

Вычисление функции Грина для уравнения Лапласа

© И.А. Конников

(Поступило в Редакцию 15 марта 2006 г.)

Предложена модификация традиционного метода вычисления функции Грина в слоистой среде, позволяющая существенно повысить его точность, а также метод вычисления функции Грина, позволяющий контролировать точность расчета потенциала. Метод основан на использовании свойств функций Бесселя и Струве. Для иллюстрации изложенной методики приведен пример расчета. Результаты распространяются на широкий класс задач, решение которых основано на вычислении функции Грина для уравнения Лапласа в слоистой среде.

PACS: 02.30.J

Введение. Исходные положения

Решение многих задач прикладной физики основано на использовании функции Грина для уравнения Лапласа. Так, например, уравнению Лапласа удовлетворяет температура при стационарных процессах, потенциал электростатического поля в точках пространства, свободных от других источников поля и т.д. При решении таких задач в качестве физической модели реального пространства, где рассчитывается поле, нередко принимают слоистую среду, состоящую из произвольного числа плоскопараллельных слоев, неограниченных в азимутальном направлении.

Каждый слой характеризуется толщиной и физическими характеристиками. Физические процессы считаются квазистационарными. Методика определения функции Грина для уравнения Лапласа в такой модели была разработана в целом ряде работ, в том числе [1,2]. Если считать, что слои расположены перпендикулярно оси аппликата, то решение уравнения Лапласа для потенциала единичного точечного источника поля в 1-м слое модели описывается формулой [1–3]

$$G = K \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_l(\lambda, z - z_0) d\lambda, \quad (1)$$

где K — коэффициент, зависящий от физической природы поля (так, например, $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ при расчете электростатического потенциала и $K = \mu_0/(4\pi)$ при решении магнитостатической задачи; ϵ_0 , μ_0 — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства соответственно); J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; x_0 , y_0 , z_0 — абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле; x , y , z — абсцисса, ордината и аппликата источника поля; функция $\Phi_l(\lambda, z - z_0)$ определяется из граничных условий. Метод получения аналитического выражения $\Phi_l(\lambda, z - z_0)$ для полей различной физической природы в строгом классическом варианте изложен в [1,3], соответствующая инженерная методика для потенциала электрического поля представлена в [2,4].

Для каждой конкретной природы поля существует своя физическая модель среды и для любой (в пределах указанных выше ограничений) N -слойной физической модели существует N функций $\Phi_l(\lambda, z - z_0)$, ($l = \overline{1, N}$). Для любого слоя модели в плоскости $z = z_0$ имеется своя функция $\Phi_l(\lambda, z - z_0) = \Phi_l(\lambda)$, причем всегда $\Phi_l(0) = 0$ и $\Phi_l(\infty) < \infty$. Эта неотрицательная монотонно возрастающая функция особенностей не имеет. Она представляет собой отношение линейных комбинаций экспонент [2–4], поэтому несобственный интеграл (1) выражается через первообразные только в простейших случаях. В настоящей работе предлагается метод вычисления функции Грина, который практически не ограничивает точность ее расчета и позволяет получить значение функции Грина, которое можно использовать для контроля точности вычислений приближенными методами. Кроме того, в работе предлагается модификация традиционного метода вычислений, позволяющая существенно повысить его точность.

Способ вычисления функции Грина при традиционной форме ее представления

Как было отмечено выше, метод точного вычисления интеграла (1) существует лишь для тривиальных случаев, не представляющих практического интереса. Предлагаемые различными авторами способы приближенного вычисления основаны на использовании тождества Вебера–Липшица

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \exp(-\lambda \tau) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tau^2}}, \quad (\tau \geq 0). \quad (2)$$

Точность вычисления функции Грина при этом либо оценивается эвристически, либо не рассматривается вообще: оценивается лишь точность представления функции $\Phi(\lambda)$. Исключением является работа [3], где при решении основной задачи электроразведки в частном случае двуслойной среды функцию $\Phi(\lambda)$ удается представить рядом Маклорена с последующим его интегрированием; в результате функция Грина получается

представленной медленно сходящимся рядом. При некоторых сочетаниях значений проводимостей слоев ряд является знакопеременным, и тогда нетрудно оценить погрешность, которая получается при замене ряда его отрезком. Способы улучшения сходимости таких рядов обсуждаются в [5]. В [2] предлагается аппроксимировать функцию $\Phi(\lambda)$ полиномами Лежандра по степеням $u = \exp(-\lambda\tau)$, где τ — нормирующий множитель, причем трудоемкость вычисления коэффициентов аппроксимации сравнима с трудоемкостью вычисления самого интеграла (1). В [4] предлагается аппроксимация интерполяционным многочленом — линейной комбинацией функций Чебышева первого рода — с оптимальным выбором узлов на интервале $[0, 1]$ также по степеням $u = \exp(-\lambda\tau)$. С учетом простоты процедуры получения коэффициентов интерполяции [6] и известных возможностей аппроксимации в базе функций Чебышева первого рода предлагаемый в [4] вариант на первый взгляд представляется предпочтительным. Однако следует учесть следующее.

Точность аппроксимации степенным полиномом по степеням переменной $u \in [0, 1]$ на границах интервала аппроксимации имеет особое значение. Погрешность приближения $\Phi(\lambda)$ на левой границе указанного интервала проявляется как неточность определения свободного члена аппроксимирующего полинома и, как подтверждает вычислительный эксперимент, дает ошибку вычисления интеграла (1), которая обычно имеет ясный физический смысл. Так, например, для двуслойной структуры, ограниченной сверху и снизу идеально проводящими плоскостями (физическая модель микросхемы на диэлектрической подложке в металлическом корпусе), указанная погрешность имеет физический смысл ошибки определения функции Грина для заряда на плоской границе двух диэлектрических полупространств. Свободный член аппроксимирующего полинома является его основной составляющей, так как абсолютная величина суммы остальных членов не превосходит абсолютной величины свободного члена, и свободный член должен рассчитываться с максимальной доступной точностью. Слагаемые полинома со старшими степенями переменной u являются лишь поправкой, учитывающей неоднородность среды, в том числе наличие экранов. Вблизи правой границы интервала изменения переменной $u \in [0, 1]$ функция $\Phi(\lambda) > 0$ и монотонно стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ и $u(\lambda) \rightarrow 1$, а весовой множитель $J_0(\lambda r)$ максимален, поэтому даже незначительная абсолютная погрешность аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ вблизи правой границы интервала проявляется как большая относительная погрешность вычисления подынтегральной функции интеграла (1). При $u = 1$ любая абсолютная погрешность, если она отлична от нуля, приводит к тому, что относительная погрешность вычисления подынтегральной функции обращается в бесконечность. Влияние этой ошибки на точность вычисления функции Грина может оказаться определяющим, необходимо избежать появления участка

с большой погрешностью вычисления подынтегральной функции интеграла (1). В промежутке между крайними узлами интерполяции погрешность приближения функции $\Phi(\lambda)$ знакопеременна, ошибки интегрирования на участках с погрешностью разных знаков аддитивны и отчасти взаимно компенсируются. Но, как известно, аппроксимация в базе функций Чебышева первого рода позволяет минимизировать максимальную абсолютную ошибку, и абсолютная погрешность аппроксимации (если она отлична от нуля) именно на границах интервала аппроксимации максимальна. Поэтому целесообразно формально расширить указанный интервал и интерполировать на интервале $[u_-, u_+]$ (при этом $u_- < 0$, $u_+ > 1$) так, чтобы при $u = 0$ и $u = 1$ погрешность аппроксимации отсутствовала; для $u < 0$ и $u > 1$ интерполирующий многочлен $\Lambda(u)$ не используется. Тогда, приняв формулы из [6] в качестве исходных, получим

$$\Phi(\lambda) \approx \Lambda(u) = \frac{A_0}{2} + \sum_{v=1}^Y A_v T_v \left[(2u - u_- - u_+) / (u_+ - u_-) \right], \quad (3)$$

где Y — старшая степень интерполирующего многочлена;

$$A_v = \frac{2}{Y+1} \sum_{j=0}^Y \Phi(\lambda_j) \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2Y+2}, \quad (v = \overline{0, Y});$$

T_v — функция Чебышева первого рода степени v ;

$$\lambda_j = \frac{\ln u_j}{\tau}; \quad u_j = \frac{u_+ + u_-}{2} + \frac{u_+ - u_-}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2Y+2},$$

$$(j = \overline{0, Y});$$

$$u_- = \frac{1 - \cos \alpha_0}{\cos \alpha_Y - \cos \alpha_0}; \quad u_+ = \frac{1 + \cos \alpha_0}{\cos \alpha_0 - \cos \alpha_Y};$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2Y+2}; \quad \alpha_Y = \frac{(2Y+1)\pi}{2Y+2}.$$

После приведения подобных членов линейная комбинация функций Чебышева (3) принимает вид $\Lambda(u) = \sum_{v=0}^Y B_v u^v$. Тогда формула (1) для функции Грина с учетом соотношения (2) упрощается

$$G(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{v=0}^Y \frac{B_v}{\sqrt{r^2 + (v\tau)^2}}. \quad (4)$$

С формальной точки зрения выражение (4) описывает поле в плоскости $z_0 = 0$, создаваемое расположенной в свободном пространстве на оси аппликата системой Y точечных зарядов величиной B_v , отстоящих от расположенного в начале координат заряда величиной B_0 на расстоянии $v\tau$, $v = \overline{1, Y}$. Такая физическая трактовка поясняет необходимость возможно более точного определения свободного члена аппроксимирующего полинома $\Lambda(u)$ и целесообразность описанного выше изменения интервала интерполяции.

Соотношение (4) должно выполняться с необходимой для практического использования точностью.

Оценка точности вычисления функции Грина

При рассмотрении задач, включающих решение уравнений Пуассона и Лапласа, традиционно ориентируются на погрешности выполнения законов сохранения и расчета полей менее 1% [7]. Оценим точность вычисления функции Грина по формуле (4). Для этого представим выражение (1) в виде

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \int_0^{\beta} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda; \quad I_2 = \int_{\beta}^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda;$$

β — произвольный предел интегрирования, выбираемый из условия

$$\Phi(\beta) \approx \Phi(\infty). \quad (5)$$

С учетом монотонного характера изменения функции $\Phi(\lambda)$ условие (5) может быть выполнено с любой требуемой степенью точности, ограниченной лишь техническими возможностями компьютера. Тогда

$$I_2 \approx \Phi(\infty) \int_{\beta}^{\infty} J_0(\lambda r) d\lambda = \Phi(\infty) \Theta(\beta r), \quad (6)$$

где аналитическое выражение функции $\Theta(\beta r)$ имеет вид

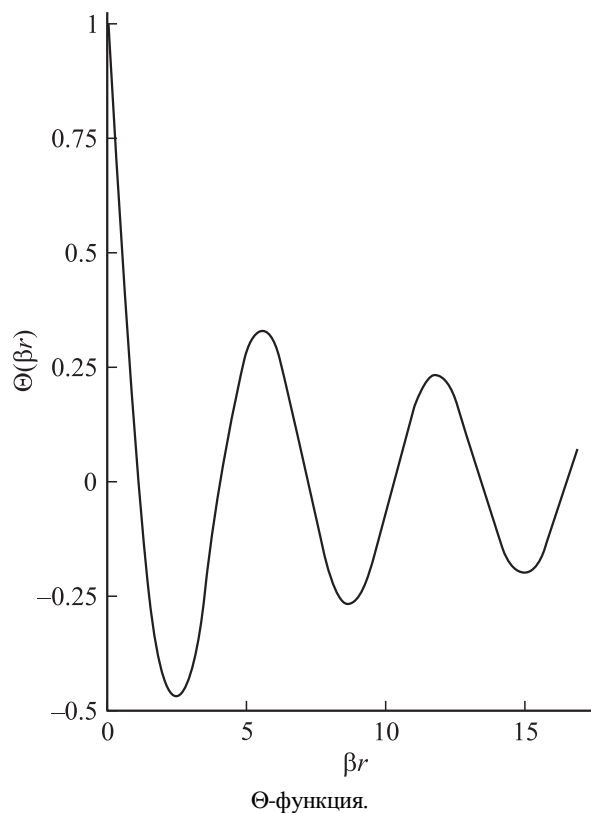
$$\Theta(\beta r) = 1 - \beta r J_0(\beta r) + \frac{\pi \beta r}{2} [J_0(\beta r) H_1(\beta r) - J_1(\beta r) H_0(\beta r)]. \quad (7)$$

В выражении (7) J_{κ} — функция Бесселя первого рода κ -го порядка; H_{κ} — функция Струве κ -го порядка; $\kappa = 1, 2$ [8].

Функция $\Theta(\beta r)$ имеет колебательный характер (см. рисунок). Первые нули θ_{κ} ($\kappa = \overline{1, 11}$) этой функции представлены в табл. 1. При вычислении нулей с помощью выражения (7) функции Бесселя рассчитывались

Таблица 1. Нули Θ -функции

κ	Нули θ_{κ}
1	1.108364661
2	4.062644472
3	7.151557848
4	10.269381067
5	13.397636191
6	16.530742102
7	19.666476075
8	22.803787326
9	25.942117194
10	29.081142112
11	32.220662040



по интегральной формуле Бесселя [9], функции Струве — по интегральной формуле Пуассона [9]. Указанные интегральные представления хорошо верифицированы и допускают простой контроль погрешности; повышенный расход машинного времени по сравнению, например, с [10] при проведении данного исследования значения не имеет. Для снижения влияния погрешности округления все вычисления проводились с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда. При численном интегрировании использовалась квадратурная формула Гаусса для трех узлов, причем для снижения влияния методической погрешности интервал интегрирования был разбит на 10^4 шагов. При таком способе вычислений результат содержит по меньшей мере 11 верных десятичных знаков. Погрешность расчета интегралов контролировалась методом Рунге [11], не требующим вычисления производной высокого порядка от подынтегральной функции.

Для выбора предела интегрирования интеграла I_2 при заданной относительной погрешности δ_{Φ} равенства (5) необходимо решить относительно β уравнение $1 - \Phi(\beta)/\Phi(\infty) = \delta_{\Phi}$. Соотношение (5) обеспечивается любым пределом интегрирования $\beta_{\kappa} \in [\beta, \infty]$. Определяемый по табл. 1 для наибольшего расстояния¹ r_{\max} ближайший больший нуль Θ -функции $\theta_{\kappa} \geq \beta r_{\max}$ даст

¹ В качестве небольшого размера r_{\max} , необходимого для прямых расчетов поля или последующего интегрирования функции Грина, может быть принята, например, диагональ самого длинного прямоугольного проводника на подложке или диагональ рабочего поля подложки.

величину произведения $\beta_{\min} r_{\max}$, обладающего следующим свойством: для всех расстояний $r \leq r_{\max}$ может быть взят один и тот же нуль Θ -функции θ_k , так как он соответствует значению $\beta_k = \theta_k/r \geq \beta_{\min}$, а β_k заведомо обеспечивает соотношение (5) и всегда обеспечивает равенство $I_2 = 0$ при заданной относительной погрешности δ_f . Тогда функция Грина

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\beta_k} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Равенство (8) является принципиально точным. Вычисление интеграла с конечными пределами в (8) не представляет особых трудностей при численном интегрировании. Оценку погрешности интегрирования можно проводить не только по внутренней сходимости: точность приближенных квадратурных формул хорошо изучена. С учетом возможности разбиения интервала интегрирования на шаги значение функции Грина в произвольной точке на плоскости $z = z_0$ может быть рассчитано по формуле (8) с любой требуемой точностью (в пределах возможностей компьютера и языка программирования). Это позволяет при вычислении потенциала в слоистой среде полученное с помощью формулы (8) значение условно считать точным и использовать его для контроля точности вычисления функции Грина приближенными методами. В частности, это позволяет оценить погрешность вычислений по формуле (4), обусловленную аппроксимацией функции $\Phi(\lambda)$.

Неустранимым, на первый взгляд, недостатком формы представления функции Грина (8) является трудность ее интегрирования по объему реального источника поля с весом, равным плотности распределения элементарных источников. Этот недостаток легко возмещается простотой и доступностью получения точных значений функции Грина по формуле (8), что дает возможность использовать эту формулу не только для контроля точности. В случае необходимости указанного интегрирования можно провести аппроксимацию выражения (8), причем вид аппроксимирующего выражения для удобства интегрирования можно подобрать с учетом специфики решаемой задачи. Актуальность такого приема обусловлена еще и тем обстоятельством, что приближенные выражения для функции Грина вида (4), полученные с использованием формулы Вебера–Липшица, обладают тремя неустранимыми недостатками. Во-первых, интегрирование этих выражений по объему источника поля приводит к весьма громоздким выражениям [2,4], а интегралы от функции Грина с весом, равным плотности элементарных источников поля, нередко через первообразные не выражаются, как и интегралы, включающие выражение (8). Во-вторых, при отсутствии методов точного вычисления интеграла (1) оценку погрешности его вычисления можно проводить лишь по внутренней сходимости; такая оценка не всегда надежна и возможна. В-третьих, как показывает вычислительный эксперимент с использованием предложенного выше метода, при

традиционном методе вычислений, предполагающем аппроксимацию функции $\Phi(\lambda)$ суммой экспонент и использование формулы Вебера–Липшица, погрешность расчета функции Грина существенно зависит от расстояния r и при его увеличении, сохраняя знак, быстро растет по абсолютной величине. Поэтому нередко необходима другая форма представления функции Грина, отличающаяся от (4) и приводящая к простым выражениям.

Форма представления функции Грина (8) не накладывает ограничений на вид аппроксимирующей функции. В зависимости от специфики решаемой задачи (от формы поверхности реального источника сигнала, вида используемой системы координат, диапазона расстояний от источника сигнала до точек, где должно вычисляться поле и т.д.) это может быть, например, отрезок ряда Лорана с четными положительными степенями переменной r или отрезок ряда Дирихле и др. Однако получение и исследование конкретных аппроксимирующих выражений для конкретных задач выходит за рамки данной работы.

Выбор масштабирующего множителя

Как показывают проведенные исследования, традиционная методика представления функции Грина в форме (4) имеет значительный резерв повышения точности, в публикациях по рассматриваемому вопросу не отмеченных (по сведениям автора). Оказалось, что при заданной старшей степени интерполирующего многочлена Y весьма существенное влияние на точность аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ оказывает выбор масштабирующего множителя τ . В работе [2] предлагается принять множитель τ равным толщине одного из слоев (а именно толщине подложки). В отсутствие формального критерия для выбора нужного слоя задачу определения τ приходится решать методом полного перебора, что для многослойной структуры не всегда приемлемо из-за возникающих при вычислениях проблем: переполнение разрядной сетки, потеря точности и др. Более того, найденное таким способом значение τ не позволяет обеспечить максимальную точность аппроксимации, которая достижима для заданного Y . Поэтому в качестве рабочего значения масштабирующего множителя предлагается принять значение τ_0 , которое минимизирует максимальную величину абсолютной погрешности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$. Способ получения такого значения не принципиален: его нетрудно получить любым из известных методов минимизации. Значение $\tau = \tau_0$ назовем характеристическим размером конструкции. Как показывает вычислительный эксперимент, такое значение τ мало отличается от получаемого при минимизации максимальной относительной ошибки для всех $u \in [0, 1]$ за исключением области вблизи точки $u = 1$, где поведение относительной ошибки нерегулярно, по-видимому, из-за потери точности компьютерных вычислений.

Использование характеристического размера конструкции в качестве рабочего значения масштабирующего множителя позволяет существенно повысить точность традиционного метода расчета функции Грина. Преимущество предлагаемой модификации традиционного метода подтверждается приведенным ниже примером расчета.

Пример расчета

Для иллюстрации изложенной методики рассмотрим двуслойную структуру, ограниченную сверху и снизу идеально проводящими плоскостями (физическая модель микросхемы на диэлектрической подложке в металлическом корпусе). Единичный точечный заряд расположен на границе раздела слоев. Для такой конструкции

$$\Phi(\lambda) = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2\Omega - \varepsilon_1} \left[\frac{1}{1 + u^{2(h-H)/\tau_0}} - \frac{1}{1 + u^{2(H-h)/\tau_0}} \right],$$

где $u = \exp(-\lambda\tau_0)$;

$$\Omega = \frac{(1 + u^{2h/\tau_0})[1 - u^{2(h-H)/\tau_0}]}{(1 - u^{2h/\tau_0})[1 + u^{2(h-H)/\tau_0}]},$$

ε_1 и ε_2 — относительные диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего слоев соответственно; h — толщина нижнего слоя (толщина подложки); H — расстояние между проводящими плоскостями (внутренняя высота корпуса).

В табл. 2 сведены результаты исследования точности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ при $\tau = h$ и $\tau = \tau_0$ для часто встречаемых на практике значений: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 8.5$, $h = 1$, $H = 3$. Минимум максимальной абсолютной погрешности Δ_0 и минимум максимальной относительной погрешности аппроксимации δ_0 соответствует $\tau = \tau_0$, максимальная абсолютная погрешность Δ и максимальная относительная погрешность δ рассчитывались при $\tau = h$. Из табл. 2 видно, что при $\tau = \tau_0$ точность аппроксимации значительно выше.

Таблица 2. Зависимость максимальной погрешности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ от старшей степени Y аппроксимирующего полинома $\Lambda(e^{-\lambda\tau})$

Y	Δ_0	$\delta_0, \%$	Δ	$\delta, \%$
1	$7.81 \cdot 10^{-3}$	4.11	$3.14 \cdot 10^{-2}$	18
2	$1.27 \cdot 10^{-3}$	4.76	$1.12 \cdot 10^{-2}$	5.79
3	$-1.69 \cdot 10^{-4}$	-1.21	$9.57 \cdot 10^{-4}$	3.64
4	$1.29 \cdot 10^{-5}$	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$-3.84 \cdot 10^{-4}$	$-1.84 \cdot 10^{-1}$
5	$-3.93 \cdot 10^{-6}$	$-2.95 \cdot 10^{-3}$	$-5.9 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-1}$
6	$-1.53 \cdot 10^{-6}$	$-1.02 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$
7	$4.07 \cdot 10^{-7}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$3.06 \cdot 10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$
8	$8.83 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$-6.5 \cdot 10^{-7}$	$-3.1 \cdot 10^{-4}$
9	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$-1.94 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-4}$
10	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$1.38 \cdot 10^{-5}$
11	$-4.3 \cdot 10^{-10}$	$-3.28 \cdot 10^{-7}$	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$-6.9 \cdot 10^{-6}$

При $Y = 2$ получаем $\tau_0/h = 1.842468$, $\Delta_0 = 1.2728 \cdot 10^{-3}$, $\delta_0 = 4.76\%$; при $Y = 3$ — $\tau_0/h = 1.970179$, $\Delta_0 = -1.6858 \cdot 10^{-4}$, $\delta_0 = -1.21\%$. Соотношение (5) с относительной погрешностью $\delta_\Phi = 0.01\%$ выполняется при $\beta = 4896.11$. При $r = \tau_0$ получим $\beta r = 9.64622$. Ближайший больший корень Θ -функции $\theta_4 = 10.269381$, относительная погрешность вычисления функции Грина $\delta_G = -0.137\%$. При $r = 2\tau_0$ ближайший больший корень Θ -функции $\theta_6 = 16.530742$, $\delta_G = -3.937\%$.

Для всех $Y > 3$ отношение $\tau_0/h \approx 2$ (с погрешностью $\leq 6.5 \cdot 10^{-4}$).

Таким образом, проведенные с применением предлагаемого метода контроля точности исследования показали, что использование характеристического размера конструкции в качестве рабочего значения масштабирующего множителя позволяет существенно повысить точность традиционного метода расчета функции Грина.

Заключение

Предлагаемый метод, основанный на использовании свойств специальных функций, решает задачу вычисления функции Грина без аппроксимации. При его использовании точность расчетов практически не ограничивается, что дает возможность при выборе и реализации конкретного метода приближенного вычисления функции Грина исходить из требуемой погрешности вычисления поля, контролируя эту погрешность, и не ограничиваться контролем точности промежуточных результатов.

Предлагаемая методика вычисления функции Грина, сочетающая аппроксимацию в базисе функций Чебышева первого рода и численную минимизацию ошибки как функции масштабирующего множителя, позволяет существенно повысить точность традиционного метода расчета функции Грина по сравнению с известными методиками. Поскольку исследованное соотношение (1) справедливо для полей различной физической природы, полученные результаты могут быть использованы для модификации методов решения широкого класса задач, решение которых основано на вычислении функции Грина для уравнения Лапласа в слоистой среде.

Список литературы

- [1] Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963. 432 с.
- [2] Семенов В.И. // Радиотехника. 1973. Т. 28. № 10. С. 84–90.
- [3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- [4] Конников И.А. // Судостроение. 1980. № 8. С. 32–33.
- [5] Morse P.M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. Part I. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1953. (Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 930 с.)

- [6] *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. New York, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill Book Company, 1968. (Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. СПб.: Лань, 2003. 831 с.)
- [7] *Кукишева Э.А., Снытников В.Н.* // Вычислительные технологии. 2005. № 4. С. 63–71.
- [8] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. 1108 с.
- [9] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [10] *Скобло В.С.* // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. № 7. С. 61–63.
- [11] *Hamming R.W.* Numerical methods for scientists and engineers. New York, San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1962. (Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. Изд. 2-е, испр. М.: Наука, 1972. 400 с.)