

## Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации

© А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

(Поступило в Редакцию 6 февраля 2006 г.)

Показано существование двух различных типов фазовой синхронизации связанных хаотических осцилляторов в зависимости от расстройки значений управляющих параметров взаимодействующих осцилляторов, как это имеет место в случае классической синхронизации периодических осцилляторов, и соответственно двух сценариев разрушения режима фазовой синхронизации. Когда взаимодействующие хаотические осцилляторы достаточно слабо расстроены, разрушение режима фазовой синхронизации не сопровождается потерей фазовой когерентности аттракторов. Напротив, при большой расстройке значений управляющих параметров хаотический аттрактор всегда становится фазово-некогерентным при разрушении режима фазовой синхронизации.

PACS: 05.45.xt

### Введение

Явление фазовой синхронизации, наблюдаемое в системах различной природы [1,2], включая химические, биологические и физиологические, активно изучается в последнее время и вызывает большой интерес исследователей [3–5]. Следует сразу оговориться, что в русскоязычной литературе под термином „фазовая синхронизация“, возникшим достаточно давно, изначально понималось другое явление [6–8], суть которого состоит в следующем: синхронизация генераторов колебаний достигается за счет воздействия на них полученного некоторым способом преобразования фаз этих генераторов, причем генераторы и преобразователи фаз могут быть самой различной природы. Принцип фазовой синхронизации положен в основу электронных систем фазовой автоподстройки, синхронных машин, систем фазового электропривода и т.д.

В настоящее время в русскоязычной научной литературе [3,9–12] термин „фазовая синхронизация“ широко используется и в смысле работ [13–15], хотя, конечно, это вносит некоторую путаницу. Поэтому сразу следует отметить, что в настоящей работе термин „фазовая синхронизация“ используется в том смысле, в котором его трактуют работы [3,13–16].

В основе концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы  $\varphi(t)$  хаотического сигнала [13,14,16]. Следует сразу отметить, что не существует универсального способа введения фазы хаотического сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Так, существует несколько способов введения фаз, подходящих для „хороших“ систем с простой топологией хаотического аттрактора, которые в литературе называются „системами с хорошо определенной фазой“ или „системами с фазово-когерентным аттрактором“. Хаотический аттрактор та-

ких систем должен быть таковым, что проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний  $(x, y)$  все время вращается вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. В этом случае мгновенная фаза  $\varphi(t)$  хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости  $(x, y)$  [15,17]

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (1)$$

Тот факт, что проекция фазовой траектории все время вращается вокруг начала координат и не огибает его, приводит к тому, что средняя частота  $\bar{\Omega}$  хаотического сигнала, определяемая как средняя скорость изменения фазы

$$\bar{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle, \quad (2)$$

совпадает с основной частотой  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  Фурье спектра  $S(f)$  колебаний системы, что, в свою очередь, рассматривается как критерий корректности введения в рассмотрение мгновенной фазы хаотического сигнала [18]. Если же проекция фазовой траектории ведет себя так, что в какие-то моменты времени она огибает начало координат, не делая полного оборота вокруг него, это приводит к тому, что начало координат „замазывается“ участками фазовой траектории, и такой аттрактор называют „фазово-некогерентным“, а саму систему — системой с „плохо определенной фазой“.

Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [13,16]

$$\xi(t) = x(t) + jH[x] = A(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (3)$$

где функция  $H[x]$  является преобразованием Гильберта временной реализации  $x(t)$

$$H[x] = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (4)$$

(*v.p.* в соотношении (4) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно фаза  $\varphi(t)$  хаотического сигнала  $x(t)$  определяется из соотношений (3) и (4).

Третьим способом, традиционно используемым для определения фазы хаотического сигнала, является поверхность сечения Пуанкаре [13,16], так что фаза определяется как

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (5)$$

где  $t_n$  — момент времени, соответствующий  $n$ -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией.

Очевидно, что для систем с фазово-когерентным аттрактором способы (1) и (5) дают практически одинаковые результаты (динамика мгновенной фазы для этих двух методов будет незначительно отличаться на интервалах времени, меньших характерного периода возврата фазовой траектории к поверхности сечения Пуанкаре) [3]. Известно, что мгновенная фаза, вводимая с помощью преобразования Гильберта, ведет себя в случае фазово-когерентного аттрактора практически так же, как и фазы, вводимые способами (1) и (5) (см., например, [15]).

Режим фазовой синхронизации означает, что фазы  $\varphi_{1,2}(t)$  хаотических сигналов взаимодействующих осцилляторов (или фазы хаотического осциллятора и внешнего сигнала) оказываются захваченными: их разность не нарастает по модулю с течением времени (т.е. не превышает некоторую наперед заданную константу)

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}. \quad (6)$$

Очевидно, что захват фаз влечет за собой совпадение частот хаотических сигналов, которые должны быть (в силу соотношений (6) и (2)) одинаковыми для взаимодействующих систем.

Как правило, различий между теми или иными особенностями режима фазовой синхронизации не делают. В качестве исключения следует упомянуть работу [19], где делается попытка обосновать существование трех различных способов перехода к фазовой синхронизации в зависимости от свойств системы. В настоящей работе показано, что существуют только два различных типа фазовой синхронизации хаотических осцилляторов, которые обуславливаются величиной расстройки управляющих параметров взаимодействующих систем точно так же, как и в случае классической синхронизации периодических осцилляторов. Существование двух типов фазовой синхронизации приводит к наличию

двух различных сценариев разрушения данного режима синхронной динамики взаимодействующих систем. При достаточно малой расстройке параметров взаимодействующих осцилляторов в случае разрушения режима фазовой синхронизации их хаотические аттракторы будут оставаться фазово-когерентными. Если же расстройка управляющих параметров велика, то с уменьшением значения параметра связи между взаимодействующими подсистемами (или при уменьшении амплитуды внешнего воздействия) по крайней мере один из аттракторов взаимодействующих осцилляторов теряет фазовую когерентность и ниже порога разрушения (возникновения) фазовой синхронизации является фазово-некогерентным.

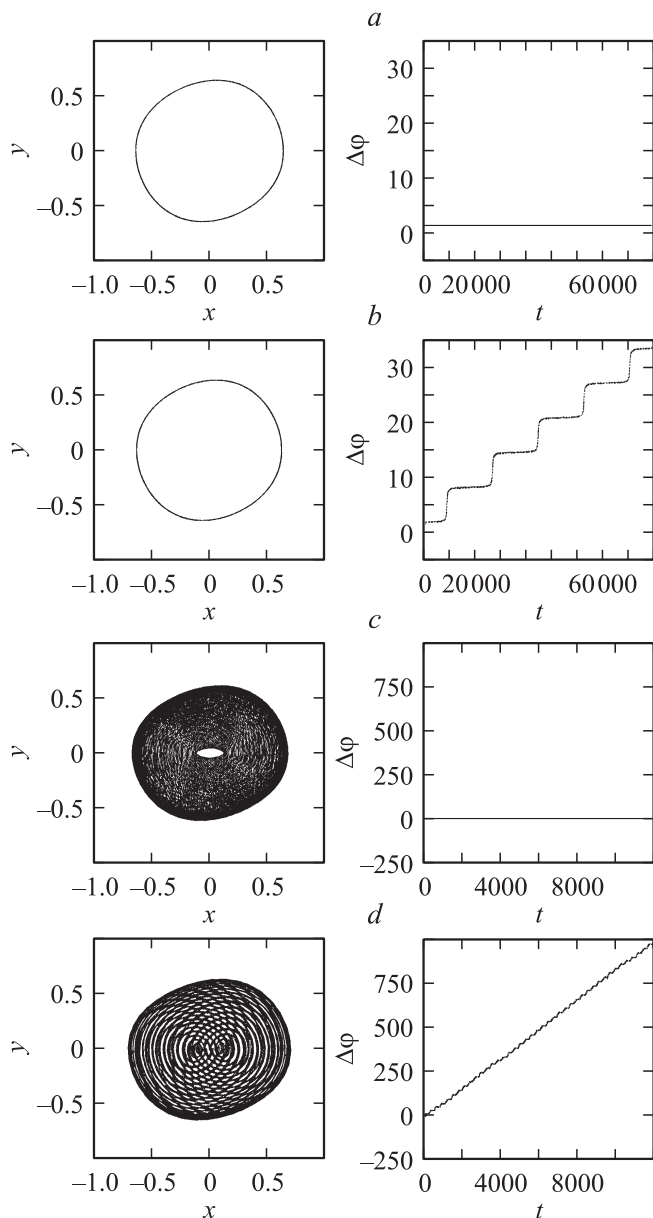
## 1. Синхронизация периодических колебаний с позиций концепции хаотической фазовой синхронизации

Рассмотрим поведение эталонной модели нелинейной теории колебаний — неавтономного генератора Ван-дер-Поля, находящегося под гармоническим воздействием в случае малой и большой расстройки частоты внешнего вынуждающего сигнала и частоты собственных колебаний — с позиций теории хаотической фазовой синхронизации. Рассматриваемая система имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(2\pi f_e t), \quad (7)$$

где  $A$  и  $f_e$  — амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия соответственно,  $\lambda$  — параметр нелинейности. Данная система является классической моделью теории синхронизации, и ее поведение описано во многих учебниках (см., например, [20,21]). Очевидно, что в рассматриваемом случае колебания в системе, конечно, не являются хаотическими, но понятия фазы сигнала, хаотической фазовой синхронизации и фазовой когерентности аттрактора можно легко применить и в этом случае, аналогично тому как это осуществляется при рассмотрении поведения хаотических осцилляторов.

Неавтономное поведение ( $A \neq 0$ ) системы (7) существенным образом зависит от величины расстройки между собственной частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия, а также амплитуды внешнего воздействия. Хорошо известно [16,20,21], что при малых и больших расстройках частот возникновение режима синхронизации с увеличением параметра связи осуществляется по-разному. При малых расстройках осуществляется захват частоты автоколебаний автогенератора внешней силой, а при больших происходит подавление колебаний на собственной частоте генератора и увеличение интенсивности колебаний на частоте вынужденной силы. При малых значениях параметра нелинейности  $\lambda$  динамика системы (7) может быть проанализирована с помощью метода медленно меняющихся амплитуд, при этом осуществляется переход к укороченным уравнениям для комплексной амплитуды колебаний. И если



**Рис. 1.** Аттракторы неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля под внешним гармоническим сигналом и зависимость разности фаз  $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - 2\pi f_e t$  от времени  $t$  при малой частотной отстройке  $f_e = 0.1583$  (a) выше ( $A = 0.0065$ ) и (b) ниже ( $A = 0.0055$ ) границы режима синхронизации на плоскости параметров  $(f_e, A)$ . Фаза сигнала  $\varphi(t)$  вводилась в рассмотрение как угол поворота  $\varphi = \arctg(y/x)$  на плоскости  $(x, y)$ , где  $y(t) = \dot{x}(t)$ . Значение управляющего параметра  $\lambda = 0.1$ . Собственная частота колебаний осциллятора Ван-дер-Поля равна  $f_0 = 0.1592$ . Аналогичные иллюстрации для большой расстройки ( $f_e = 0.1275$ ). c —  $A = 0.1450$ , лежащее выше, d —  $A = 0.1400$ , находящееся ниже границы режима фазовой синхронизации.

при малой частотной расстройке возникновению режима синхронизации соответствует седло-узловая бифуркация на плоскости комплексных амплитуд, то для больших значений расстройки частот потеря синхронного режима

в системе выглядит как последовательность бифуркации Андронова–Хопфа неподвижной устойчивой точки и увеличение амплитуды предельного цикла до момента, когда цикл пересекает начало координат (см. более подробно [16,21]). С точки зрения фазовой синхронизации синхронный режим при больших частотных расстройках разрушается именно тогда, когда предельный цикл пересекает начало координат (при малых расстройках разрушение фазовой синхронизации совпадает с моментом разрушения режима захвата частот). В тот момент, когда предельный цикл на плоскости комплексных амплитуд пересекает начало координат, аттрактор, соответствующий поведению системы, перестает быть фазово-когерентным. Таким образом, для случая синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием при больших частотных расстройках разрушение режима фазовой синхронизации эквивалентно разрушению фазовой когерентности аттрактора.

Итак, при достаточно большой расстройке частот аттрактор осциллятора Ван-дер-Поля становится фазово-некогерентным в области, лежащей ниже границы языка фазовой синхронизации на плоскости параметров  $(f_e, A)$ , в то время как для малых значений расстройки аттрактор является фазово-когерентным как внутри языка синхронизации, так и вне его. Соответствующая ситуация проиллюстрирована на рис. 1, на котором показаны вид фазового портрета на плоскости состояний  $(x, \dot{x})$  и зависимость от времени разности фаз  $\Delta\varphi$  внешнего сигнала и временной реализации неавтономной системы выше и ниже порога фазовой синхронизации для малых (рис. 1, a, b) и больших (рис. 1, c, d) частотных расстроек. Видно, что в случае малых частотных расстроек (рис. 1, a, b) при разрушении режима фазовой синхронизации (когда перестает выполняться условие захвата фаз (6)) аттрактор системы сохраняет фазовую когерентность. В то же время для больших частотных расстроек (рис. 1, c, d) нарушение условия (6) связано с тем, что аттрактор перестает быть фазово-когерентным. Можно показать, что точно такую же картину можно наблюдать и для хаотического осциллятора, находящегося под внешним гармоническим воздействием. Однако в настоящей работе будут рассмотрены более сложные примеры, демонстрирующие тем не менее те же два сценария разрушения режима фазовой синхронизации.

## 2. Разрушение хаотической фазовой синхронизации в системе двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера

Рассмотрим теперь более сложный пример разрушения режима фазовой синхронизации в системе двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера, характеризующихся в автономных режимах фазово-когерентными хаотическими аттракторами. Ди-

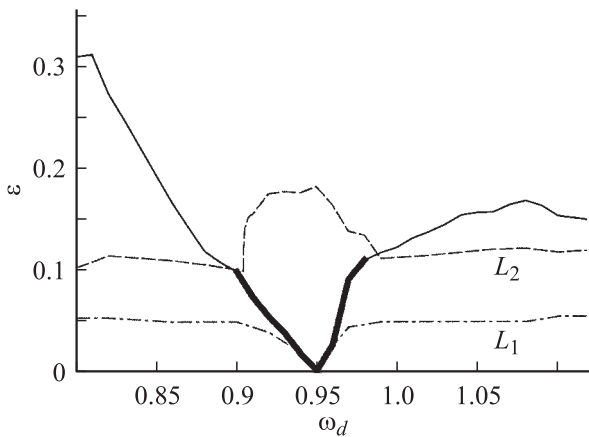
намика этой системы описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \quad (8)$$

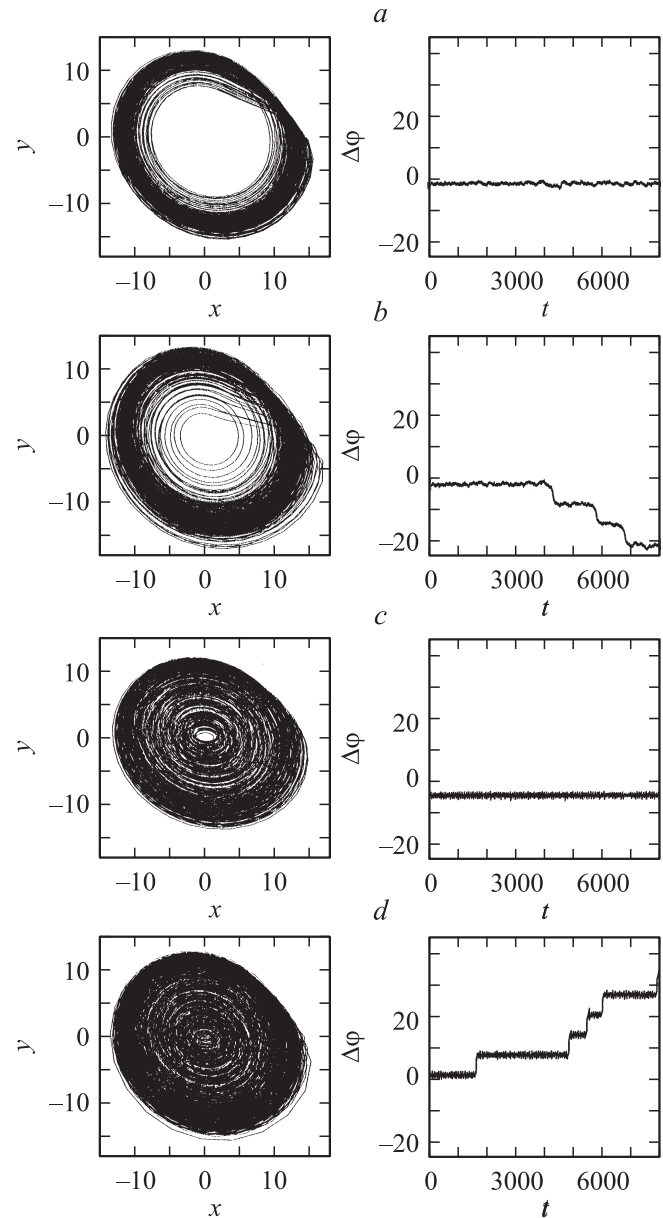
где  $\varepsilon$  — параметр связи. Значения управляющих параметров были заимствованы из [22]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметр  $\omega_r$ , задающий собственную частоту ведомой системы, был фиксирован  $\omega_r = 0.95$ , а аналогичный параметр ведущей системы  $\omega_d$  варьировался в диапазоне от 0.8 до 1.1, чтобы обеспечить расстройку взаимодействующих осцилляторов. Как уже отмечалось выше, при указанных значениях управляющих параметров  $a$ ,  $p$ ,  $c$ ,  $\omega_r$  во всем диапазоне значений параметра  $\omega_d$  хаотические аттракторы обеих подсистем в отсутствие связи являются фазово-когерентными.

На рис. 2 изображена плоскость параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$  для системы (8). Сплошная линия соответствует границе установления режима фазовой синхронизации. Наличие синхронного режима определялось выполнением условия захвата фаз (более подробно см. [3–5,16]). Мгновенная фаза хаотического сигнала вводилась традиционным способом как угол поворота на плоскости переменных  $(x, y)$ :  $\varphi = \arctg(y/x)$ , что было возможно сделать благодаря фазовой когерентности хаотических аттракторов.

При исследовании поведения двух однонаправлено связанных систем Ресслера было обнаружено, что существуют два сценария разрушения режима фазовой синхронизации, так же как при синхронизации перио-



**Рис. 2.** Граница режима фазовой синхронизации на плоскости параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$  для системы (8). В области малых значений расстройки управляющих параметров  $|\omega_r - \omega_d|$  связанных осцилляторов граница показана сплошной жирной линией, а в области достаточно больших расстройек — сплошной тонкой линией. Штрихпунктир  $L_1$  соответствует переходу одного из нулевых ляпуновских показателей в область отрицательных значений. Пунктир  $L_2$  отвечает обращению в нуль положительной условной ляпуновской экспоненты.



**Рис. 3.** Аттракторы ведомой системы Ресслера (8) и зависимость разности фаз  $\Delta\varphi(t) = \varphi_d(t) - \varphi_r(t)$  от времени  $t$  при малой отстройке от параметров ведущей системы ( $\omega_d = 0.91$ ) (a) выше ( $\varepsilon = 0.077$ ) и (b) ниже (0.075) границы установления режима фазовой синхронизации. Аналогичные иллюстрации для случая большой отстройки параметра  $\omega_d$  ( $\omega_d = 1.00$ ): (c)  $\varepsilon = 0.125$  и (d) 0.123.

дических колебаний внешней гармонической силой. На рис. 3, a, b показаны хаотические аттракторы ведомой системы и зависимость разности фаз  $\Delta\varphi(t) = \varphi_d(t) - \varphi_r(t)$  от времени  $t$  выше и ниже границы фазовой синхронизации в случае малой расстройки параметров  $\omega_d$  и  $\omega_r$  (граница фазовой синхронизации в области малой расстройки изображена на рис. 2 сплошной жирной линией). Нетрудно видеть, что при уменьшении параметра связи  $\varepsilon$  режим фазовой синхронизации разру-

шается, хотя хаотические аттракторы остаются фазово-когерентными (рис. 3, *b*). На рис. 3, *c, d* показан второй сценарий разрушения режима фазовой синхронизации взаимодействующих систем, реализующийся при большой отстройке значений управляющих параметров. Ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы Ресслера становится фазово-когерентным, что и приводит к разрушению режима фазовой синхронизации. Очевидно, что механизмы разрушения фазовой синхронизации в обоих случаях такие же, как и при синхронизации периодических колебаний (ср. рис. 1 и 3), и могут быть объяснены взаимодействием основных спектральных компонент в спектрах мощности связанных хаотических осцилляторов.

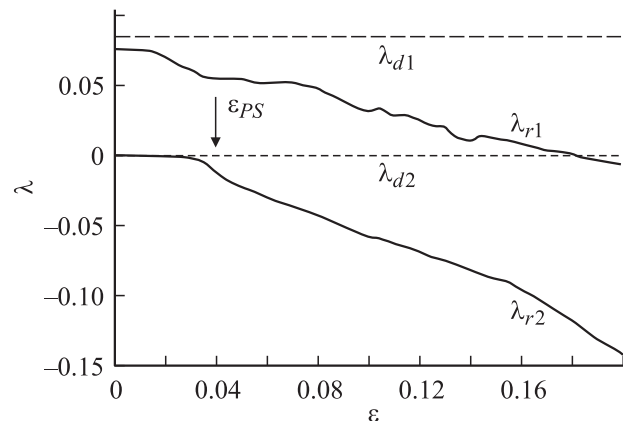
### 3. Старшие ляпуновские показатели и граница возникновения режима фазовой синхронизации

Возникновение режима фазовой синхронизации достаточно часто описывают с помощью ляпуновских экспонент (см., например, [3,19]). Поэтому целесообразно перейти к рассмотрению вопроса о том, как связаны изменения, происходящие в спектре ляпуновских показателей при изменении значения параметра связи, с границей возникновения режима фазовой синхронизации.

Рассматриваемая система двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (8) характеризуется шестью ляпуновскими показателями, три из которых  $\lambda_{d1} > \lambda_{d2} > \lambda_{d3}$  связаны с динамикой ведущей системы, и соответственно они не зависят от величины параметра связи  $\varepsilon$ . Три других ляпуновских показателя (называемых условными ляпуновскими показателями [23,24])  $\lambda_{r1} > \lambda_{r2} > \lambda_{r3}$  характеризуют поведение ведомой системы, и их значения изменяются с увеличением параметра связи  $\varepsilon$  между системами. Очевидно, что при нулевом значении параметра связи обе системы демонстрируют автономную динамику, и соответственно в спектре ляпуновских показателей должны присутствовать два нулевых показателя, один из которых ( $\lambda_{d2}$ ) относится к ведущему, а второй ( $\lambda_{r2}$ ) — к ведомому осциллятору.

На рис. 4 показана зависимость четырех старших ляпуновских показателей связанных систем Ресслера (8) от значения параметра связи для  $\omega_d = 0.93$ . Спектр ляпуновских показателей был подсчитан с помощью процедуры Бенеттина с ортогонализацией по методу Грамма–Шмидта [25]. Отчетливо видно, что значения двух ляпуновских показателей ( $\lambda_{d1,2}$ ) не изменяются с увеличением параметра связи  $\varepsilon$ , в то время как два других ляпуновских показателя  $\lambda_{r1,2}$  — уменьшаются. Два наименьших ляпуновских показателя  $\lambda_{r3}$  и  $\lambda_{d3}$  имеют значение порядка  $-10$  и не оказывают никакого влияния на процессы, происходящие в рассматриваемой системе.

При некотором значении параметра связи  $\varepsilon$  один из нулевых ляпуновских показателей (а именно  $\lambda_{r2}$ )



**Рис. 4.** Зависимость показателей Ляпунова двух однонаправлено связанных систем Ресслера (8) от значения параметра связи. Кривые  $\lambda_{d1}$  и  $\lambda_{d2}$  соответствуют ляпуновским показателям ведущей системы (показаны пунктиром), а  $\lambda_{r1}$  и  $\lambda_{r2}$  отражают поведение ляпуновских экспонент ведомой системы (сплошные линии). Наименьшие ляпуновские показатели  $\lambda_{d3}$  и  $\lambda_{r3}$  примерно равны  $-10$ , для рассматриваемой задачи они несут незначительный вклад, и поэтому не показаны на рисунке. Величина параметра связи  $\varepsilon_{PS}$ , отмеченная стрелкой, соответствует моменту возникновения режима фазовой синхронизации.

переходит в область отрицательных значений. Традиционно считается, что переход нулевого ляпуновского показателя в отрицательную область непосредственно связан с возникновением режима фазовой синхронизации в случае, когда аттракторы взаимодействующих осцилляторов при нулевом параметре связи являются фазово-когерентными (см. более подробно [3,17,19]). Из рис. 4 отчетливо видно, что переход этого ляпуновского показателя в область отрицательных значений происходит несколько раньше, чем возникает режим фазовой синхронизации. Действительно, обозначенное на рисунке стрелкой значение параметра связи  $\varepsilon_{PS}$ , соответствующее моменту возникновения режима фазовой синхронизации, не совпадает с величиной параметра  $\varepsilon$ , при которой происходит переход одного из нулевых ляпуновских показателей ( $\lambda_{r2}$ ) в область отрицательных значений. С дальнейшим увеличением параметра связи один из положительных ляпуновских показателей ( $\lambda_{r1}$ ) также становится отрицательным (см. рис. 4).

На рис. 2 на плоскости параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$  помимо границы фазовой синхронизации изображены две характерные кривые  $L_1$  и  $L_2$ , связанные с поведением ляпуновских показателей рассматриваемой системы (8). Первая кривая  $L_1$  соответствует значению параметра связи  $\varepsilon$ , при котором наблюдается переход одного из нулевых ляпуновских показателей ( $\lambda_{r2}$ ) в область отрицательных значений. Вторая кривая  $L_2$  соответствует переходу через нуль одного из положительных ляпуновских показателей (как уже отмечалось выше, в рассматриваемом случае однонаправлено связанных хаотических осцилляторов это  $\lambda_{r1}$ ).

Полученные в рамках настоящей работы результаты опровергают утверждение о том, что для взаимодействующих хаотических осцилляторов с фазово-когерентными аттракторами переход нулевого ляпуновского показателя в отрицательную область непосредственно связан с возникновением режима фазовой синхронизации: как нетрудно видеть из рис. 2, кривая  $L_1$  совпадает с границей фазовой синхронизации только в очень малом диапазоне значений расстройки параметров связанных осцилляторов, хотя аттракторы как ведущей, так и ведомой подсистем, находящихся в автономном режиме, являются фазово-когерентными. Более того, даже при малой расстройке параметров нельзя говорить о том, что граница возникновения режима фазовой синхронизации определяется переходом нулевого ляпуновского показателя в область отрицательных значений. Действительно, например, при  $\omega_d = 0.9$ , разделяющем два типа разрушения фазовой синхронизации, величина параметра связи  $\varepsilon_{PS} \approx 0.099$  на границе фазовой синхронизации в два раза превышает величину  $\varepsilon_{L_1}$ , соответствующую кривой  $L_1$  ( $\varepsilon_{L_1} \approx 0.05$ ) (см. также рис. 2). Таким образом, из приведенного рассмотрения следует, что переход одного нулевого показателя Ляпунова в область отрицательных значений предшествует возникновению фазовой синхронизации, но не является фактором, определяющим момент наступления данного режима синхронной динамики. Можно предположить, что данный переход связан скорее с установлением режима синхронизации временных масштабов [26–28], но этот вопрос требует дальнейшего детального исследования.

Кривая  $L_2$  на плоскости  $(\omega_d, \varepsilon)$ , соответствующая обращению в нуль положительного показателя Ляпунова, была использована в работе [19] в качестве критерия для выделения различных сценариев перехода к фазовой синхронизации в зависимости от свойств когерентности хаотических аттракторов взаимодействующих систем. В том случае, когда граница фазовой синхронизации лежит выше кривой  $L_1$  (т.е.  $\varepsilon_{L_1}, \varepsilon_{PS}$ ), полагают, что случаи  $\varepsilon_{PS} < \varepsilon_{L_2}$  (кривая  $L_2$  расположена выше границы фазовой синхронизации) и  $\varepsilon_{PS} > \varepsilon_{L_2}$  (кривая  $L_2$  лежит ниже границе фазовой синхронизации) являются различными типами перехода к режиму фазовой синхронизации, и эти различия обусловлены свойствами хаотических аттракторов. В соответствии с [19] принято считать, что случай  $\varepsilon_{PS} < \varepsilon_{L_2}$  соответствует синхронизации осцилляторов с фазово-некогерентными хаотическими аттракторами, в то время как ситуация  $\varepsilon_{PS} > \varepsilon_{L_2}$  характерна для связанных систем с сильно некогерентными аттракторами. Тем не менее рис. 2 показывает, что оба этих случая имеют место также и в связанных системах с изначально фазово-когерентными хаотическими аттракторами. Более того, положение кривой  $L_2$  на плоскости  $(\omega_d, \varepsilon)$  никак не связано с фазовой синхронизацией и всецело определяется механизмами, описанными в работах [22,29].

Соответственно введение в рассмотрение трех различных сценариев перехода к режиму фазовой синхронизации, основанное на анализе поведения старших

ляпуновских показателей, как это сделано в работе [19], представляется неверным.

Итак, можно заключить, что для двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (8) так же, как и для неавтономного генератора Ван-дер-Поля (7), следует различать лишь два типа перехода к режиму фазовой синхронизации. Какой из типов реализуется в системе, определяется величиной расстройки значений управляющих параметров.

#### 4. Взаимодействие двунаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера

Покажем теперь, что те же два типа разрушения хаотической синхронизации наблюдаются и при двунаправленной связи между хаотическими осцилляторами. Для этого рассмотрим две взаимно связанные системы Ресслера

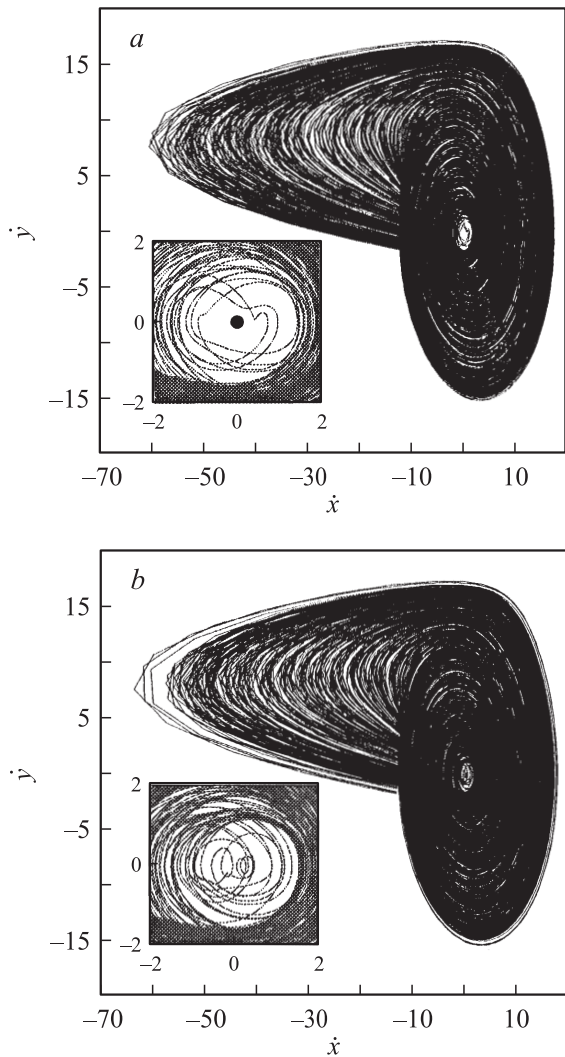
$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2}, \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= 0.1 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8.5), \end{aligned} \quad (9)$$

описанные в работе [19], с тем же набором управляющих параметров. В уравнениях (9)  $\varepsilon$  выступает в роли параметра связи  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 1.02$ .

Рассматриваемая система (9) интересна также тем, что изучение ее поведения позволяет исследовать вопрос о том, какие типы разрушения режима фазовой хаотической синхронизации будут наблюдаться для двух осцилляторов с изначально фазово-некогерентными хаотическими аттракторами, поскольку оба осциллятора в автономном режиме, в зависимости от значения параметра  $a \in [0.15; 0.3]$ , который определяет топологию хаотического аттрактора, могут характеризоваться как фазово-когерентными, так и фазово-некогерентными аттракторами. В частности, подобная ситуация была рассмотрена в работах [19,30], где взаимодействующие системы изначально, в автономном режиме, характеризовались фазово-некогерентными хаотическими аттракторами. Для того чтобы ввести в рассмотрение фазу хаотического сигнала и использовать затем методы теории фазовой синхронизации, в вышеупомянутых работах был осуществлен переход от вектора состояния  $(x, y, z)$  к вектору скоростей  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Подобный переход приводит к тому, что аттрактор на плоскости скоростей  $(\dot{x}, \dot{y})$  является фазово-когерентным, что позволяет далее использовать традиционные подходы теории фазовой синхронизации.

При превышении параметром  $a$  некоторого критического значения  $a_c$  ( $a_{c1} \approx 0.186$  для  $\omega_1$  и  $a_{c2} \approx 0.195$  для  $\omega_2$ ) хаотический аттрактор автономной системы Ресслера становится фазово-некогерентным [19], где фаза  $\varphi(t)$  определяется как угол поворота  $\varphi = \arctg(\dot{y}/\dot{x})$  на





**Рис. 5.** Хаотические аттракторы первой системы Ресслера (9) на плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$  для  $a = 0.21$   $a$  — режим фазовой синхронизации ( $\varepsilon = 0.055$ ), при этом аттрактор на плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$  является фазово-когерентным;  $b$  — фазово-некогерентный аттрактор, когда режим фазовой синхронизации не диагностируется ( $\varepsilon = 0.05$ ). На врезках в увеличенном масштабе изображены траектории на плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$  близи начала координат. Нетрудно видеть, что на врезке к  $(a)$  траектория вращается вокруг нуля, отмеченного точкой.

плоскости скоростей  $(\dot{x}, \dot{y})$ , что, как уже отмечалось, позволяет диагностировать режим фазовой синхронизации в системах со спиральным аттрактором. Изучив поведение двух взаимно связанных систем Ресслера (9) вдоль границы фазовой синхронизации на плоскости параметров  $(a, \varepsilon)$ , найденной в работе [19], мы также обнаружили наличие двух сценариев разрушения фазовой синхронизации, как и в описанном выше случае однонаправленно связанных осцилляторов (8). При малых значениях параметра  $a$  ( $a < a_* = 0.205$ ) первый тип разрушения режима фазовой синхронизации реализуется в том случае, когда хаотические аттракторы обеих систем сохраняют свойство фазовой когерентности на

плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$  как ниже границы фазовой синхронизации, так и выше ее. Для  $a > a_*$  хаотический аттрактор первой системы становится фазово-некогерентным, как только величина параметра связи  $\varepsilon$  оказывается меньше значения  $\varepsilon_{PS}$  на границе фазовой синхронизации. Аттрактор же второй системы продолжает оставаться фазово-когерентным. Заметим, что  $a_* > a_{c1,2}$ , следовательно, изменение сценария разрушения режима фазовой синхронизации происходит, когда обе связанные системы характеризуются фазово-некогерентными хаотическими аттракторами на плоскости  $(x, y)$ . Второй тип разрушения фазовой синхронизации показан на рис. 5.

Важно отметить, что фазовая когерентность хаотического аттрактора на плоскости скоростей  $(\dot{x}, \dot{y})$  разрушается аналогично тому, как это происходит на плоскости координат  $(x, y)$  системы (8) с первоначально фазово-когерентными аттракторами.

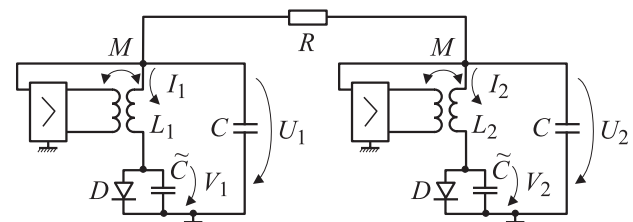
Таким образом, можно сделать вывод о том, что при изучении динамики двух взаимно связанных систем Ресслера с фазово-некогерентными аттракторами (9), как и в случае осцилляторов с фазово-когерентными аттракторами (8), можно выделить два (тех же самых) сценария разрушения режима фазовой синхронизации.

### 5. Динамика двух взаимно связанных генераторов на туннельном диоде

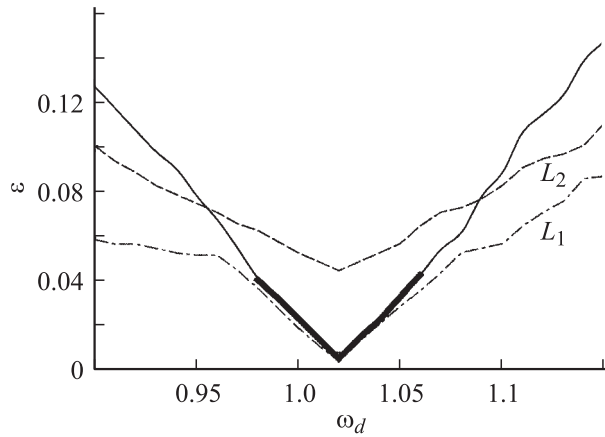
Рассмотрим в качестве последнего примера поведение двух взаимно связанных хаотических генераторов с туннельным диодом, которые описаны, например, в [31,32]. Схема взаимодействующих генераторов, связанных двунаправленной связью, приведена на рис. 6. В безразмерном виде поведение этих автогенераторов описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \omega_{1,2}^2 [h(x_{1,2} - \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2})) + y_{1,2} - z_{1,2}], \\ \dot{y}_{1,2} &= -x_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \mu \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2} - f(z_{1,2}). \end{aligned} \tag{10}$$

где  $x_{1,2} \sim I_{1,2}$ ,  $y_{1,2} \sim U_{1,2}$ ,  $z_{1,2} \sim V_{1,2}$ ,  $h = MS/\sqrt{LC}$ ,  $\mu = \tilde{C}/C$ ,  $\omega_{1,2} = \sqrt{L/L_{1,2}}$ ,  $\varepsilon = \sqrt{L}/(R\sqrt{C})$  — параметр связи ( $L$  — некоторый нормировочный множитель). Значения управляющих параметров были заимствованы из [31]:  $h = 0.2$ ,  $\mu = 0.1$ . В качестве безразмерной характеристики нелинейного элемента  $f(\xi)$  использовалась



**Рис. 6.** Схема генераторов с туннельным диодом, связанных двунаправленной диссипативной связью.



**Рис. 7.** Область фазовой синхронизации на плоскости  $(\omega_1, \varepsilon)$  для системы (10). Граница фазовой синхронизации показана жирной сплошной линией в области малых значений расстройки параметров связанных осцилляторов  $|\omega_1 - \omega_2|$  и тонкой сплошной для больших расстроек. Штрихпунктир  $L_1$  соответствует переходу одного из нулевых ляпуновских показателей в область отрицательных значений. Пунктир  $L_2$  показывает обращение в нуль положительной ляпуновской экспоненты. Заметим, что на данном рисунке не делаются различия для областей периодического и хаотического поведения.

зависимость  $f(\xi) = -\xi + 0.002sh(5\xi - 7.5) + 2.9$ , значение параметра  $\omega_2$  было фиксированным ( $\omega_2 = 1.02$ ), в то время как величина  $\omega_1$  и параметр связи  $\varepsilon$  варьировались.

На рис. 7 показаны граница возникновения режима фазовой синхронизации и две характерные кривые  $L_{1,2}$ , определяемые зависимостями старших ляпуновских показателей системы от величины параметра связи  $\varepsilon$ . Поскольку в рассматриваемом случае взаимодействующие генераторы связаны друг с другом взаимным образом, то все шесть значений ляпуновских показателей зависят от параметра связи. Тем не менее при нулевом значении связи система (10), точно так же как и (8), будет характеризоваться двумя нулевыми ляпуновскими показателями. Как видно из рис. 7, кривая  $L_1$  совпадает с границей фазовой синхронизации только в очень малом диапазоне значений расстройки параметров связанных осцилляторов, когда управляющие параметры  $\omega_{1,2}$  систем очень слабо расстроены друг относительно друга. Таким образом, как и для системы (8), описанной выше, переход одного из нулевых ляпуновских показателей в область отрицательных значений предшествует возникновению фазовой синхронизации, но не является фактором, определяющим момент наступления данного режима.

Положение кривой  $L_2$  на плоскости  $(\omega_1, \varepsilon)$  также никак не связано с границей возникновения режима фазовой синхронизации (рис. 6). Следовательно, выводы, сделанные для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (8), являются справедливыми также для двух взаимно связанных генераторов (10). Иными словами, для двух взаимно связанных хаотических автогенера-

торов с туннельным диодом существуют те же два сценария разрушения режима фазовой синхронизации, что и для систем связанных осцилляторов Ресслера: при малых расстройках значений управляющих параметров разрушение режима фазовой синхронизации связано с потерей общего ритма хаотических колебаний, в то время как аттракторы обеих хаотических систем сохраняют фазовую когерентность, а при больших значениях частотной расстройки выход систем из режима фазовой синхронизации обусловлен потерей одним из хаотических аттракторов фазовой когерентности.

## Заключение

В заключение, суммируя все вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что для хаотических осцилляторов существуют два различных сценария разрушения режима фазовой синхронизации. Принимая во внимание все полученные результаты следует отметить, что описанные два типа разрушения режима фазовой синхронизации подобны двум сценариям разрушения синхронного поведения периодических осцилляторов в случае классической синхронизации. Первый тип разрушения фазовой синхронизации связан с нарушением общего ритма хаотических колебаний, второй обуславливается потерей фазовой когерентности хаотических аттракторов. Оба этих сценария наблюдаются в системах как с изначально фазово-когерентными, так и фазово-некогерентными хаотическими аттракторами.

Другой важный результат заключается в том, что переход одного из нулевых ляпуновских показателей, описывающих поведение связанных хаотических осцилляторов, в область отрицательных значений происходит раньше, чем возникает режим фазовой синхронизации, и следовательно, никоим образом не определяет границу данного режима синхронной динамики. Точно так же обращение в нуль одного из положительных ляпуновских показателей никак не соотносится с границей режима фазовой синхронизации. Соответственно описывать возникновение режима фазовой синхронизации с помощью старших ляпуновских экспонент не представляется возможным.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 05-02-16273 и 06-02-16451), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4167.2006.2), Федерального агентства по науке и инновациям (проекты № 2006-РП-19.0/001/053 и 2006-РП-19.0/001/054), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union). Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ „Династия“.



## Список литературы

- [1] *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* et al. *M Handbook of Biological Physics.* Elsevier Science. 2001. P. 279–321.
- [2] *QuiñanQuiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041 903.
- [3] *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [4] *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A.* et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments.* Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [5] *Voccaletti S., Kurths J., Osipov G.* et al. // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 366. P. 1–101.
- [6] Фазовая синхронизация. М.: Связь, 1975.
- [7] *Ланда П.С.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12. № 4. С. 48–59.
- [8] *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
- [9] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
- [10] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. Т. 30. Вып. 14. С. 29–36.
- [11] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* // УФН. 2005. Т. 175. № 2. С. 163.
- [12] *Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 19. С. 76–82.
- [13] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. N 11. P. 1804–1807.
- [14] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurth J.* // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. N 3. P. 2353–2361.
- [15] *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* // *Physica D.* Vol. 104. N 4. P. 219–238.
- [16] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10. N 10. P. 2291–2305.
- [17] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. N 22. P. 4193–4196.
- [18] *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 1. С. 76–82.
- [19] *Osipov G.V., Hu B., Zhou C.* et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. N 2. P. 024101.
- [20] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
- [21] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. „Современная теория колебаний и волн“. М.: Физматлит, 2002.
- [22] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Phys. Rev. E.* Vol. 71. N 6. P. 067 201.
- [23] *Pyragas K.* // *Phys. Rev. E.* Vol. 54. N 5. P. R4508–R4511.
- [24] *Pyragas K.* // *Phys. Rev. E.* Vol. 56. N 5. P. 5183–5188.
- [25] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* // *Meccanica* 15. 1980. P. 9–30.
- [26] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Chaos.* 2004. Vol. 14. N. 3. P. 603–610.
- [27] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. N 5. P. 056 204.
- [28] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Physica D.* 2005. Vol. 206. N 3–4. P. 252–264.
- [29] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // *Europhys. Lett.* 2005. Vol. 72. N 6. P. 901–907.
- [30] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. N 26. P. 264 102.
- [31] *Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J.* // *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 1997. Vol. 44. N 10. P. 874–881.
- [32] *Pikovsky A.S., Rabinovich M.I.* // *Physica D.* 1981. Vol. 2. P. 8–24.