01;03

О внутреннем нелинейном резонансном взаимодействии капиллярно-гравитационных волн на плоской поверхности вязкой жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 15 марта 2006 г.)

Рассмотрены закономерности реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия периодических капиллярно-гравитационных волн на плоской однородно заряженной поверхности бесконечно глубокой вязкой несжимаемой электропроводной жидкости. Предложена математическая процедура построения асимптотически пригодного решения в окрестности резонанса, модифицирующая известный метод многих масштабов. Показано, что в результате внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия энергия эффективно переносится от длинных волн к более коротким. Увеличение вязкости снижает интенсивность переноса энергии между резонансно взаимодействующими волнами.

PACS: 47.35.Pq

Введение

Исследование нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на плоской поверхности жидкости представляет интерес в связи с многообразными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзор [1] и указанные там работы). Но, несмотря на обилие нелинейных исследований, выполненных по указанной тематике за последнее столетие, многие связанные с ним проблемы остались неразрешенными. Сказанное, в частности, относится к внутреннему нелинейному резонансному взаимодействию капиллярно-гравитационных волн на заряженной плоской поверхности электропроводной жидкости. Внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие волн лежит в основе физического механизма быстрого нелинейного перераспределения энергии между волнами и потому неоднократно становилось предметом исследования. На незаряженной плоской поверхности идеальной жидкости его исследовали Дж.Р. Вилтон, Л.Ф. Мак-Голдрик и А.Х. Найфе [2–6]. Они выяснили, что в расчетах второго порядка малости появляется один резонанс, а в расчетах третьего — два. При переходе к заряженной плоской поверхности жидкости можно было ожидать по аналогии с нелинейными резонансами на сферической [7,8] и цилиндрической [9,10] поверхностях идеальной жидкости, что количество резонансов увеличится и их положения будут зависеть от величины поверхностной плотности заряда, но этого не произошло. Как показано в [11,12], на плоской заряженной поверхности идеальной бесконечно глубокой жидкости реализуются те же резонансы, что и на незаряженной. Положения внутренних нелинейных резонансов на плоской заряженной поверхности идеальной электропроводной жидкости начинают зависеть от поверхностной плотности заряда лишь в слоях жидкости конечной, но малой, на порядок меньшей длины волны, толщины [13]. Влияние вязкости на внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие волн на плоской зряженной поверхности жидкости, равно как и сам факт наличия такого взаимодействия, никто не исследовал по двум причинам: во-первых, задачу расчета нелинейного волнового движения в вязкой жидкости удалось решить лишь недавно [14,15]; во-вторых, резонансные ситуации в нелинейном волновом движении в идеальной жидкости [2–6] проявлялись при обращении в нуль знаменателей в амплитудных множителях при нелинейных поправках к амплитудам изначально заданных волн и их частотам, тогда как в вязкой жидкости амплитудные множители при нелинейных поправках к амплитудам волн всегда остаются конечными, хотя и могут достигать весьма больших значений, потому разработанная в [2–6] методика обработки резонансных ситуаций оказалась непригодной. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Пусть вязкая несжимаемая жидкость в поле сил тяжести заполняет полупространство $z < 0$ декартовой прямоугольной системы координат $0xyz$ с осью $0z$, направленной против направления ускорения свободного падения $\mathbf{g}$. Жидкость характеризуется плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения γ, коэффициентом кинематической вязкости $\boldsymbol{\nu}$. Жидкость считается идеальным проводником, на поверхности которого распределен электрический заряд. Поверхностная плотность электрического заряда $\boldsymbol{\kappa} = 4\pi E_0$ в равновесном состоянии, когда свободная поверхность — плоскость $z = 0$, постоянна вдоль поверхности (E_0 — значение напряженности электрического поля, перпендикулярного к равновесной заряженной поверхности).

Проведенный асимптотический расчет параметров нелинейной периодической волны, распространяющейся вдоль заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости [14–16], показал, что для такой волны существует значение волнового числа, называемое резонансным, при котором асимпотическое решение задачи во втором приближении по амплитуде волны содержит резонансное слагаемое, нарушающее асимптотический характер представления решения в виде ряда по целым степеням амплитуды волны. Зададимся целью построить методику отыскания аналитического асимптотического решения задачи о расчете параметров нелинейной периодической волны в окрестности резонансного волнового числа, распространяющейся по заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой вязкой заряженной идеально проводящей несжимаемой жидкости.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\Delta\Phi = 0; \quad \partial_t \mathbf{U} + \mathrm{rot}(\mathbf{U}) \times \mathbf{U}$$

$$= -\,\mathrm{grad}\Big(\frac{1}{\rho}\,p + \frac{U^2}{2} + gz\Big) + \nu\Delta\mathbf{U}; \ \mathrm{div}(\mathbf{U}) = 0;$$

$$z = \xi: \qquad \partial_t\xi + u\partial_x\xi = v;$$

$$p - 2\rho\nu\left(\mathbf{n}\big((\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\big)\right) + \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 = \gamma\,\mathrm{div}(\mathbf{n});$$

$$\boldsymbol{\tau}\left((\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\right) + \mathbf{n}\left((\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\right) = 0; \quad \Phi = 0;$$

$$z \to \infty: \quad -\boldsymbol{\nabla}\Phi \to E_0\mathbf{e}_z; \qquad z \to -\infty: \quad \mathbf{U} \to \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь $\xi = \xi(x,t)$ — отклонение свободной поверхности от равновесного состояния, связанное с волновым движением; t — время; $\Phi = \Phi(x,z,t)$ — потенциал электрического поля над жидкостью; $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_z$ — поле скоростей жидкости, обладающее горизонтальной $u = u(x,z,t)$ и вертикальной $v = v(x,z,t)$ составляющими; $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ — орты координатных осей $0x$ и $0z$; $p = p(x,z,t)$ — давление в жидкости; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к свободной поверхности жидкости. Искомыми величинами являются физические поля: $u = u(x,z,t)$, $v(x,z,t)$, $p(x,z,t)$, $\Phi(x,z,t)$ и профиль свободной поверхности $z = \xi(x,t)$. Для простоты положим, что неизвестные величины не зависят от координаты y.

В постановке задачи не приведены начальные условия (при $t = 0$), которых в соответствии с количеством и порядком производных по времени должно быть два. Решение задачи при произвольных начальных условиях вызывает серьезные математические трудности. Поэтому, как это принято в теории нелинейных периодических волн [2–6], условия при $t = 0$ подбираются таким образом, чтобы получаемое в результате решение имело как можно более простой вид. В качестве первого начального условия можно принять, что возмущение свободной поверхности в первом приближении по малой (по сравнению с длиной волны), но конечной амплитуде a имеет вид бегущей вдоль $\mathbf{e}_x$ синусоидальной волны

$$t = 0: \quad \xi(x,t) = \eta\exp(St - ikx) + \text{к.с.}, \qquad (2)$$

где S — комплексная частота волны; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, выражаемое через длину волны λ; к.с. — комплексно-сопряженное слагаемое, добавление этого слагаемого обеспечивает действительность всего выражения. Второе начальное условие будет выбрано ниже таким образом, чтобы получить наиболее удобное для последующего анализа решение.

2. Разбиение задачи на порядки малости

В качестве малого параметра примем $\varepsilon \equiv ak$. Очевидно, этот параметр пропорционален отношению амплитуды волны к ее длине. Разобьем задачу (1) на порядки малости с помощью соотношений

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g z - \frac{E_0^2}{8\pi} \\ -E_0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} \xi_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ p_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2\begin{pmatrix} \xi_2 \\ u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \qquad (3)$$

и получим задачи для определения величин первого $(m = 1)$ и второго $(m = 2)$ порядков малости

$$\partial_t\mathbf{U}_m + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p_m - \nu\Delta\mathbf{U}_m \equiv \mathbf{V}_m; \quad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}_m = 0; \quad \Delta\Phi_m = 0;$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi_m - v_m = f_{1m};$$

$$p_m - 2\rho\nu\,\partial_z v_m - \frac{E_0}{4\pi}\,\partial_z\Phi_m + \gamma_0\,\partial_{xx}\xi_m = f_{2m};$$

$$\partial_z u_m + \partial_x v_m = f_{3m}; \quad \Phi_m - E_0\xi_m = f_{4m};$$

$$z \to -\infty: \quad u_m \to 0; \ v_m \to 0; \quad z \to \infty: \quad |\nabla\Phi_m| \to 0; \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{U}_1^2) + \mathbf{U}_1(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}_1) \\ \xi_1\partial_z v - u_1\partial_x\xi_1 \\ 2\rho\nu\xi_1\partial_{zz}v_1 - \xi_1\partial_z p_1 - \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{E_0}{4\pi}\,\xi_1\partial_{zz}\Phi_t \\ 4\partial_z v_1\partial_x\xi_1 + \xi_1\partial_z(\partial_z u_1 + \partial_x v_1) \\ -\xi_1\partial_z\Phi_1 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

3. Решение задачи первого порядка малости

В первом приближении по ε компоненты поля скоростей и поле давления в жидкости определяются в результате применения процедуры скаляризации уравнения Навье–Стокса в задаче (4) при $m = 1$ с помощью введения гидродинамического потенциала φ и функции тока ψ [17]:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}; \quad v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \quad p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \quad (6)$$

Для отыскания φ_1 и ψ_1 получим скалярные уравнения

$$\Delta \varphi_1 = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \nu \Delta \psi_1 = 0. \quad (7)$$

В соответствии с начальным условием (2) будем искать решение в виде бегущей волны с волновым числом k и комплексной частотой S:

$$\begin{pmatrix} \xi_1(x,t) \\ u_1(x,z,t) \\ v_1(x,z,t) \\ \Phi_1(x,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ u_1(z) \\ v_1(z) \\ \Phi_1(z) \end{pmatrix} \exp(St - ikx) + \text{к.с.} \quad (8)$$

Функции $\Phi_1(z)$, $u_1(z)$, $v_1(z)$ с точностью до умножения на константу определяются из (6), (7) и условий на плюс-минус бесконечности задачи (4) в виде

$$\Phi_1(z) = a_1 \exp(-kz);$$

$$u_1(z) = -ib_1 k \exp(kz) - c_1 q \exp(qz);$$

$$v_1(z) = b_1 k \exp(kz) - ic_1 k \exp(qz); \quad q = \sqrt{k^2 + S/\nu}. \quad (9)$$

Выписанные соотношения содержат четыре комплексные константы: η_1, a_1, b_1, c_1. Подстановка (8) с учетом (9) и выражения для давления (6) в граничные условия задачи (4) приводит к однородной системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно констант η_1, a_1, b_1, c_1. В матричной форме эта система имеет вид

$$A(k,S) X_1 = 0; \quad (10)$$

$$A(k,S) = \begin{pmatrix} S & -k & i \cdot k & 0 \\ -(\rho g + \gamma k^2) & -\rho(S + 2\nu k^2) & i2\rho\nu kq & \frac{kE_0}{4\pi} \\ 0 & i2\rho\nu k^2 & \rho\nu(k^2 + q^2) & 0 \\ -E_0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_1 \end{pmatrix}; \quad \text{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для ее нетривиальной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$D(S,k) = \det\big(A(k,S)\big) = 0; \quad (11)$$

$$D(S,k) \equiv \rho^2 S\big((S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2 - 4\nu^2 k^3 q\big);$$

$$\omega_0^2 \equiv gk(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W);$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\gamma/\rho g}; \quad W \equiv E_0^2/4\pi\sqrt{\rho g \gamma}.$$

Видно, что $S^2 \to -\omega_0^2$ при $\nu \to 0$. Уравнение (11) связывает комплексную частоту S с волновым числом k и является условием, при выполнении которого решение задачи первого порядка малости в виде бегущей волны (8) существует. Параметр α есть капиллярная постоянная жидкости; W — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля, неустойчивость реализуется при $W \geq 2$ [18].

Важно отметить, что среди ненулевых корней уравнения (11) физический смысл имеют лишь те, для которых выполняется условие

$$4\nu^2 k^3 \operatorname{Re}(q) = \operatorname{Re}\big[(S - 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2\big] > 0. \quad (12)$$

Только в этом случае корни соответствуют решениям для поля скоростей, вихревая часть которого затухает с глубиной при $z \to -\infty$ пропорционально $\sim \exp(qz)$.

Таким образом, простейшее решение задачи первого порядка малости имеет вид (8), (9). Система (10) имеет нетривиальное решение в силу выполнения условия (11). Решение (10) представляет собой аналитические выражения для констант a_1, b_2, c_2, каждая из которых оказывается произведением некоторого коэффициента пропорциональности и константы η_1:

$$a_1 = E_0 \eta_1; \quad b_1 = \big((S/\nu) + 2\nu k\big)\eta_1; \quad c_1 = -i2\nu k \eta_1.$$

Сама константа η_1 имеет смысл начальной амплитуды волны в (2): $\eta_1 \equiv \eta$.

Переопределив константы и функции от z, можно переписать (8), (9) в ином виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1(x,t) \\ u_1(x,z,t) \\ v_1(x,z,t) \\ \Phi_1(x,z,t) \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1(z) \\ v_1(z) \\ \Phi_1(z) \end{pmatrix} \exp(St - ikx) + \text{к.с.} \quad (13)$$

$$\Phi_1(z) = a_1 \exp(-kz);$$

$$u_1(z) = -ib_1 k \exp(kz) - c_1 q \exp(qz);$$

$$v_1(z) = b_1 k \exp(kz) - ic_1 k \exp(qz);$$

$$a_1 = E_0; \quad b_1 = (S/\nu) + 2\nu k; \quad c_1 = -i2\nu k,$$

где S — корень уравнения (11), удовлетворяющий условию (12). При $W < 2$ таких корней два: один с $\operatorname{Im}(S) > 0$ отвечает волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{e}_x$, а другой с $\operatorname{Im}(S) < 0$ — волне, распространяющейся в направлении $-\mathbf{e}_x$. Все нижеследующее рассмотрение ограничим именно этим случаем. Любая суперпозиция решений вида (13) с различными волновыми числами также будет решением задачи первого порядка малости.

4. Резонансное решение задачи второго порядка малости

Задача второго порядка малости отличается от задачи первого порядка наличием в задаче (4) функций неоднородностей, вид которых зависит от выбора вида решения в первом приближении. Рассмотрим случай, когда решение задачи первого порядка малости состоит только из одной гармоники и выражается соотношением (13). Тогда на основании (5) легко получить выражения для неоднородностей в задаче второго порядка малости.

Наиболее важно рассмотреть компоненты функций неоднородности $\sim \exp(2St - i2kx)$, поскольку именно они порождают резонансное при $\nu \to 0$ частное решение задачи второго порядка малости. Под термином „резонансный" понимается решение с настолько большой амплитудой, что разложение (3) перестает быть асимптотическим, поскольку слагаемые $\sim \varepsilon^2$ за счет большой величины коэффициентов становятся по амплитуде больше членов разложения первого порядка малости.

Будем интересоваться лишь той частью решения задачи второго порядка малости, которая $\sim \exp(2St - i2kx)$.

Уравнения системы (12) при $m = 2$ имеют вид

$$\partial_t \mathbf{U}_2 + \frac{1}{\rho}\nabla p_2 - \nu\Delta\mathbf{U}_2 \equiv \eta_1^2 \mathbf{\Lambda}(z)\exp(2St - i2kx) + \text{к.с.} + \text{н.с.}, \qquad (14)$$

$$\nabla\mathbf{U}_2 = 0; \qquad \Delta\Phi_2 = 0. \qquad (15)$$

Аббревиатура н.с. означает „нерезонансные составляющие". Амплитудный множитель в функции неоднородности $\mathbf{\Lambda}(z)$ выражается через $\mathbf{V}_2(z)$ из (5), выделением экспоненциального множителя и множителя $\sim \eta_1^2$. Для задачи (14), (15) методом неопределенных коэффициентов несложно найти частное решение, имеющее следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} u_2^*(x,z,t) \\ v_2^*(x,z,t) \\ p_2^*(x,z,t) \\ \Phi_2^*(x,z,t) \end{pmatrix} = \eta_1^2 \begin{pmatrix} u_2^*(z) \\ v_2^*(z) \\ p_2^*(z) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(2St - i2kx) + \text{к.с.} + \text{н.с.} \qquad (16)$$

Здесь функции $u_2^*(z)$, $v_2^*(z)$, $p_2^*(z)$ не содержат никаких неопределенных констант. Аналитические выражения для них зависят от параметров: волнового числа k, комплексной частоты S, физических свойств жидкости, поверхностной плотности электрического заряда и определяются в результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются после подстановки (16) в (14). Таким образом, функции $u_2^*(z)$, $v_2^*(z)$, $p_2^*(z)$ полностью определяются через решение задачи первого порядка малости.

Общее решение неоднородных уравнений (4) при $m = 2$ — сумма общего решения соответствующей однородной задачи и частного решения (16) неоднородной задачи. Найдем общее решение однородных уравнений

$$\partial_t \mathbf{U}_2 + \frac{1}{\rho}\nabla p_2 - \nu\Delta\mathbf{U}_2 = 0; \quad \nabla\mathbf{U}_2 = 0; \quad \Delta\Phi_2 = 0.$$

Действуя так же, как при решении задачи первого порядка малости, и уделяя внимание только решениям, пропорциональным $\exp(2St - i2kx)$, определим, что

$$\begin{pmatrix} u_2^0(x,z,t) \\ v_2^0(x,z,t) \\ p_2^0(x,z,t) \\ \Phi_2^0(x,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^0(z) \\ v_2^0(z) \\ p_2^0(z) \\ \Phi_2^0(z) \end{pmatrix} \exp(2St - i2kx) + \text{к.с.} + \text{н.с.}, \qquad (17)$$

$$\Phi_2^0(z) = a_2\exp(-2kz);$$

$$u_2^0(z) = -ib_2k\exp(2kz) - c_2q\exp(q_2z);$$

$$v_2^0(z) = b_2k\exp(2kz) - ic_2k\exp(q_2z);$$

$$p_2^0(z) = -2S\rho b_2\exp(2kz); \quad q_2 = 2q.$$

Функции $u_2^0(z)$, $v_2^0(z)$, $p_2^0(z)$, $\Phi_2^0(z)$ содержат комплексные константы a_2, b_2, c_2, которые определяются с помощью граничных условий. Суперпозиция (16) и (17) образует соотношения для полей скоростей и давлений, которые удовлетворяют задаче (4) при $m = 2$, но содержат неопределенные константы a_2, b_2, c_2. Чтобы определить эти константы, нужно в граничные условия задачи (4), выписанные при $m = 2$, подставить выражения

$$\xi_2 = \eta_2\exp(2St - i2kx) + \text{н.с.}; \qquad (18)$$

$$\begin{pmatrix} u_2(x,z,t) \\ v_2(x,z,t) \\ p_2(x,z,t) \\ \Phi_2(x,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(z) \\ v_2(z) \\ p_2(z) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix} \exp(2St - i2kx) \equiv (Z^0 + \eta_1^2 Z^*)\exp(2St - i2kx) + \text{к.с.} + \text{н.с.}; \qquad (19)$$

$$Z^0 = \begin{pmatrix} u_2^0(z) \\ v_2^0(z) \\ p_2^0(z) \\ \Phi_2^0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib_2k\exp(2kz) - c_2q\exp(q_2z) \\ b_2k\exp(2kz) - ic_2k\exp(q_2z) \\ -S\rho b_2\exp(2kz) \\ a_2\exp(-2kz) \end{pmatrix};$$

$$Z^* = \begin{pmatrix} u_2^*(z) \\ v_2^*(z) \\ p_2^*(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Неоднородности рассчитываются по формулам (5) при $m = 2$ с помощью (13). Оставив в левой части полученных соотношений только линейные комбинации констант η_2, a_2, b_2, c_2, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно этих констант, которая в матричной форме имеет вид

$$A(2k, 2S)X_2 = \eta_1^2 N. \qquad (20)$$

Здесь N — столбец четырех коэффициентов, не зависящих от координат и времени, но зависящих от волнового числа, физических свойств жидкости и поверхностной плотности электрического заряда. Заметим, что вклад в значения коэффициентов столбца N дают не только неоднородности граничных условий задачи (4), но и слагаемые, которые получаются в результате подстановки в левую часть граничных условий составляющей соотношений (19), пропорциональной $\eta_1^2 Z^*$. Эти слагаемые не зависят от η_2, a_2, b_2, c_2, поэтому после описанной подстановки переносятся в правую часть и объединяются с неоднородностью, которая тоже пропорциональна η_1^2, поскольку выражается через произведения элементов, образующих столбец (13). Используя правило Крамера, решения системы (20) можно записать в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{\eta_1^2}{\operatorname{Det}\big(A(2k, 2S)\big)} \begin{pmatrix} \Pi_\eta \\ \Pi_b \\ \Pi_c \\ \Pi_a \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где Π_η — определитель матрицы, которая получается из матрицы $A(2k, 2S)$ заменой первого столбца столбцом N; Π_b, Π_c, Π_a — определители матриц, которые получаются из $A(k, S)$ заменой соответственно столбцов 2, 3 и 4 на N.

В общем случае $\operatorname{Det}\big(A(2k, 2S)\big) \neq 0$. Однако имеется значение волнового числа $k = k_*$, которому отвечает рассчитанная по дисперсионному уравнению (11) комплексная частота S_*, для которого модуль величины $\operatorname{Det}\big(A(2k_*, 2S_*)\big)$ стремится к нулю при $\nu \to 0$. Значение волнового числа, для которого описанная ситуация имеет место, совпадает со значением волнового числа, называемого в теории нелинейных волн на поверхности идеальной жидкости резонансным. Поэтому этот же термин будет использован ниже и в настоящем рассмотрении.

5. Условие реализации резонанса

Из (3), (13), (18), (21) следует, что выражение для профиля нелинейной волны во втором порядке малости имеет вид

$$\xi(x, t) = \varepsilon\eta_1 \bigg(\exp(St - ikx) + \frac{\varepsilon\eta_1}{D(2k, 2S)} \Pi_\eta \exp(2St - i2kx) \bigg) + \text{к.с.} + \text{н.с.} \qquad (22)$$

Аналогичные выражения получаются и для других неизвестных величин. Заметим, что k и S связаны между собой дисперсионным уравнением (11), устанавливающим зависимость $S = S(k)$. Так что во втором слагаемом (22) знаменатель можно считать функцией параметра k.

Найдем резонансное волновое число, условие на величину коэффициента вязкости и нелинейность, при которых знаменатель во втором слагаемом (22) будет величиной порядка $O(\varepsilon\eta)$ или меньше. Тогда второе слагаемое в скобках (22) будет величиной не меньше первого порядка малости, и асимптотичность разложения будет нарушена.

В пределе малой вязкости [17] имеем

$$S = i\omega_0(k) - 2\nu k^2. \qquad (23)$$

Подставив (23) в дисперсионное уравнение (11) и сохранив первые два слагаемых в разложении по ν, получим

$$D(2k, 2S) \equiv \delta + \nu\beta; \qquad (24)$$

$$\delta = i\rho\omega_0(2k)\big(\omega_0^2(2k) - 4\omega_0^2(k)\big);$$

$$\beta = 8k^2\rho^2\big(4\omega_0^2(k) - 2\omega_0(k)\,\omega_0(2k) - \omega_0^2(2k)\big).$$

Из теории резонансного волнового взаимодействия на однородно заряженной поверхности бесконечно глубокой идеальной электропроводной жидкости [11–13] известно, что при $k = k_* \equiv 1/\alpha\sqrt{2}$, независимо от величины поверхностного электрического заряда, выполняется соотношение $\omega_0(2k) = 2\omega_0(k)$. Поэтому, если $k = k_*$, то коэффициенты в (24) примут вид

$$\delta = 0, \quad \beta = 32\rho^2 k_*^2\,\omega_0^2(k_*). \qquad (25)$$

Чтобы в (22) знаменатель во втором слагаемом в скобках обеспечил нарушение асимптотического характера разложения, необходимо

$$\big|D\big(2k, 2S(k)\big)\big| = \Sigma\big(\Pi_\eta|\eta_1|\big)\varepsilon, \quad \Sigma \ll 1.$$

Но из (24) и (25) следует, что при малой вязкости и $k = k_*$

$$D\big(2k_*, 2S(k_*)\big) = \nu\beta.$$

Следовательно, условие нарушения асимптотичности разложения (22) при $k = k_*$ имеет вид

$$\nu 32\rho^2 k_*^2\,\omega_0^2(k_*) = (\Pi_\eta\Sigma)|\eta_1|\varepsilon. \qquad (26)$$

Переопределив вспомогательный параметр Σ и введя вместо него другой, запишем условия реализации резонанса как

$$k = k_* = 1/\alpha\sqrt{2};$$

$$\nu = \sigma|\eta_1|\varepsilon$$

$$\equiv \left(\Sigma\Pi_\eta/32\rho^2 k_*^2 \omega_0^2(k_*)\right)|\eta_1|\varepsilon; \qquad \sigma \ll 1, \qquad (27)$$

где $\sigma > 0$ — число, характеризующее кризисность резонансной ситуации. Чем оно ближе к нулю, тем больше амплитуда резонансного слагаемого в прямом разложении. Иными словами, σ — параметр расстройки вязкой жидкости от модели идеальной жидкости.

Отметим, что переход от (26) к (27) подразумевает, что $\omega_0^2(k_*)$ не является малой величиной, что не выполняется при $W \approx \alpha k_* + (\alpha k_*)^{-1}$ [11,12].

6. Принцип построения решения при резонансном значении волнового числа

Для детального исследования поведения системы в окрестности резонанса воспользуемся методом многих временны́х масштабов, который модифицируем для ситуации вязкой жидкости. Но сначала усложним проблему — зададим в начальный момент времени не одну волну, а две: одну с резонансным волновым числом $k = k_*$, а другую с удвоенным волновым числом $k = 2k_*$, с которой первая волна взаимодействует резонансным образом. Напомним, что под резонансной ситуацией для нелинейных волн на свободной поверхности идеальной жидкости понимается такая, когда амплитудный множитель при нелинейной поправке содержит компоненту со знаменателем, обращающимся в нуль при определенном значении волнового числа. В настоящем рассмотрении нелинейных волн на поверхности вязкой жидкости, как и в теории линейного резонанса для осциллятора с диссипацией, амплитуда резонансного множителя остается конечной, но может достигать весьма большого значения, нарушающего асимптотичность решения. Именно такая ситуация будет ниже пониматься как резонансная. При классическом подходе к математической обработке резонансной ситуации методом многих масштабов вводится параметр расстройки по волновому числу (или частоте). В проводимом же исследовании резонансной ситуации в вязкой жидкости вводится параметр расстройки σ, определенный (27), который следует понимать как параметр расстройки вязкой жидкости от модели идеальной жидкости. Этот параметр позволит в фукнции неоднородности задачи второго порядка малости выделить множители, отвечающие за зарушение асимптотичности решения, на основе метода многих масштабов свести их зависимость от времени к зависимости только от „медленного“ времени $T = \varepsilon t$ и избавиться от секулярных слагаемых.

Итак, решение задачи первого порядка малости примем в виде суперпозиции двух волн: с волновыми числами $k = k_*$ и $k = 2k_*$. Будем считать, что амплитуды обеих волн пропорциональны ε, но множители пропорциональности $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_1^{(2)}$ непостоянны, а зависят от медленного времени $T = \varepsilon t$:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \varepsilon\eta_1^{(1)}(T) \begin{pmatrix} 1 \\ u_1^{(1)}(z) \\ v_1^{(1)}(z) \\ p_1^{(1)}(z) \\ \Phi_1^{(1)}(z) \end{pmatrix} \exp(\theta_1)$$

$$+ \varepsilon\eta_1^{(2)}(T) \begin{pmatrix} 1 \\ u_1^{(2)}(z) \\ v_1^{(2)}(z) \\ p_1^{(2)}(z) \\ \Phi_1^{(2)}(z) \end{pmatrix} \exp(\theta_2) + \text{к.с.}, \qquad (28)$$

$$\theta_1 = S(k_*)t - ik_*x; \quad \theta_2 = S(2k_*)t - 2ik_*x.$$

Во втором по ε приближении сформулируем условие исключения резонансных слагаемых и запишем их в виде уравнений относительно $\eta_1^{(1)} = \eta_1^{(1)}(T)$ и $\eta_1^{(2)} = \eta_1^{(2)}(T)$.

7. Основные этапы решения

7а. Развернутая формулировка задачи второго порядка малости

Будем считать, что задача характеризуется двумя временны́ми масштабами: быстрым t и медленным: $T = \varepsilon t$. Тогда в общей постановке задачи (1) изменится запись уравнения Навье–Стокса, которое теперь примет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + \varepsilon\partial_T \mathbf{U} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = gz\right) + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{U}[\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}].$$

Аналогично изменится и запись кинематического граничного условия

$$z = \xi: \quad \partial_t\xi + \varepsilon\,\partial_T\xi + u\,\partial_x\xi = v.$$

Формулировка задачи первого порядка малости останется прежней: (4) при $m = 1$. Только теперь неизвестные функции нужно считать зависящими не только от t, но и от T.

Для задачи второго порядка малости формулировка (4), (5) при $m = 2$ останется в силе, но несколько изменятся выражения для функций неоднородности (5):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\nabla(U_1^2) + \mathbf{U}_1(\nabla\mathbf{U}_1) - \partial_T\mathbf{U}_1 \\ \xi_1\partial_z v - u_1\partial_x\xi_1 - \partial_T\xi_1 \\ 2\rho\nu\xi_1\partial_{zz}v_1 - \xi_1\partial_z p_1 - \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{E_0}{4\pi}\xi_1\partial_{zz}\Phi_1 \\ 4\partial_z v_1\partial_x\xi_1 + \xi_1\partial_z(\partial_z u_1 + \partial_x v_1) \\ -\xi_1\partial_z\Phi_1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Действуя так же, как и в п. 4, несложно найти частные решения, пропорциональные интересующим нас экспоненциальным множителям

$$\begin{pmatrix} u_2^{*(1)} \\ v_2^{*(1)} \\ p_2^{*(1)} \\ \Phi_2^{*(1)} \end{pmatrix} = \frac{d\eta_1^{(1)}}{dT}\begin{pmatrix} u_2^{*(1.1)}(z) \\ v_2^{*(1.1)}(z) \\ p_2^{*(1.1)}(z) \\ 0 \end{pmatrix}\exp(\theta_1)$$

$$+\overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)}\begin{pmatrix} u_2^{*(1.2)}(z) \\ v_2^{*(1.2)}(z) \\ p_2^{*(1.2)}(z) \\ 0 \end{pmatrix}\exp(\Theta_1) + \text{н.с.}; \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} u_2^{*(2)} \\ v_2^{*(2)} \\ p_2^{*(2)} \\ \Phi_2^{*(2)} \end{pmatrix} = \frac{d\eta_1^{(2)}}{dT}\begin{pmatrix} u_2^{*(2.1)}(z) \\ v_2^{*(2.1)}(z) \\ p_2^{*(2.1)}(z) \\ 0 \end{pmatrix}\exp(\theta_2)$$

$$+\left(\eta_1^{(1)}\right)^2\begin{pmatrix} u_2^{*(2.2)}(z) \\ v_2^{*(2.2)}(z) \\ p_2^{*(2.2)}(z) \\ 0 \end{pmatrix}\exp(\Theta_2) + \text{н.с.}; \tag{31}$$

$$\Theta_1 = \left(\bar{S}(k_*) + 2S(2k_*)\right)t - ik_*x; \quad \Theta_2 = 2S(k_*)t - i2k_*x.$$

Здесь черта над символом означает комплексное сопряжение. Первый верхний индекс „1“ в скобках указывает на соответствие волне с волновым числом k_*, а „2“ — на соответствие волновому решению с волновым числом $2k_*$. Второй верхний индекс „1“ обозначает величины, стоящие при множителе $\exp(\theta_j)$; $j = 1; 2$, а „2“ — величины, стоящие при множителе $\exp(\Theta_j)$; $j = 1; 2$. Выражение для Θ_1 получено как показатель степени, находящийся при перемножении $\exp(\theta_2)$ на $\exp(-\theta_1)$ на этапе вычисления функций неоднородности (29) через решения задачи первого порядка малости (28) с учетом невыписанных комплексно сопряженных слагаемых.

Выписанные соотношения выражаются через параметры решения задачи первого порядка малости, не содержат свободных констант и удовлетворяют (4) при $m = 2$. Соотношения (30) соответствуют решению с волновым числом $k = k_*$, а (31) — с $k = 2k_*$.

Решение задачи второго порядка малости (4), (29) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)} \\ u_2^0 + u_2^{*(1)} + u_2^{*(2)} \\ v_2^0 + v_2^{*(1)} + v_2^{*(2)} \\ p_2^0 + p_2^{*(1)} + p_2^{*(2)} \\ \Phi_2^0(z) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Подставив (32) в (4), (29), получим задачу определения неизвестных функций $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$, u_2^0, v_2^0, p_2^0, Φ_2^0:

$$\partial\mathbf{U}_2^0 + \frac{1}{\rho}\nabla p_2^0 - \nu\Delta\mathbf{U}_2^0 = 0; \quad \nabla\mathbf{U}_2^0 = 0; \quad \Delta\Phi_2^0 = 0;$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi_2 - v_2^0 = h_{12};$$

$$p_2^0 - 2\rho\nu\partial_z v_2^0 - \frac{E_0}{4\pi}\partial_z\Phi_2^0 + \gamma\partial_{xx}\xi_2 = h_{22};$$

$$\partial_z u_2^0 + \partial_x v_2^0 = h_{32}; \quad \Phi_2^0 - E_0\xi_2 = h_{42};$$

$$z \to -\infty: \ u_2^0 \to 0; \ v_2^0 \to 0; \quad z \to \infty: \ |\nabla\Phi_2^0| \to 0; \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix} \equiv \frac{d\eta_1^{(1)}}{dT}\begin{pmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix}\exp(\theta_1) + \overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)}\begin{pmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_4^{(1)} \end{pmatrix}\exp(\Theta_1)$$

$$+\frac{d\eta_1^{(2)}}{dT}\begin{pmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix}\exp(\theta_2) + \left(\eta_1^{(1)}\right)^2\begin{pmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_4^{(2)} \end{pmatrix}\exp(\Theta_2)$$

$$+ \text{к.с.} + \text{н.с.}$$

Здесь коэффициенты $M_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$ вычисляются с помощью длинной, но технически несложной арифметической процедуры, зависят от параметров, возникших в решении задачи первого порядка, но не зависят от времени и координат.

7b. В в е д е н и е п а р а м е т р а р а с с т р о й к и в о к р е с т н о с т и р е з о н а н с а

Учитывая, что $\omega_0(2k_*) = 2\omega_0(k_*)$, и замечая, что в приближении малой вязкости $S(k) = -2\nu k^2 + i\omega_0(k)$, имеем

$$\Theta_1 = \left(\bar{S}(k_*) + S(2k_*)\right)t - ik_*x$$

$$= S(k_*)t - ik_*x - 8\nu k_*^2 t = \theta_1 - 8\nu k_*^2 t;$$

$$\Theta_2 = 2S(k_*)t - 2ik_*x$$

$$= S(2k_*)t - i2k_*x + 4\nu k_*^2 t = \theta_2 + 4\nu k_*^2 t. \tag{34}$$

Учитывая (34), функции неоднородности задачи (33) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix} = \left(\frac{d\eta_1^{(1)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} + \overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)} \begin{pmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_4^{(1)} \end{pmatrix} \exp(-8\nu k_*^2 t) \right)$$

$$\times \exp(\theta_1) + \left(\frac{d\eta_1^{(2)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} + \left(\eta_1^{(1)}\right)^2 \begin{pmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_4^{(2)} \end{pmatrix} \exp(4\nu k_*^2 t) \right)$$

$$\times \exp(\theta_2) + \text{к.с.} + \text{н.с.}$$

В этом выражении с учетом (27) примем $\nu t = \sigma|\eta_1|\varepsilon t \equiv \sigma|\eta_1|T$:

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix} = \left(\frac{d\eta_1^{(1)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)} \begin{pmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_4^{(1)} \end{pmatrix} \exp(-8\sigma|\eta_1^{(1)}|k_*^2 T) \right) \exp(\theta_1)$$

$$+ \left(\frac{d\eta_1^{(2)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} + \left(\eta_1^{(1)}\right)^2 \begin{pmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_4^{(2)} \end{pmatrix} \exp(4\sigma|\eta_1^{(1)}|k_*^2 T) \right)$$

$$\times \exp(\theta_2) + \text{к.с.} + \text{н.с.} \tag{35}$$

Видно, что естественным образом проявило себя медленное время $T = \varepsilon t$. Условие реализации резонанса выполняется тем точнее, чем меньше величина параметра расстройки σ.

Обратим внимание на то, что, согласно (27), $\sigma|\eta_1^{(1)}| = \nu/\varepsilon$ не зависит от T ввиду независимости от медленного времени параметров ν и ε. Фактически произведение $\sigma|\eta_1^{(1)}|$, так же как и $4\sigma|\eta_1^{(1)}|k_*^2 = 4\nu k_*^2/\varepsilon$, можно использовать как самостоятельные параметры, характеризующие расстройку системы от состояния резонанса. Примем $\Xi \equiv (4\nu k_*^2/\varepsilon)$ и перепишем функции неоднородности (35) в виде

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix} = \left(\frac{d\eta_1^{(1)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} + \overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)} \begin{pmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_4^{(1)} \end{pmatrix} \exp(-2\Xi T) \right)$$

$$\times \exp(\theta_1) + \left(\frac{d\eta_1^{(2)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} + \left(\eta_1^{(1)}\right)^2 \begin{pmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_4^{(2)} \end{pmatrix} \exp(\Xi T) \right)$$

$$\times \exp(\theta_2) + \text{к.с.} + \text{н.с.} \tag{36}$$

7с. Формулировка условий разрешимости задачи второго порядка малости

В задаче (33) с неоднородностью (36) следует искать решение в виде слагаемых, пропорциональных множителям $\exp(\theta_1)$ и $\exp(\theta_2)$. В процессе решения возникнут две системы линейных уравнений, которые в матричной форме записи имеют вид

$$A\big(k_*, S(k_*)\big)X^{(1)} = Z^{(1)}; \quad A\big(2k_*, S(2k_*)\big)X^{(2)} = Z^{(2)}; \tag{37}$$

$$X_2^{(n)} = \begin{pmatrix} \eta_2^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ c_2^{(n)} \\ a_2^{(n)} \end{pmatrix};$$

$$Z^{(1)} = \frac{d\eta_1^{(1)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} + \overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)} \begin{pmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_4^{(1)} \end{pmatrix} \exp(-2\Xi T);$$

$$Z^{(2)} = \frac{d\eta_1^{(2)}}{dT} \begin{pmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} + \left(\eta_1^{(1)}\right)^2 \begin{pmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_4^{(2)} \end{pmatrix} \exp(4\Xi T).$$

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений (37) неразрешимы, так как $\mathrm{Det}\big(A\big(k_*, S(k_*)\big)\big) = \mathrm{Det}\big(A\big(2k_*, S(2k_*)\big)\big) = 0$ в силу дисперсионного уравнения. Для разрешимости систем (37) необходимо, чтобы правые части (37) удовлетворяли определенным соотношениям — условиям разрешимости. Условия разрешимости дают уравнения для отыскания неизвестных амплитудных множителей $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_2^{(2)}$.

Для формулировки условий разрешимости найдем решение систем линейных уравнений эрмитово-сопряженных к однородным системам, соответствующим (37)

$$\bar{\tilde{A}}(k, S)Y^{(1)} = 0; \quad \bar{\tilde{A}}\big(2k, S(2k)\big)Y^{(2)} = 0.$$

Здесь $Y^{(n)}$ — столбец четырех неизвестных констант; матрица эрмитово-сопряженная по отношению к заданной получается из нее с помощью двух операций транспонирования (будем обозначать тильдой „$\sim$“) и взятия комплексного сопряжения от всех элементов. Несложно видеть, что $Y^{(n)} = Y(nk_*)$; $n = 1, 2$.

$$\bar{Y}(k) = \begin{pmatrix} 2\nu k\rho\omega_0^2(k) \\ 2\nu k^2 S(k) \\ i\left(\omega_0^2(k) + S^2(k) + 2\nu k^2 S(k)\right) \\ -\frac{E_0 k^3}{2\pi}\,\nu S(k) \end{pmatrix}.$$

Системы (37) разрешимы, если в результате матричных произведений $\bar{\tilde{Y}}(k_*)Z^{(1)}$ и $\bar{\tilde{Y}}(2k_*)Z^{(1)}$ получаются столбцы нулевых элементов. Пользуясь дистрибутивными свойствами матричного произведения, найдем, что условия разрешимости имеют вид

$$A_1\,\frac{d\eta_1^{(1)}}{dT} + B_1\overline{\eta_1^{(1)}}\eta_1^{(2)}\exp(-2\Xi T) = 0; \tag{38}$$

$$A_2\,\frac{d\eta_1^{(2)}}{dT} + B_2\big(\eta_1^{(1)}\big)^2\exp(\Xi T) = 0; \tag{39}$$

$$A_1 = \big(\bar{\tilde{Y}}(k_*)M^{(1)}\big); \quad B_1 = \big(\bar{\tilde{Y}}(k_*)N^{(1)}\big);$$

$$A_2 = \big(\bar{\tilde{Y}}(2k_*)M^{(2)}\big); \quad B_2 = \big(\bar{\tilde{Y}}(2k_*)N^{(2)}\big);$$

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} M_1^{(n)} \\ M_2^{(n)} \\ M_3^{(n)} \\ M_4^{(n)} \end{pmatrix}; \quad N^{(n)} = \begin{pmatrix} N_1^{(n)} \\ N_2^{(n)} \\ N_3^{(n)} \\ N_4^{(n)} \end{pmatrix}; \quad n = 1, 2. \tag{40}$$

7d. Анализ условий разрешимости

Соотношения (38), (39) — два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно комплексных функций $\eta_1^{(n)} = \eta_1^{(n)}(T)$, $n = 1, 2$. Элементы столбцов (40) не зависят от координат, времен и ε. Они по довольно громоздким формулам выражаются через волновое число, физические свойства жидкости и поверхностную плотность электрического заряда.

В (38), (39) используем подстановку

$$\eta_1^{(1)} = H_1\exp(i\psi_1); \quad \eta_1^{(2)} = H_2\exp(i\psi_2);$$

$$H_n = H_n(T); \quad \psi_n = \psi_n(T); \quad n = 1; 2. \tag{41}$$

Функции $H_n(T)$ и $\psi_n(T)$ принимают исключительно действительные значения; $H_n(T)$ имеет смысл вещественной амплитуды, $\psi_n(T)$ — фазы периодической комплексной величины $\eta_1^{(n)}$ в (41); нижний индекс „1“ соответствует величинам, относящимся к волне с $k = k_*$, а „2“ — относящимся к $k = 2k_*$. Разделив левую и правую части (38) на $\exp(i\psi_1)$, а (39) — на $\exp(i\psi_2)$, получим

$$A_1H_1' + iA_1H_1\psi_1' + B_1H_1H_2\exp\big(-2\Xi T + i(\psi_2 - 2\psi_1)\big) = 0; \tag{42}$$

$$A_2H_2' + iA_2H_2\psi_2' + B_2H_1^2\exp\big(\Xi T + i(2\psi_1 - \psi_2)\big) = 0. \tag{43}$$

Здесь и в дальнейшем штрихом обозначается производная по медленному времени T. В уравнениях (42), (43) коэффициенты A_n, B_n комплексные. Поэтому учтем их представление через действительную и мнимую части

$$A_n = \operatorname{Re}A_n + i\operatorname{Im}A_n; \quad B_n = \operatorname{Re}B_n + i\operatorname{Im}B_n; \quad n = 1, 2. \tag{44}$$

Подставив (44) в (42), (43) и разделив действительную и мнимую части полученных соотношений, получим систему четырех дифференциальных уравнений относительно функций $H_1(T)$, $H_2(T)$, $\psi_1(T)$, $\psi_2(T)$:

$$H_1'\operatorname{Re}A_1 - H_1\psi_1'\operatorname{Im}A_1 + H_1H_2\big(\cos(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Re}B_1 + \sin(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Im}B_1\big)\exp(-2\Xi T) = 0;$$

$$H_1'\operatorname{Im}A_1 + H_1\psi_1'\operatorname{Re}A_1 + H_1H_2\big(\cos(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Im}B_1 - \sin(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Re}B_1\big)\exp(-2\Xi T) = 0;$$

$$H_2'\operatorname{Re}A_2 - H_2\psi_2'\operatorname{Im}A_2 + H_1^2\big(\cos(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Re}B_2 - \sin(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Im}B_2\big)\exp(\Xi T) = 0;$$

$$H_2'\operatorname{Im}A_2 + H_2\psi_2'\operatorname{Re}A_2 + H_1^2\big(\cos(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Im}B_2 + \sin(2\psi_1 - \psi_2)\operatorname{Re}B_2\big)\exp(\Xi T) = 0. \tag{45}$$

Введем обозначение $\Omega = 2\psi_1 - \psi_2$. Приведя (45) к нормальному виду, получим

$$H_1' = \frac{H_1H_2\exp(-2\Xi T)}{(\operatorname{Re}A_1)^2 + (\operatorname{Im}A_1)^2} \times \big((\operatorname{Im}A_1\operatorname{Im}B_1 + \operatorname{Re}A_1\operatorname{Re}B_1)\cos\Omega + (\operatorname{Re}A_1\operatorname{Im}B_2 - \operatorname{Im}A_1\operatorname{Re}B_1)\sin\Omega\big);$$

$$\psi_1' = \frac{H_2\exp(-2\Xi T)}{(\operatorname{Re}A_1)^2 + (\operatorname{Im}A_1)^2} \times \big((\operatorname{Im}A_1\operatorname{Re}B_1 - \operatorname{Re}A_1\operatorname{Im}B_1)\cos\Omega + (\operatorname{Im}A_1\operatorname{Im}B_1 + \operatorname{Re}A_1\operatorname{Re}B_1)\sin\Omega\big);$$

$$H_2' = \frac{H_1\exp(\Xi T)}{(\operatorname{Re}A_2)^2 + (\operatorname{Im}A_2)^2} \times \big((\operatorname{Im}A_2\operatorname{Im}B_2 + \operatorname{Re}A_2\operatorname{Re}B_2)\cos\Omega + (\operatorname{Im}A_2\operatorname{Re}B_2 - \operatorname{Re}A_2\operatorname{Im}B_2)\sin\Omega\big);$$

$$\psi_2' = \frac{H_1^2\exp(\Xi T)}{H_2\,(\operatorname{Re}A_2)^2 + (\operatorname{Im}A_2)^2} \times \big((\operatorname{Re}A_2\operatorname{Im}B_2 - \operatorname{Im}A_2\operatorname{Re}B_2)\cos\Omega + (\operatorname{Im}A_2\operatorname{Im}B_2 + \operatorname{Re}A_2\operatorname{Re}B_2)\sin\Omega\big). \tag{46}$$

Решение выписанной системы позволяет учесть медленную нелинейную по ε модуляцию амплитуды и частоты периодической волны, состоящей из двух гармоник: с резонансным волновым числом $k = k_*$ и волновым числом $k = 2k_*$

$$\xi(t, T) = \varepsilon H_1(T)\cos\bigl(\omega_0(k_*)t + \psi_1(T) - k_* x\bigr)\exp(-2\nu k_*^2 t)$$
$$+ \varepsilon H_2(T)\cos\bigl(2\omega_0(k_*)t + \psi_2(T) - 2k_* x\bigr)\exp(-8\nu k_*^2 t). \tag{47}$$

Запись (47) законна только для маловязкого приближения, когда комплексная частота приближенно рассчитывается по формуле (23).

Соотношения (46), (47) являются финальным результатом проведенного аналитического расчета. Несложно видеть, что периодическая капиллярно-гравитационная волна конечной амплитуды с волновым числом, равным резонансному $k = k_*$ на однородно заряженной поверхности вязкой бесконечно глубокой электропроводной жидкости, резонансно взаимодействует с волной с волновым числом $k = 2k_*$. Нелинейность исходных уравнений проявляется в наличии связи между амплитудами $H_1(T)$, $H_2(T)$ и фазами $\psi_1(T)$, $\psi_2(T)$ обеих волн, которая описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (46).

Сама процедура отыскания функций $H_1(T)$, $H_2(T)$, $\psi_1(T)$, $\psi_2(T)$, т.е. решений системы дифференциальных уравнений (46), являющейся условием исключения секулярных членов во втором порядке малости, обеспечивает исчезновение резонансных слагаемых.

Рассмотрим подробнее исходное требование медленности изменения комплексных функций $\eta_1^{(1)} = \eta_1^{(2)}(T)$ и $\eta_1^{(2)} = \eta_1^{(2)}(T)$. Для этого рассмотрим следующее представление рассматриваемой бегущей волны:

$$\eta_1^{(1)}(T)\exp\bigl[i(\omega t - kx)\bigr]$$
$$= H_1(T)\exp\bigl[i\psi_1(T)\bigr]\exp\bigl[i(\omega t - kx)\bigr]$$
$$\cong H_1(T)\exp\bigl[i\bigl(\psi_1(0) + \psi_1'(0)\varepsilon t\bigr)\bigr]\exp\bigl[i(\omega t - kx)\bigr]$$
$$\cong H_1(T)\exp\bigl[i\bigl(\psi_1(0)\bigr)\bigr]\exp\bigl[i\bigl((\omega + \varepsilon\psi_1'(0))t - kx\bigr)\bigr].$$

Видно, что $\varepsilon\psi_1'(0)$ имеет смысл мгновенной добавки в начальный момент времени к исходной частоте $\omega_0(k_*)$ волны с волновым числом $k = k_*$. Хотя все рассуждения проведены для начального момента времени $t = 0$, они легко обобщаются на случай произвольного момента времени $t = t_0$. В итоге легко заключить, что $\varepsilon\psi_1'(T)$ — мгновенная добавка к частоте $\omega(k_*)$ в момент времени $t = T/\varepsilon$; $\varepsilon\psi_2'(T)$ имеет смысл мгновенной добавки к исходной частоте $S(2k_*) \approx 2\omega_0(k_*)$ волны с волновым числом $k = 2k_*$. Мгновенные добавки к частотам генерируются за счет нелинейности и характеризуют изменения в величинах частот осцилляций. Медленность изменения комплексных функций $\eta_1^{(1)} = \eta_1^{(1)}(T)$ и $\eta_1^{(2)} = \eta_1^{(2)}(T)$ имеет место, только если $\varepsilon\psi_1'$ и $\varepsilon\psi_2'$ малы по сравнению с частотами $\omega_0(k_*)$ и $2\omega_0(k)$:

$$\frac{\varepsilon|\psi_1'(T)|}{\omega_0(k_*)} \ll 1 \Rightarrow |\psi_1'(T)| \ll \frac{\omega_0(k_*)}{\varepsilon};$$
$$\frac{\varepsilon|\psi_2'(T)|}{\omega_0(2k_*)} \le 1 \Rightarrow |\psi_2'(T)| \ll \frac{\omega_0(2k_*)}{\varepsilon}. \tag{48}$$

Выписанные условия необходимо учитывать уже при выборе начальных условий для системы (46). Условия (48) следует понимать в том смысле, что, чем меньше левая часть неравенства по сравнению с правой, тем лучше приближение, получаемое в результате использования представленной теории. Так, из (47) следует, что при фиксированном значении ε построенную модель нельзя использовать, если в начальный момент времени положить значение H_2 слишком малым или равным нулю. В этом случае нарушается условие (48). Эволюцию функций, найденных в результате решения системы (46) при адекватных начальных условиях, тоже следует проверять на удовлетворение в процессе эволюции условиям (48). Как только какое-либо из условий нарушается, мы выходим за рамки исходного положения о медленности изменений величин, зависящих от T. Из (48) следует, что, чем меньше ε, тем шире диапазон разрешенных моделью мгновенных добавок к основной частоте. Но в то же время нужно помнить: теория работает только в условиях, когда параметр расстройки Ξ близок к нулю

$$4\nu k_*^2\varepsilon^{-1} \ll 1. \tag{49}$$

Из (49) следует, что чем больше ε, тем точнее соблюдается резонансное условие, и наоборот, чем меньше ε, тем слабее резонанс.

Улучшая условия реализации резонанса, мы уменьшаем диапазон значений, допутимых моделью частотных поправок. Это происходит при увеличении ε (при усилении нелинейности).

8. Начальные условия для системы (46)

Для проведения конкретных расчетов гидродинамических движений, реализующихся в резонансной ситуации, необходимо определиться с начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (46). Для простоты расчет величин $H_1 = H_1(T)$; $H_2 = H_2(T)$; $\psi_1' = \psi_1'(T)$; $\psi_2' = \psi_2'(T)$ проведем в безразмерных переменных при $\rho = g\gamma = 1$. Тогда безразмерное значение резонансного волнового числа определится равенством: $k_* = 1/\sqrt{2}$. Начальное значение фазового параметра ψ_1 без уменьшения общности можно положить равным нулю. В начальный момент времени амплитуда волны с волновым числом k_* в (46) равна $\varepsilon H_1(0)$. Но по определению $\varepsilon \equiv ak_*$ и поэтому $\varepsilon H_1(0) = ak_* H_1(0) = aH_1(0)/\sqrt{2}$. Видно, что если положить $H_1(0) = \sqrt{2}$, то значение ε будет совпадать с безразмерной амплитудой волны a. Начальное значение ψ_2 можно определить соотношением $\psi_2(0) = \pi/2$. Такое же значение фазового сдвига второй гармоники относительно первой в решении получается методом прямого разложения [16]. Начальное условие для H_2 выбиралось таким образом, чтобы в начальный момент времени производная ψ_2', вычисленная по (46), удовлетворяла (48) при $T = 0$.

В итоге начальные условия для (46) получим в виде

$$t = 0: \qquad H_1 = \sqrt{2}; \quad H_2 = 0.2; \quad \psi_1 = 0; \quad \psi_2 = \pi/2.$$

Выписанный набор начальных условий соответствует ситуации, когда в начальный момент времени задаются две резонансно взаимодействующие волны: 1) с волновым числом $k = k_* = 1/\sqrt{2}$ и амплитудой ε; 2) с $k = 2k_* = \sqrt{2}$ и 0.2ε. Начальные условия выбраны для примера и могут быть изменены для описания других возможных ситуаций.

9. Примеры расчетов

Характерные примеры решения системы (46) приведены на рис. 1–4. Зависимости рассчитаны при $\varepsilon = 0.2$ и различных значениях коэффициента безразмерной вязкости. Условия (48) в рассматриваемом случае принимают вид

$$|\psi_1'| \ll 5; \qquad |\psi_2'| \ll 10.$$

Из рис. 1 видно, что амплитудный множитель H_1 волны с волновым числом k_* уменьшается с течением времени. Это уменьшение связано не с вязкой диссипацией, а с передачей энергии в волну с волновым числом $2k_*$. Это видно из рис. 2, который показывает, что амплитудный множитель H_2 этой волны увеличивается. Из рис. 3 и 4 видно, что при $\psi_1' > 0$ всегда $\psi_2' < 0$. Из рис. 1–4 также видно, что с увеличением вязкости уменьшается интенсивность перекачки энергии из первой волны во вторую и увеличивается промежуток времени, в течение которого выполняются условия применимости развитой в настоящем исследовании теории.

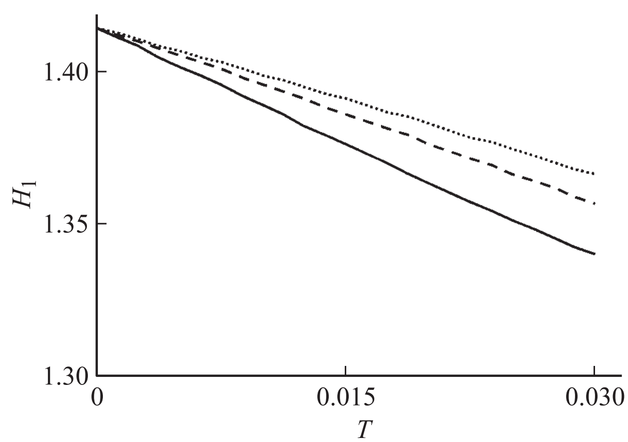

Рис. 1. Зависимость безразмерного амплитудного множителя H_1 первой гармоники волны (47) от безразмерного медленного времени T при $\varepsilon = 0.2$ и различных значениях коэффициента безразмерной кинематической вязкости: сплошная кривая соответствует $\nu = 0.01$; штриховая — 0.02; пунктир — 0.03.

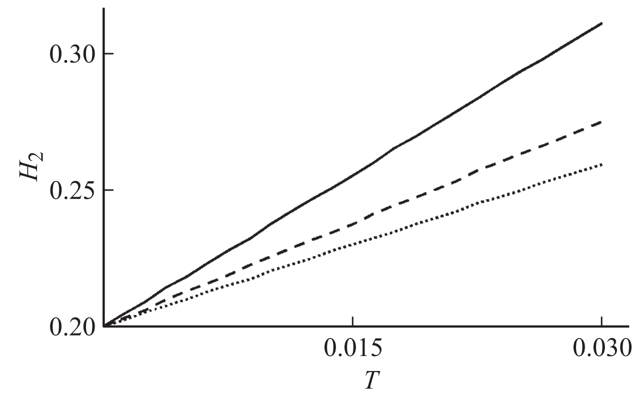

Рис. 2. Зависимость амплитудного множителя H_2 второй гармоники волны (47) от медленного времени T при тех же условиях, что и на рис. 1.

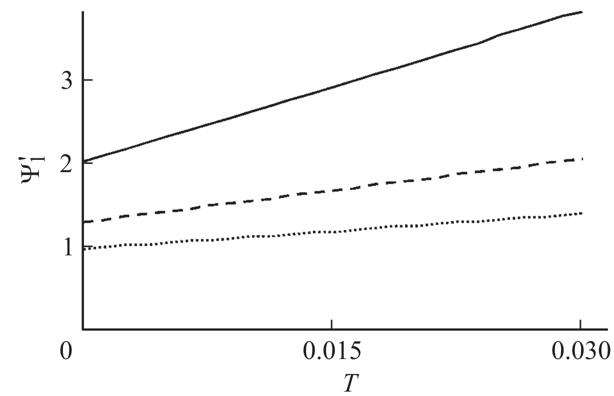

Рис. 3. Зависимость амплитудного множителя мгновенной добавки $\psi_1'(T)$ к частоте первой гармоники волны (47) от медленного времени T при тех же условиях, что и на рис. 1.

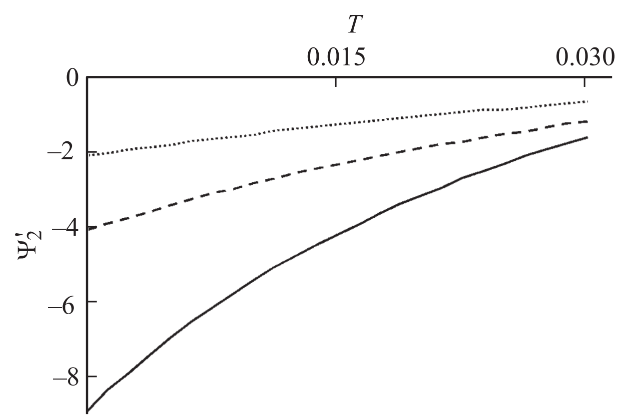

Рис. 4. Зависимость амплитудного множителя мгновенной добавки $\psi_2'(T)$ к частоте второй гармоники волны (47) от медленного времени T при тех же условиях, что и на рис. 1.

Рассматривая (46) в начальный момент времени, приходим к выражениям

$$H_1'(0) = f_1(H_1, H_2, \psi_1, \psi_2); \quad \psi_1'(0) = f_2(H_1, H_2, \psi_1, \psi_2);$$

$$H_2'(0) = f_3(H_1, H_2, \psi_1, \psi_2); \quad \psi_2'(0) = f_4(H_1, H_2, \psi_1, \psi_2),$$

которые показывают, что $H_1'(0)$, $H_2'(0)$, $\psi_1'(0)$, $\psi_2'(0)$ не могут быть произвольными. При $H_1(0) \neq 0$ и $H_2(0) \neq 0$ производные $H_1'(0)$ и $H_2'(0)$ не могут быть одновременно равны нулю. Действительно, полагая в (46) $H_1'(0) = 0$ и $H_2'(0)$=0, получим

$$\begin{cases} (\operatorname{Im} A_1 \operatorname{Im} B_1 + \operatorname{Re} A_1 \operatorname{Re} B_1)\cos\Omega + (\operatorname{Re} A_1 \operatorname{Im} B_1 \\ \qquad - \operatorname{Im} A_1 \operatorname{Re} B_1)\sin\Omega = 0; \\ (\operatorname{Im} A_2 \operatorname{Im} B_2 + \operatorname{Re} A_2 \operatorname{Re} B_2)\cos\Omega + (\operatorname{Im} A_2 \operatorname{Re} B_2 \\ \qquad - \operatorname{Re} A_2 \operatorname{Im} B_2)\sin\Omega = 0. \end{cases} \tag{50}$$

В (50) $\operatorname{Im} A_n$, $\operatorname{Re} A_n$, $\operatorname{Re} B_n$, $\operatorname{Im} B_n$ — конкретные числа, а $\Omega = 2\psi_1(0) - \psi_2(0)$. Очевидно, что при произвольных A_n и B_n никаким выбором разности начальных фаз Ω нельзя добиться, чтобы оба соотношения (50) выполнялись одновременно. Это и означает, что ситуация $H_1'(0) = 0$ и $H_2'(0) = 0$ не реализуется. Следовательно, независимо от начальных условий амплитудный множитель хоть одной из двух волн имеет отличную от нуля производную и начинает изменяться.

Таким образом, свойства системы (46) таковы, что не существует режима движения, при котором не происходило бы изменения хотя бы одного из амплитудных множителей H_1 или H_2. Это означает, что между первой и второй волнами имеет место обмен энергией, причем энергия передается от длинной волны к короткой.

Заключение

В периодической волне на поверхности вязкой жидкости с резонансным волновым числом происходит перекачка энергии в волну с вдвое меньшей длиной, амплитуда которой за счет этого растет даже при наличии слабой диссипации. Передача энергии сопровождается ростом мгновенной частоты резонансной волны. Интенсивность передачи энергии и скорость роста мгновенной частоты волны с резонансным волновым числом уменьшаются при увеличении вязкости. Режим распространения волны с резонансным волновым числом только в течение весьма короткого промежутка времени адекватно описывается моделью с медленно меняющимися во времени параметрами. Этот режим быстро сменяется другим режимом распространения, который следует исследовать отдельно.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ № МД-1990-2005-1 и гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А.* // ЭОМ. 2004. № 2. С. 27–31.
[2] *Wilton J.R.* // Phil. Mag. S. 6. 1915. Vol. 29. N. 173. P. 689–700.
[3] *McGoldrick L.F.* // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 21. Pt. 2. P. 305–331.
[4] *McGoldrick L.F.* // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 42. Pt. 1. P. 193–200.
[5] *Nayfeh A.H.* // Phys. of Fluids. 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
[6] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. Pt. 2. P. 385–395.
[7] *Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
[8] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 45–52.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В.* // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–50.
[11] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
[12] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
[13] *Курочкина С.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 12. С. 44–52.
[14] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
[15] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.
[16] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
[17] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1958. 699 с.
[18] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.