полувцелым степеням ε и, ограничивая рассмотрение вторым порядком малости по ε , запишем выражение для равновесной формы поверхности капли в виде

$$r = r(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)} \right) P_n(\mu). \quad (3)$$

Верхний индекс указывает порядок малости коэффициентов $a_n^{(m)}$. Подчеркнем, что параметр ε является формальным, введенным лишь для удобства проведения асимптотических разложений. В конечных выражениях для коэффициентов $a_n^{(m)}$ через физические параметры задачи Q и E_0 параметр ε следует убрать, приняв его равным единице.

Амплитуды $a_n^{(m)}$ в разложении (3) определяются из динамического граничного условия (1) в результате реализации нижеописанной процедуры.

Представим входящие в (1) давления в виде формальных разложений по параметру ε :

$$\begin{aligned} p_* &\approx p_*^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_*^{1/2} + \varepsilon p_*^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_*^{3/2} + \varepsilon^2 p_*^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_{EQ} &\approx p_{EQ}^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_{EQ}^{1/2} \\ &\quad + \varepsilon p_{EQ}^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_{EQ}^{3/2} + \varepsilon^2 p_{EQ}^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_{ga} &\approx p_{ga}^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_{ga}^{1/2} \\ &\quad + \varepsilon p_{ga}^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_{ga}^{3/2} + \varepsilon^2 p_{ga}^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}); \\ p_\sigma &\approx p_\sigma^{(0)} + \varepsilon^{1/2} p_\sigma^{1/2} \\ &\quad + \varepsilon p_\sigma^{(1)} + \varepsilon^{3/2} p_\sigma^{3/2} + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)} + O(\varepsilon^{5/2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), собрав вместе слагаемые одного порядка малости и требуя выполнения баланса давлений во всех порядках малости, получим систему уравнений, позволяющую последовательно рассчитать амплитуды $a_n^{(m)}$.

Определение амплитуд нулевой и первой мод из условий постоянства объема капли и неподвижности ее центра масс

Корректная постановка рассматриваемой задачи должна включать в себя два дополнительных условия, являющихся следствием принятых допущений. Во-первых, в рамках используемой модели несжимаемой жидкости необходимо, чтобы осцилляции поверхности капли не сказывались на величине ее объема V . Во-вторых, в системе координат, связанной с центром масс капли, деформация поверхности последней не должна приводить к смещению центра масс. Записав эти условия в интегральной форме

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} r^2 dr d\mu = \frac{4}{3} \pi, \\ \iiint_V \mathbf{r} dV &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3 dr d\mu = 0 \end{aligned}$$

и подставив в них разложение (3), после интегрирования и последовательного приравнивая нулю выражений различных порядков малости, получим, что амплитуды нулевой и первой мод определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= 0; \quad a_0^{(3/2)} = 0; \quad a_0^{(2)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(a_n^{(1)} \right)^2; \\ a_0^{(1)} &= 0; \quad a_0^{(3/2)} = 0; \\ a_1^{(2)} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Видно, что амплитуды этих мод имеют порядок малости не ниже второго.

Разложение по малому параметру аналитических выражений давлений различной природы на поверхность капли

Получим для каждого из давлений, входящих в динамическое граничное условие (2), выражение в виде разложения по малому параметру (4).

Давление сил поверхностного натяжения определяется через орт нормали \mathbf{n} к поверхности (3) по известным [8] формулам

$$r = r(\theta) : \quad p_\sigma = \text{div } \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|}.$$

После подстановки в эти формулы разложения (3) с учетом амплитуд (5) для компонент давления сил поверхностного натяжения, имеющих различный порядок малости, получим выражения

$$\begin{aligned}
 p_{\sigma}^{(0)} &= 2; \quad p_{\sigma}^{(1/2)} = 0; \\
 p_{\sigma}^{(j)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) a_n^{(j)} P_n(\mu) \quad (j = 1; 3/2); \\
 p_{\sigma}^{(2)} &= -2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2n+1} \left(a_n^{(1)} \right)^2 \right) P_0(\mu) \\
 &- 12 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1)(n+2) a_n^{(2)} \right. \\
 &\left. - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} (m(m+1)-1) K_{kmn} a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right] P_n(\mu). \quad (6)
 \end{aligned}$$

В (6) $K_{kmn} \equiv (C_{k0m0}^{n0})^2$, C_{k0m0}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана, отличные от нуля при значениях индексов, удовлетворяющих соотношениям: $|k-m| \leq n \leq k+m$, $k+m+n$ — четное.

Для записи в виде разложений (4) выражений для давлений p_{ga} и p_{EQ} , входящих в баланс (1), выделим в явном виде порядок малости величины напряженности внешнего электростатического поля E_0 , что удобно сделать, введя формальную замену $E_0 \rightarrow \varepsilon^{1/2} E_0$.

Суммарное давление гравитационной силы и силы инерции на поверхности капли определяется выражением

$$p_{ga} = - \left(\pm \frac{3QE_0}{4\pi} r(\theta)\mu \right),$$

после подстановки в которое функции $f(\theta)$, описывающей форму поверхности (3), получим

$$\begin{aligned}
 p_{ga}^{(j)} &= 0, \quad (j = 0; 1); \quad p_{ga}^{(1/2)} = - \left(\pm \frac{3QE_0}{4\pi} \right) P_1(\mu); \\
 p_{ga}^{(j)} &= - \left(\pm \frac{3QE_0}{4\pi} \right) \left[\frac{2}{5} a_2^{(i-1/2)} P_1(\mu) \right. \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left((1-\delta_{n2}) \frac{n}{2n-1} a_{n-1}^{(i-1/2)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(i-1/2)} \right) P_n(\mu) \Big], \\
 &\quad \left(j = \frac{3}{2}; 2 \right). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Давление электрического поля на равновесную поверхность капли

$$r = r(\theta) : \quad p_{EQ} = \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi)^2$$

в виде разложения типа (4) можно получить, решив краевую задачу для электростатического потенциала Φ :

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= 0; \\
 r \rightarrow \infty : \quad \Phi &\rightarrow -\varepsilon^{1/2} E_0 r \mu; \\
 r = r(\theta) : \quad \Phi &= \Phi_S; \\
 2\pi \int_{-1}^1 (\mathbf{n}\nabla\Phi)|_{r=r(\theta)} d\mu &= -4\pi(\pm Q),
 \end{aligned}$$

где Φ_S — потенциал поверхности капли.

Подставим в сформулированную краевую задачу формальное разложение потенциала Φ в ряд по полупелым степеням малого параметра ε :

$$\Phi \approx \Phi_0 + \varepsilon^{1/2} \Phi_{1/2} + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^{3/2} \Phi_{3/2} + \varepsilon^2 \Phi_2 + O(\varepsilon^{5/2}).$$

В нулевом порядке малости и в порядке $\sim \sqrt{\varepsilon}$ решениями соответствующих электростатических задач будут потенциалы заряженной сферы и поля, индуцированного в капле заряда в окрестности незаряженной сферы, помещенной во внешнее однородное электростатическое поле соответственно

$$\Phi_0 = \frac{(\pm Q)}{r}; \quad \Phi_{1/2}(r, \theta) = -E_0 \mu r \left(1 - \frac{1}{r^3} \right). \quad (8)$$

Решение краевой задачи первого порядка малости дает аналитическое выражение для потенциала электростатического поля в окрестности заряженной капли, поверхность которой отлична от сферы

$$\Phi_1(r, \theta) = (\pm Q) \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (9)$$

Решения задач порядков малости 3/2 и 2 уже учитывают взаимодействие как собственного заряда капли, так и внешнего поля с отклонением формы ее равновесной поверхности от сферической

$$\begin{aligned}
 \Phi_{3/2} &= \frac{6}{5r^2} E_0 a_2^{(1)} P_1(\mu) \\
 &+ 3E_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(1-\delta_{n2})n}{2n-1} a_{n-1}^{(1)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(1)} \right) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(r, \theta) &= \frac{6}{5r^2} \left(E_0 a_2^{(3/2)} \right. \\
 &+ 6(\pm Q) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \Big) P_1(\mu) \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(3E_0 \left(\frac{(1-\delta_{n2})n}{2n-1} a_{n-1}^{(3/2)} + \frac{n+1}{2n+3} a_{n+1}^{(3/2)} \right) \right. \\
 &\left. + (\pm Q) \left(a_n^{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} k K_{kmn} a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right) \right) \frac{P_n(\mu)}{r^{(n+1)}}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Используя выражения (8)–(11), вычислим последовательно все компоненты в разложении давления электрического поля p_{EQ} по порядкам малости

$$\begin{aligned}
p_{EQ}^{(0)} &= Q^2/8\pi; & p_{EQ}^{(1/2)} &= \frac{3}{4\pi}(\pm Q)E_0P_1(\mu); \\
p_{EQ}^{(1)} &\approx \frac{1}{8\pi} \left[3E_0^2(1 + 2P_2(\mu)) + 2Q^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n-1)P_n(\mu) \right]; \\
p_{EQ}^{(3/2)} &\approx \frac{1}{20\pi} \left[6(\pm Q)E_0a_2^{(1)}P_1(\mu) + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \left(Q^2(n-1)a_n^{(3/2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(\pm Q)E_0 \left(\frac{(1-\delta_{n2})n(2n-3)}{2n-1} a_{n-1}^{(1)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+3} a_{n+1}^{(1)} \right) \right) P_n(\mu) \right]; \\
p_{EQ}^{(2)} &\approx -\frac{7Q^2}{8\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1} (a_n^{(1)})^2 \right) P_0(\mu) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{54}{35} E_0^2 a_3^{(1)} + \frac{6}{5} (\pm Q) E_0 a_2^{(3/2)} \right. \\
&\quad \left. - 9Q^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} a_n^{(1)} a_{n+1}^{(1)} \right) P_1(\mu) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{Q^2}{8\pi} \left(2(n-1)a_n^{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} ((3-2k^2+m \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k(2n+m-7))K_{kmn} + \alpha_{knm}) a_k^{(1)} a_m^{(1)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9E_0^2}{4\pi} \left(\frac{8}{15} \delta_{n2} a_2^{(1)} + \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} a_{n+2}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-\delta_{n2}-\delta_{n3}) \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} a_{n-2}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \left((1-\delta_{n2})n^2 + \frac{(n-2)n(2n+3)-1}{2n+3} \right) a_n^{(1)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(\pm Q)E_0}{4\pi} \left((1-\delta_{n2}) \frac{n(2n-3)}{2n-1} a_{n-1}^{(3/2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+3} a_{n+1}^{(3/2)} \right) \right] P_n(\mu); \quad (12) \\
\alpha_{kmn} &\equiv -\sqrt{k(k+1)m(m+1)} C_{k0m0}^{n0} C_{k(-1)m1}^{n0}.
\end{aligned}$$

Расчет равновесной формы капли

Подставим полученные разложения (6), (7), (12) в динамическое граничное условие на свободной поверхности капли (1) и, приравняв слагаемые одинакового порядка малости по ε , вычислим искомые коэффициенты $a_n^{(m)}$ в выражении (3) для равновесной формы капли.

Баланс давлений в нулевом порядке малости определяет внутреннее давление в заряженной сферической капле в отсутствие внешних полей

$$p_*^{(0)} - p_0 = 2 - Q^2/8\pi.$$

Компонента баланса давлений порядка $\sim \varepsilon^{1/2}$ показывает, что: $p_*^{(1/2)} = 0$.

Рассмотрение в балансе давлений слагаемых первого порядка малости по ε позволяет определить постоянную добавку к внутреннему давлению в капле $p_*^{(1)} = -3E_0^2/8\pi$ и коэффициенты первого порядка малости в разложении (3):

$$a_n^{(1)} = \delta_{n2} \frac{3E_0^2}{16\pi - Q^2}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon$ отклонение равновесной формы поверхности капли от сферы определяется полиномом Лежандра второго порядка $P_2(\mu)$:

$$r(\theta) \approx 1 + (3wP_2(\mu)/(1-W)) + O(\varepsilon^{3/2});$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad (14)$$

где W — параметр Рэлея и w — параметр Тейлора, которые характеризуют устойчивость поверхности капли по отношению к собственному заряду и заряду, индуцированному в капле внешним электростатическим полем соответственно.

Из сравнения полученного выражения с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения вытянутой сфероидальной поверхности, вписанного в сферических координатах

$$r_{sph} \approx 1 + e^2 P_2(\mu)/3 + O(e^4),$$

следует, что равновесную форму поверхности заряженной капли, ускоренно движущейся в слабых электростатическом и гравитационном полях, можно считать сфероидом с точностью до слагаемых $\sim e^2$, когда эксцентриситет сфероид связан с зарядом капли и напряженностью электростатического поля соотношением $e^2 = 9w/(1-W)$.

Рассмотрев условия баланса давлений в порядке малости $3/2$, получим $p_*^{3/2} = 0$, а выражение для коэффициентов $a_n^{(3/2)}$ в разложении (3) имеет вид

$$a_n^{(3/2)} = \delta_{n3} \frac{9(\pm Q)E_0}{10\pi(10 - Q^2/2\pi)} a_2^{(1)}.$$

Таким образом, в данном порядке малости отличен от нуля только коэффициент $a_3^{(3/2)}$ при полиноме Лежандра $P_3(\mu)$, который учитывает влияние на равновесную форму поверхности капли суммарного давления поля силы тяжести и силы инерции. В результате симметрия формы поверхности капли относительно экваториальной

плоскости нарушается, причем смена знака заряда капли приводит к зеркальному отражению формы относительно этой плоскости.

Баланс компонент давлений следующего, второго, порядка малости позволяет найти $p_*^{(2)} = (7Q^2/8\pi - 8)(a_2^{(1)})^2/5$ и выяснить, что из коэффициентов $a_n^{(2)}$ отличны от нуля лишь $a_2^{(2)}$ и $a_4^{(2)}$:

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{7(2 - Q^2/8\pi)} \left(\left(10 - \frac{Q^2}{4\pi} \right) (a_2^{(1)})^2 + \frac{81}{20\pi} E_0^2 a_2^{(1)} + \frac{9E_0(\pm Q)}{4\pi} a_3^{(3/2)} \right);$$

$$a_4^{(2)} = \frac{1}{7(3 - Q^2/8\pi)} \left(\frac{3}{5} \left(10 - \frac{Q^2}{8\pi} \right) (a_2^{(1)})^2 + \frac{9}{5\pi} E_0^2 a_2^{(1)} + \frac{2E_0(\pm Q)}{\pi} a_3^{(3/2)} \right).$$

Кроме того, если в выражениях (5) для коэффициентов при полиномах нулевого и первого порядков в разложении (3) учесть (13), то выяснится, что во втором порядке малости поправка к трансляционной моде ($n = 1$) отсутствует $a_1^{(2)} = 0$, а коэффициент при нулевой моде ($n = 0$) имеет вид $a_0^{(2)} = -(a_2^{(1)})^2/5$.

В итоге форма равновесной поверхности капли с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε включительно (что эквивалентно учету слагаемых четвертого порядка по E_0) запишется в виде

$$r = 1 + a_0^{(2)} P_0(\mu) + (a_2^{(1)} + a_2^{(2)}) P_2(\mu) + a_3^{(3/2)} P_3(\mu) + a_4^{(2)} P_4(\mu), \quad (15)$$

где коэффициенты $a_n^{(m)}$, выраженные с помощью (14) через параметры Тейлора и Рэлея, определяются соотношениями

$$a_0^{(2)} = -\frac{9w^2}{5(1 - W)^2}; \quad a_2^{(1)} = \frac{3w}{1 - W};$$

$$a_3^{(3/2)} = \pm \frac{108\sqrt{Ww^3}}{5(5 - 4W)(1 - W)};$$

$$a_2^{(2)} = \frac{9w^2(79 - 84W + 8W^2)}{7(1 - W)^3(5 - 4W)};$$

$$a_4^{(2)} = \frac{54w^2(65 - 33W - 28W^2)}{35(1 - W)^2(3 - 2W)(5 - 4W)}. \quad (16)$$

Условием равномерности разложения (15) является справедливость принятых соотношений малости между коэффициентами $a_n^{(m)}$:

$$F_1 \equiv a_2^{(1)} \sim \varepsilon; \quad F_3 \equiv \frac{a_3^{(3/2)}}{a_2^{(1)}} \sim \varepsilon^{1/2};$$

$$F_k \equiv \frac{a_k^{(2)}}{a_2^{(1)}} \sim \varepsilon, \quad (k = 0, 2, 4). \quad (17)$$

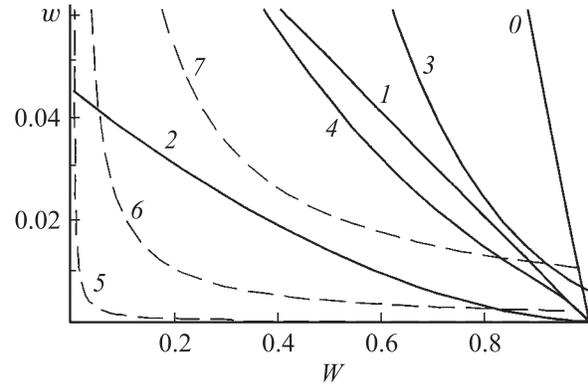


Рис. 1. Линии, соответствующие знакам строгого равенства в соотношениях (17). Номер у кривой совпадает с нижним индексом F_k . Пунктир — расчет для капель воды, вдоль которых должны изменяться параметры w , W , чтобы капля фиксированного радиуса неподвижно висела в коллинеарных электростатическом и гравитационных полях (в электростатическом подвесе): 5 — $R = 1$, 6 — 2, 7 — 3 mm.

При заданной величине параметра ε соотношения (17) определяют область значений параметров w и W , в которой разложение (15) равномерно.

На рис. 1 в плоскости параметров w , W изображены линии, соответствующие знакам строгого равенства в соотношениях (17), при $\varepsilon = 0.3$. Область применимости выражения (15) лежит ниже всех линий. Для заряженной капли, ускоренно движущейся в гравитационном и электростатическом полях, параметры W и w могут изменяться в указанной области произвольно. Это обстоятельство существенно отличает рассматриваемый случай от случая заряженной капли в электростатическом подвесе, когда значения параметров W и w не являются независимыми, а связаны с условием: $12\sqrt{Ww} = g$ (g — безразмерное ускорение свободного падения) [3–4]. В результате для капли в электростатическом подвесе параметры W и w могут изменяться в области равномерности лишь вдоль заданных линий. На рис. 1 пунктиром изображены соответствующие линии для капель воды с радиусом в 1, 2 и 3 mm. Пределы изменения параметров w и W на рис. 1 ограничены сверху их критическими значениями, при которых поверхность капли теряет устойчивость: $w_{cr} \approx 0.052$, $W_{cr} = 1$. Таким образом, область равномерности разложения (15) включает достаточно большие напряженности электрического поля и величины собственного заряда капли (вплоть до ≈ 0.7) от величин своих критических значений.

На рис. 2 представлены формы поверхностей равновеликих по объему сферы, сфероида положительно и отрицательно заряженных капель, уравнения поверхностей которых имеют вид (15), отличаясь лишь знаком при коэффициенте $a_3^{(3/2)}$. Из рис. 1 и 2 видно, что поверхность заряженной капли, ускоренно движущейся в электростатическом и гравитационном полях, отличается от сфероидальной: для положительно заряженных капель

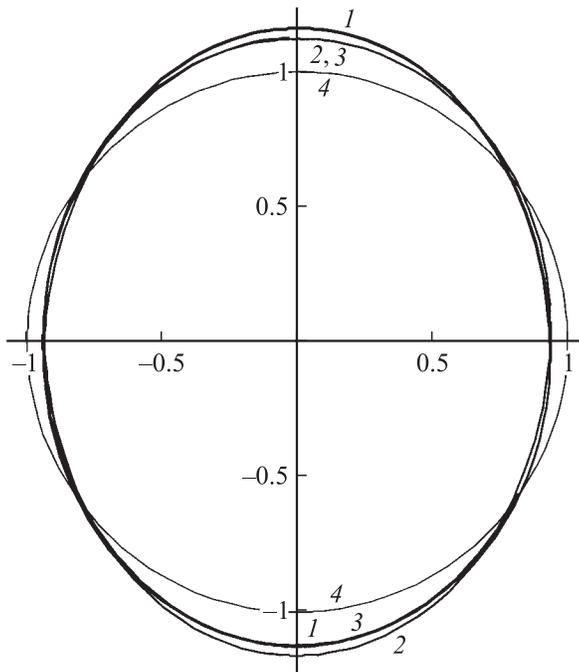


Рис. 2. Форма поверхностей: 1 — положительно, 2 — отрицательно заряженной каплей, 3 — сфероид, 4 — сферы, рассчитанные при $w = 0.02$, $W = 0.4$.

большую кривизну имеет вершина, ориентированная по полю, тогда как для отрицательно заряженных — наоборот. Однако вследствие незначительности этих отличий даже на границе области применимости выражения (15), использование в аналитических расчетах сфероидального приближения для описания равновесной формы капли представляется оправданным даже в более высоком приближении, нежели квадратичное по эксцентриситету.

Заключение

Помодовый анализ баланса давлений на свободную поверхность капли, проведенный в квадратичной по амплитуде равновесной деформации формы капли в электростатическом и гравитационном полях, показал, что применение в аналитических и численных расчетах сфероидального приближения для равновесной формы капли может быть оправдано не только в линейном по величине сфероидальной деформации приближении, но и в квадратичном.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а).

Список литературы

- [1] Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.

- [3] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
- [4] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 17–30.
- [5] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–53.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [7] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
- [8] Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. М.: Мир, 1989. 310 с.