01;04;10

# Многопотоковая неустойчивость в обобщенной модели Доусона

© А.Е. Дубинов, Б.Г. Репин

Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov@rol.ru

(Поступило в Редакцию 21 апреля 2005 г.)

Построены обобщения модели многих пучков Доусона, которые позволяют достаточно просто анализировать устойчивость системы пучков неравной плотности в плазме. Эти модели могут служить также основной для рассмотрения устойчивости электронной компоненты плазмы с заданным законом ее распределения по скоростям.

PACS: 52.30.Ex

В качестве простейшей модели плазмы, которая содержит электроны с широким разбросом по скоростям, Дж. Доусон предложил в [1] систему, представляющую собой совокупность многих параллельных электронных пучков, распространяющихся в неподвижном ионном фоне. Все пучки имеют одинаковую плотность, но их скорости образуют дискретный набор из последовательности $\{j\Delta v\}_{-\infty}^{+\infty}$, где $j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ и $\Delta v$ — расстояние между соседними пучками по оси скоростей. Начальное распределение по скоростями системы пучков представлено на рис. 1, $a$ (здесь и далее $\Delta v = 1$).

В своем анализе этой системы Дж. Доусон исходил из следующего дисперсионного соотношения:

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_p^2}{(\omega - jk\Delta v)^2}, \qquad (1)$$

где $\omega$ и $k$ — частота волны и ее волновое число, $\omega_p$ — плазменная частота каждого из пучков. Оказалось, что выбор такого начального распределения пучков по скоростям очень удобен для анализа, так как ряд в (1) суммируется, приводя дисперсионное соотношение к следующему виду:

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_p^2}{(\omega - jk\Delta v)^2} = \left(\frac{\pi\omega_p}{k\Delta v}\right)\left(1 + \mathrm{ctg}^2\,\frac{\pi\omega}{k\Delta v}\right). \qquad (2)$$

Как было продемонстрировано в [2,4], уравнения типа (1) и (2) удобно также представить в виде, разрешенным относительно $k^2$ и выраженным не через частоту $\omega$, а через фазовую скорость волны $v_{ph} = \omega/k$:

$$k^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_p^2}{(v_{ph} - j\Delta v)^2} = \left(\frac{\pi\omega_p}{\Delta v}\right)\left(1 + \mathrm{ctg}^2\,\frac{\pi v_{ph}}{\Delta v}\right) = F(v_{ph}). \qquad (3)$$

График функции $F(v_{ph})$ для (3) при $\omega_{p0} = 1$ показан на рис. 1, $b$. Для коротковолновых возмущений при $k > \pi\omega_p/\Delta v$ горизонталь $k^2 = \mathrm{const}$ многократно пересекает ветви графика, и корни уравнения (3) действительны. Но для длинноволновых возмущений при $k < \pi\omega_p/\Delta v$ горизонталь $k^2 = \mathrm{const}$ не пересекает графика ни в одной точке, а корни (3) при этом являются комплексными, что свидетельствует о развитии неустойчивости.

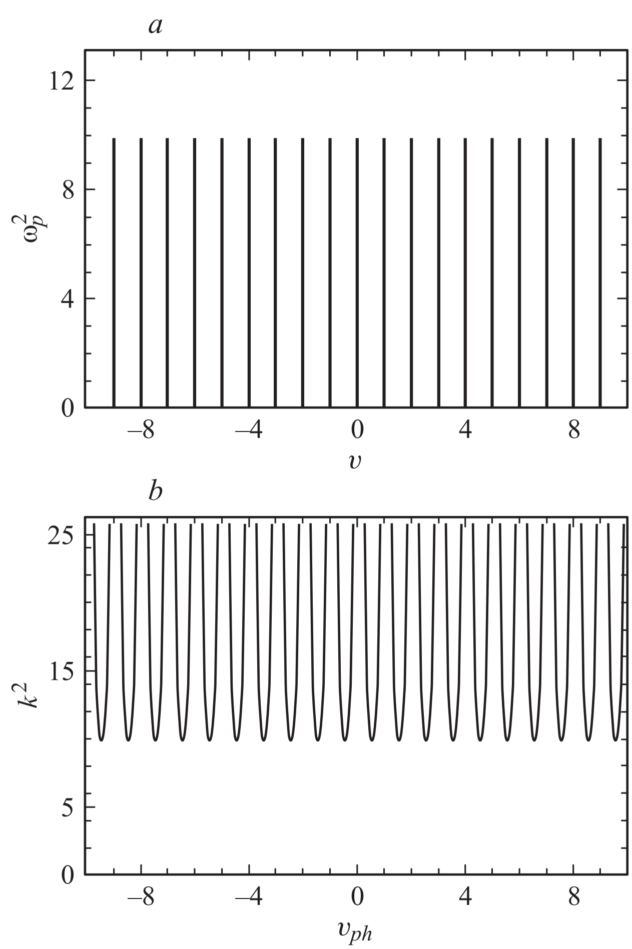


**Рис. 1.** Графики начального распределения пучков по скоростям ($a$) и функции $k^2 = F(v_{ph})$ ($b$) для модели Доусона многих пучков одинаковой плотности.

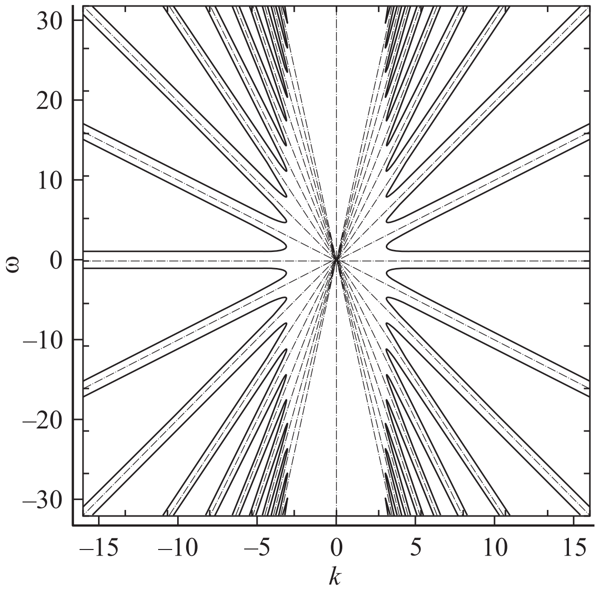


**Рис. 2.** Дисперсионная кривая $\omega(k)$ для модели Доусона многих пучков одинаковой плотности.

Уравнение (2) можно также решить относительно частоты $\omega$

$$\omega = jk\Delta v = \frac{k\Delta v}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{(\sqrt{k\Delta v/\pi\omega_p})^2 - 1} \qquad (4)$$

и построить дисперсионную кривую (рис. 2). Видно, что она имеет множество ветвей, соответствующих рис. 1, $b$ и прижимающихся к полосе $|k| < \pi\omega_p/\Delta v$, которая свободна от ветвей и соответствует неустойчивости.

Можно также построить график зависимость инкремента от волнового числа возмущения $\mathrm{Im}\,\omega(k)$, решив уравнение (3) для $k < \pi\omega_p/\Delta v$. Это уравнение имеет бесконечный набор совпадающих пар комплексно-сопряженных корней. График $\mathrm{Im}\,\omega(k)$ представлен на рис. 3, факт бесконечно кратного совпадения ветвей условно обозначен жирной линией. Итак, модель [1] позволяет достаточно просто определить основные характеристики линейного поведения системы.

Однако модель Доусона не лишена некоторых недостатков. Главная из них — расходимость общего числа электронов как суммы бесконечного числа одинаковых слагаемых и, следовательно, необходимость бесконечной ионной концентрации для обеспечения квазинейтральности

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \omega_p^2 = \infty. \qquad (5)$$

Другой недостаток — достаточно искусственная начальная функция распределения, далекая от реальности: в условиях физических экспериментов функция распределения $f(v) \to 0$ при $v \to \pm\infty$, в то время как в модели Доусона это не выполняется.

С целью устранения указанных недостатков в данной работе была построена обобщенная модель Доусона на случай пучков неравной плотности. Мы рассмотрим начальные распределения пучков по скоростям такие, что их суммарная плотность конечна и, следовательно, $f(v) \to 0$ при $v \to \pm\infty$.

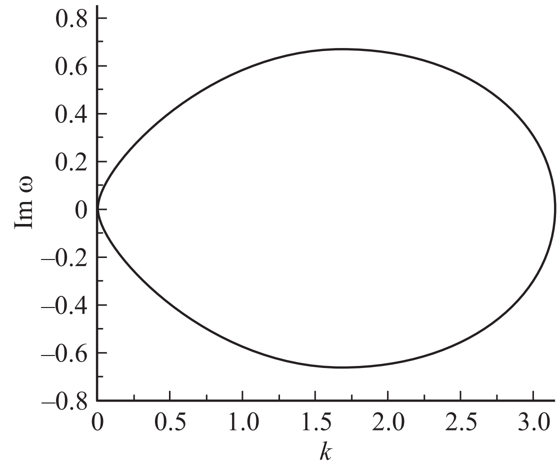


**Рис. 3.** Зависимость инкремета от волнового числа $\mathrm{Im}\,\omega(k)$ для модели Доусона многих пучков одинаковой плотности.

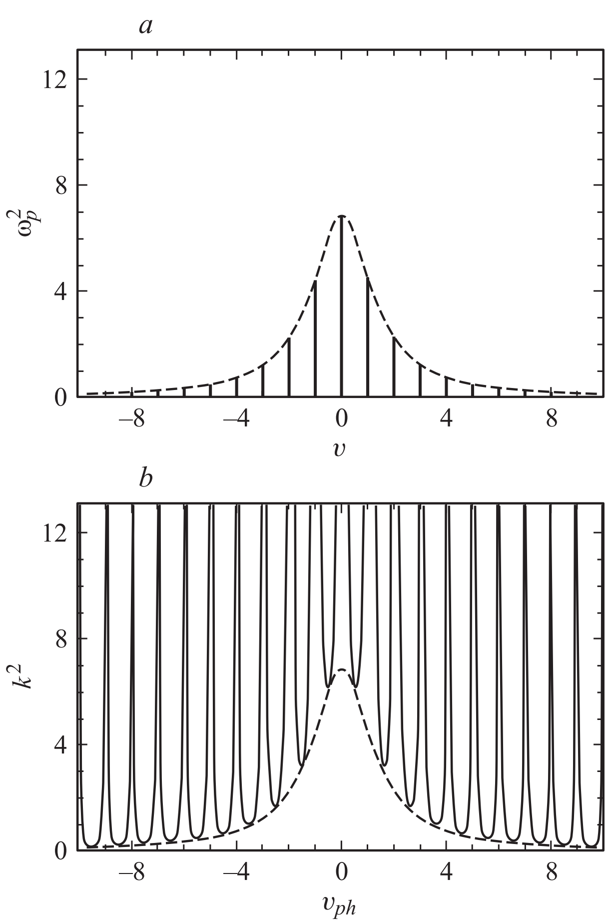


**Рис. 4.** Графики начального одногорбого распределения пучков по скоростям ($a$) и функции $k^2 = F(v_{ph})$ ($b$) для обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

Пусть начальное распределение имеет вид рис. 4, $a$, где огибающая плотности пучков представляет собой функцию

$$f(v) = \frac{\omega_{p0}^2}{1+\alpha^2 v^2}, \tag{6}$$

где $\alpha$ — постояная, которая имеет размерность, обратную скорости, и характеризует ширину горба начальной функции распределения пучков по скоростям: чем больше $\alpha$, тем более узок горб функции распределения.

Легко видеть, что сумма, соответствующая суммарной плотности пучков и плотности фона, конечна

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{p0}^2}{1+(j\alpha\Delta v)^2} = \frac{\pi\omega_{p0}^2}{\alpha\Delta v} \operatorname{cth} \frac{\pi}{\alpha\Delta v}. \tag{7}$$

Оказывается, что для такого распределения дисперсионное уравнение (опять же в виде $k^2 = F(v_{ph})$) также суммируется

$$k^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{p0}^2}{(v_{ph} - j\Delta v)^2 \big(1+(j\alpha\Delta v)^2\big)}$$

$$= \frac{\pi\omega_{p0}^2\big\{\alpha\Delta v(\alpha^2 v_{ph}^2 - 1)\sin^2\frac{\pi v_{ph}}{\Delta v}\coth\frac{\pi}{\alpha\Delta v} + \;+\pi(\alpha^2 v_{ph}^2+1) + \alpha^2 v_{ph}\Delta v \sin\frac{2\pi v_{ph}}{\Delta v}\big\}}{\Delta v^2(\alpha^2 v_{ph}^2+1)^2 \sin^2\frac{\pi v_{ph}}{\Delta v}}. \tag{8}$$

График этой громоздкой функции при $\omega_{p0} = 1$ и $\alpha = 1$ приведен на рис. 4, $b$. Характер его пересечения с горизонталью $k^2 = \mathrm{const}$ теперь иной, нежели у графика на рис. 1, $b$, при любом $k$ горизонталь пересекает боковые ветви графика. Это означает, что при любой длине волны имеются устойчивые моды, и лишь конечное число

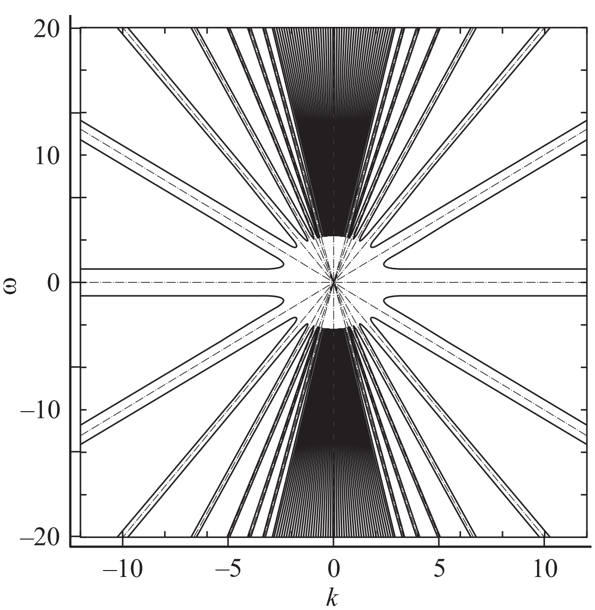


**Рис. 5.** Дисперсионная кривая $\omega(k)$ для одногорбого распределения в обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

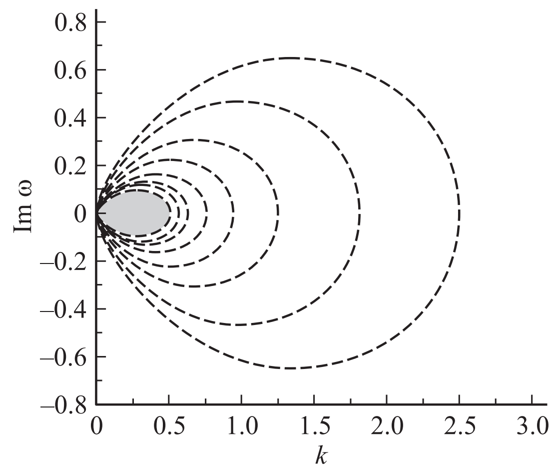


**Рис. 6.** Зависимость инкремета от волнового числа $\operatorname{Im}\omega(k)$ для одногорбого распределения в обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

мод, ветви которых находятся вблизи горба функции распределения, при $k < \pi\omega_{p0}/\Delta v$ неустойчивы.

На рис. 5 представлена дисперсионная кривая $\omega(k)$ модели (7). Видно, что и она имеет множество ветвей, соответствующих рис. 4, $b$. Ветви сгущаются при приближении к вертикальной оси, область сгущения ветвей отмечена на рис. 5 серым цветом. К началу координат примыкает область, свободная от ветвей, которая соответствует неустойчивым модам (область под горбом на рис. 4, $b$).

Так как кривая на рис. 4, $b$ симметрична относительно вертикалной оси в силу четности функции $k^2 = F(v_{ph})$ (8), то корни уравнения $k^2 = F(v_{ph}) = \mathrm{const}$ становятся двукратно вырожденными: при $v_{ph} > 0$ и $v_{ph} < 0$. Поэтому если кривая инкремента $\operatorname{Im}\omega(k)$ в модели Доусона имеет бесконечное число совпадающих ветвей (бесконечно кратное вырождение), то кривая инкремента в обобщенной модели имеет бесконечное число двойных ветвей (двукратное вырождение), сгущающихся к началу координат. Двукратное вырождение на рис. 6 условно обозначено пунктирными линиями (в отличие от рис. 3), а область сгущения инкрементов неустойчивых мод — серым цветом.

Рассмотренное обобщение модели многих пучков не единственно. Аддитивный характер дисперсионного уравнения позволяет конструировать более сложные начальные распределения пучков по скоростям, которые можно проанализировать по аналогичной методике. Кратко рассмотрим в качестве примера начальное распределение в виде двух горбов (рис. 7, $a$), являющееся моделью двух встречных теплых электронных пучков в плазме со средними скоростями $\pm v_0$. Переходом в другую систему отсчета, движущуюся относительно исходной с определенной скоростью, можно свести задачу к модели классической неустойчивости теплого электронного пучка в теплой плазме.

Тогда дисперсионное уравнение системы можно записать в виде

$$k^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{p0}^2}{(v_{ph} - j\Delta v)^2[1 + (j\alpha\Delta v - v_0)^2]} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{p0}^2}{(v_{ph} - j\Delta v)^2[1 + (j\alpha\Delta v + v_0)^2]}. \quad (9)$$

Оба ряда в правой части (9) суммируются, их суммы выражаются в виде, аналогичном (8), но в силу громоздкости выписывать их не будем. График (9) при $\omega_{p0} = 1$, $\alpha = 1$ и $v_0 = 4$ показан на рис. 7, *b*.

На рис. 8 приведен график дисперсионной кривой $\omega(k)$. Во многом он сходен с графиками рис. 2 и 5, но область неустойчивости на нем имеет особую форму, связанную с двугорбой функцией распределения пучков по скоростям.

На рис. 9 представлена зависимость инкремента от волнового числа $\mathrm{Im}\,\omega(k)$. Особенностью данного графика является то, что различные ветви имеют различные степени вырождения: двукратные (пунктир) и четырехкратные (сплошная линия). Области сгущения ветвей на рис. 8 и 9 закрашены серым цветом.

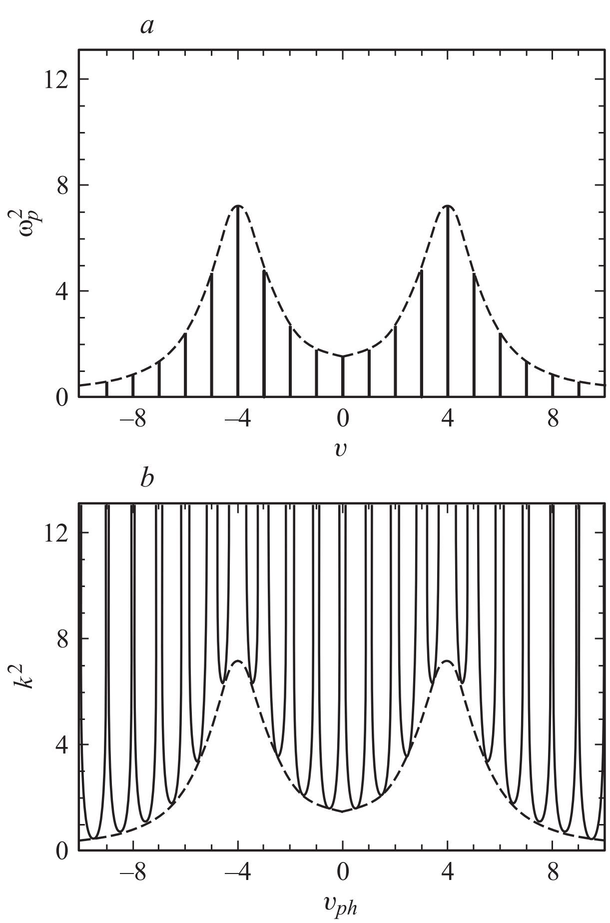


**Рис. 7.** Графики начального двугорбого распределения пучков по скоростям (*a*) и функции $k^2 = F(v_{ph})$ (*b*) для обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

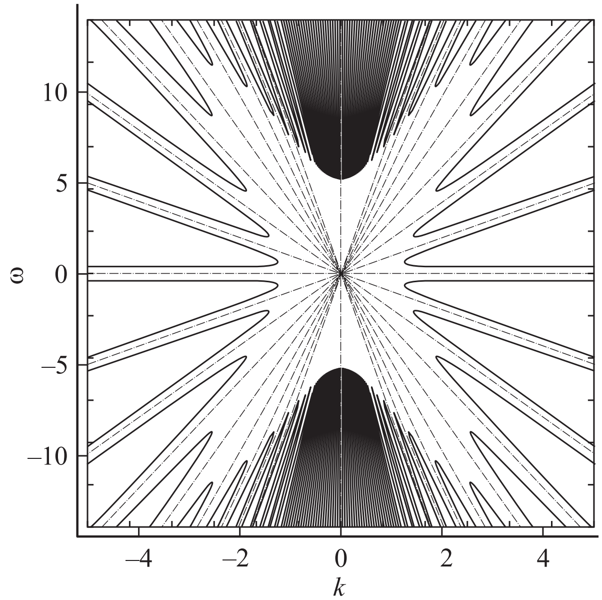


**Рис. 8.** Дисперсионная кривая $\omega(k)$ для двугорбого распределения в обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

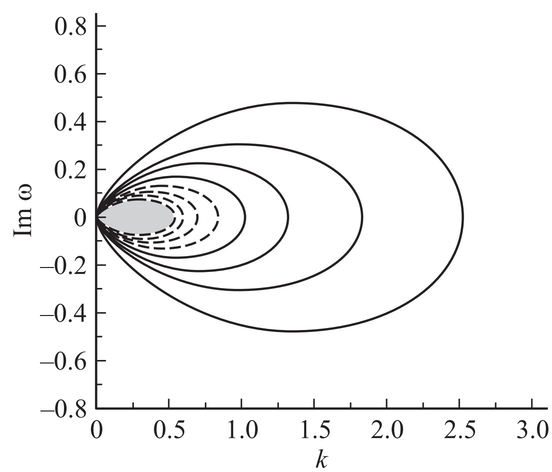


**Рис. 9.** Зависимость инкремета от волнового числа $\mathrm{Im}\,\omega(k)$ для двугорбого распределения в обобщенной модели многих пучков неравной плотности.

Таким образом, построенные обобщения модели многих пучков Доусона позволяют достаточно просто анализировать на устойчивость систему пучков неравной плотности в плазме, что важно для экспериментов [5] и теории [6]. Эти же модели могут служить основой для рассмотрения устойчивости электронной компоненты плазмы с заданным законом ее распределения по скоростям.

Авторы благодарны проф. А.А. Рухадзе за консультации.

## Список литературы


[1] *Dawson J.M.* // Phys. Rev. 1960. Vol. 118. N 2. P. 381–389.
[2] *Стикс Т.* Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965. 344 с.
[3] *Смирнов В.М.* // Физика плазмы. 1969. Вып. 2. С. 79–86.
[4] *Дубинов А.Е.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 15–19.
[5] *Федорченко В.Д., Мазалов Ю.П., Бакай А.С., Руткевич Б.Н.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 6 (12). С. 2225–2235.
[6] *Бриггс Р.* Достижения физики плазмы / Пер. с англ. под ред. М.С. Рабиновича. М.: Мир, 1974. С. 132–170.