

01;03

О некоторых закономерностях реализации неустойчивости по отношению к поверхностному заряду мениска жидкости на торце капилляра

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 апреля 2006 г.)

Рассмотрены закономерности реализации неустойчивости плоского мениска вязкой жидкости на торце капилляра в поле сил тяжести и электростатическом поле при произвольной ориентации оси симметрии капилляра по отношению к направлению ускорения поля сил тяжести. Показано, что во внешних электростатических полях достаточной большой интенсивности закономерности реализации неустойчивости мениска не зависят от ориентации капилляра. Выяснилось, что зависимость величины инкремента неустойчивости различных мод кольцевых волн на поверхности мениска от волнового числа имеет немонотонный характер.

PACS: 67.55.Fa

Введение

Явление электродиспергирования жидкости при реализации неустойчивости заряженной поверхности мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, равно как и электродиспергирование сильно заряженных капель во внешних электрических полях, имеет весьма широкий спектр академических, технических и технологических приложений (см., например, обзоры [1–4]). Оно весьма детально исследовано экспериментально для широкого спектра внешних условий, но в теоретическом отношении изучено весьма слабо ввиду значительной нелинейности проблемы, обусловленной как нелинейностью основных уравнений электрогидродинамики, так и сильной деформацией свободной поверхности жидкости при реализации неустойчивости.

Феноменология процесса сводится к выбрасыванию неустойчивой заряженной поверхностью жидкости струй, распадающихся полидисперсным образом на множество сильно заряженных капель [5–13]. В зависимости от физико-химических свойств жидкости и характеристик разрядной системы насчитывается около десятка различных режимов электродиспергирования жидкости [13–16], что связано с осенесимметричностью и закручиванием выбрасываемых неустойчивой поверхностью жидкости заряженных струй [17–20]. Так, в экспериментальных работах [5–13] было зафиксировано „хлыстообразное“ движение конца распадающейся на капли струи, что, согласно [18–20], связано с возбуждением осенесимметричных мод капиллярных осцилляций струи.

Сам феномен спонтанного полидисперсного распада струй практически не исследован в теоретическом отношении, поскольку подавляющее количество проведенных теоретических анализов было ориентировано на

изучение вынужденного капиллярного распада струй на монодисперсные капли [17,21]. В настоящей работе в рамках наиболее простой модели будут рассмотрены общие закономерности потери устойчивости мениском жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, на финальной стадии которой и имеет место выброс струй, т.е. реализуется начальная стадия обсуждаемого феномена. В качестве исходного положения принимается, что неустойчивая поверхность жидкости выбрасывает струю, когда отрицательное давление на поверхность, обусловленное влиянием внешних силовых полей, превысит суперпозицию положительного давления сил поверхностного натяжения под виртуально искривленной поверхностью жидкости и давления поля сил тяжести.

1. Постановка задачи

Примем, что вертикально ориентированная открытая с обоих концов трубка с внутренним радиусом R , ось симметрии которой совпадает с осью OZ цилиндрической системы координат $\mathbf{n}_z \parallel \mathbf{g}$ (здесь \mathbf{n}_z — орт оси OZ ; \mathbf{g} — ускорение поля сил тяжести), заполнена вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкостью с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Нижний срез трубки совпадает с плоскостью $z = 0$ в системе плоских электродов, нижний из которых удален на бесконечность так, что между электродами существует однородное электростатическое поле напряженностью \mathbf{E}_0 (рис. 1). Зададимся целью исследовать на устойчивость мениск жидкости на торце капилляра по отношению к действию электрического поля и поля силы тяжести, имея в виду, что на торце капилляра могут реализоваться две аperiodические неустойчивости.

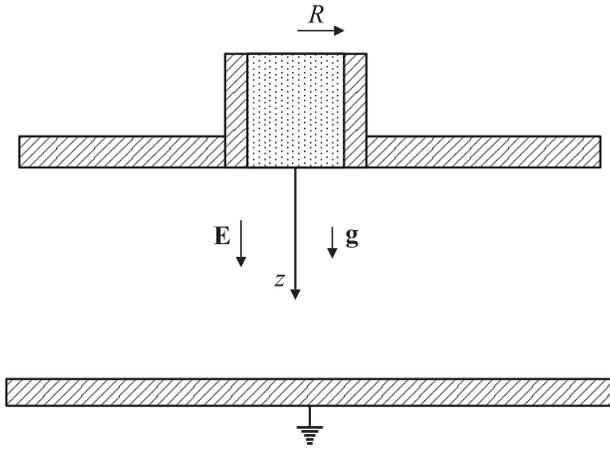


Рис. 1. Схематическое изображение установки для электродиспергирования жидкости, на основе которой производится анализ устойчивости мениска.

Уравнение поверхности мениска, возмущенной капиллярным волновым движением тепловой природы весьма малой амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ (κ — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура), запишется в виде

$$z = \xi(r, \varphi, t); \quad |\xi| \ll R; \quad (1)$$

$\xi(r, \varphi, t)$ — возмущение поверхности мениска.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики вязкой жидкости и электростатики (в предположении, что скорость движения поверхности мениска много меньше релятивистской):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla(gz);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$z = \xi(r, \varphi, t): \quad \Phi \equiv \text{const}; \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

$$F(r, \varphi, t) = z - \xi(r, \varphi, t) = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{U} = 0;$$

$$-(P - P_*) + 2\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = 0;$$

$$z = 0, \quad r = R: \quad \xi(r, \varphi, t) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi \rightarrow \mathbf{E}_0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — орты касательной и нормали к поверхности мениска (1); P_* — постоянное давление в окружающей среде; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей, давлений в жидкости и электростатического потенциала в окружающей среде.

В нулевом приближении по малой амплитуде возмущения $\xi(r, \varphi, t)$ равновесную поверхность мениска, пренебрегая эффектом смачивания на торце трубки, будем считать совпадающей с плоскостью $z = 0$; гидродинамическое давление определится высотой столба

жидкости; поле скоростей течения жидкости будет тождественно равно нулю, а потенциал электростатического поля будет иметь вид $\Phi_0 = -E_0 z$.

Для упрощения записи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $g = \rho = \sigma = 1$ и, оставляя за всеми переменными прежние обозначения, перепишем математическую формулировку задачи в линейном по безразмерной амплитуде возмущения свободной поверхности мениска приближении (отметим, что при принятом безразмеривании характерным линейным пространственным масштабом, на который безразмеривается амплитуда возмущения, является капиллярная постоянная жидкости $\alpha \equiv \sqrt{\sigma / \rho g}$). При линеаризации задачи учтем, что поля скоростей и давлений в жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P_1(\mathbf{r}, t)$, а также поправка к электростатическому полю $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, связанные с волновым возмущением поверхности (1), имеют первый порядок малости. В итоге получим

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla z; \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad \Delta \Phi_1 = 0; \quad (2)$$

$$z = 0: \quad \Phi_1 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \xi; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U_z; \quad \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{r \partial \varphi} = 0;$$

$$-P_1 - 2\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \hat{L} \xi + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$z = 0, \quad r = R: \quad \xi(r, \varphi, t) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \Phi_1 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty;$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

2. Скаляризация задачи

Для упрощения нижеследующих рассуждений проведем скаляризацию задачи по методике, описанной в [22]. Из общих соображений очевидно, что произвольное векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ может быть разложено на сумму трех ортогональных векторных полей. Это, в частности, можно сделать при помощи векторных дифференциальных операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ ($j = 1, 2, 3$) в цилиндрической системе координат удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z). \quad (4)$$

В цилиндрической системе координат векторные поля $\hat{\mathbf{N}}_j \psi_j(\mathbf{r}, t)$ в соотношении (3) будут иметь следующие компоненты:

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi_1}{\partial z};$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}}_2\psi_2(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{e}_z\psi_2 = \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial\psi_2}{\partial r}; \\ \hat{\mathbf{N}}_3\psi_3(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z)\psi_3 = \mathbf{e}_r \frac{\partial^2\psi_3}{\partial r\partial z} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi\partial z} \\ &\quad - \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi_3}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi^2} \right].\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что операторы (4) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_i = \delta_{ij} \hat{\mathbf{N}}_j^2 \quad (5)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_j = \hat{\mathbf{N}}_j \Delta,$$

где $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ — операторы, эрмитово-сопряженные к операторам $\hat{\mathbf{N}}_j$.

Подставим разложение (3) в линейризованное уравнение Навье–Стокса (2) и, пользуясь свойствами коммутативности операторов $\hat{\mathbf{N}}_j$ с оператором Лапласа, запишем (2) в виде

$$\sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial\psi_j}{\partial t} + (P_1 - z)\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j \right\} = 0.$$

Последовательно умножив слева полученное равенство скалярным образом на операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ ($j = 1, 2, 3$) и пользуясь их ортогональностью (4), вместо одного векторного линейризованного уравнения Навье–Стокса (2) получим систему

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ \frac{\partial\psi_j}{\partial t} + (P_1 - z)\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j \right\} = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Поскольку $\hat{\mathbf{N}}_j$ коммутируют с оператором Лапласа (6), то в силу самосопряженности последнего операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ также будут с ним коммутировать. Сказанное означает, что и операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j$ будут коммутировать с оператором Лапласа и, следовательно, будут иметь общую систему собственных функций $\{\phi_j\}$:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = \mu_k \phi_k; \quad \Delta\phi_k = \lambda_k \phi_k.$$

Разложим по бесконечному набору собственных функций $\{\phi_j\}$ функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, $P_1(\mathbf{r}, t) - z$, входящие в выражение, стоящее в (6) в фигурных скобках:

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_k G_k^{(j)} \phi_k; \quad P_1(\mathbf{r}, t) - z = \sum_k H_k \phi_k.$$

Теперь подставим эти разложения в (6) и после несложных преобразований получим

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = 0,$$

или

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k \right\} \mu_k \phi_k = 0.$$

Поскольку система собственных функций $\{\phi_j\}$ в общем случае не нулевая, то полученное равенство может выполняться в двух случаях: либо равны нулю все собственные значения $\{\mu_k\}$, что в общем случае неверно, либо выражения в фигурных скобках

$$\frac{\partial}{\partial t} G_k^{(j)} + D_k \delta_{1j} - \nu G_k^{(j)} \lambda_k = 0.$$

Умножим теперь каждую скобку на собственную функцию ϕ_k с тем же номером и, просуммировав по k , получим три скалярных уравнения для отыскания неизвестных функций ψ_j :

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t} + (P_1 - z)\delta_{1j} - \nu\Delta\psi_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Уравнение неразрывности (2) после подстановки в него разложения (3) и учета свойств ортогональности (4) приводится к виду

$$\Delta\psi_1 = 0. \quad (8)$$

Первое уравнение системы (7) при учете (8) позволяет получить выражение гидродинамического давления внутри жидкости, связанного с волновым движением

$$P_1 = -\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + z. \quad (9)$$

Тогда (7)–(8) можно переписать в виде

$$(1 - \delta_{1j}) \frac{\partial\psi_j}{\partial t} - \nu\Delta\psi_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Проекции поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты цилиндрической системы координат, выраженные через скалярные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, имеют вид

$$\begin{aligned}U_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}; \\ U_\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial\varphi}; \\ U_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi^2} \right].\end{aligned} \quad (11)$$

Используя выписанные выражения, переформулируем кинематическое и динамические граничные условия задачи первого порядка малости через неизвестные функции $\psi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$z = 0: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \hat{L}\psi_3; \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} f_2 = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} f_1 - \frac{\partial}{\partial r} f_2 = 0; \quad (13)$$

$$f_1(\mathbf{r}, t) \equiv 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \hat{L} \psi_3; \quad f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial \psi_2}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \xi + 2\nu \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \hat{L} \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right\} + \hat{L} \xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right\} = 0. \quad (14)$$

3. Преобразования динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений (13)

Умножим граничные условия (13) на координату r , затем сложим между собой, а результат разделим на r^2 , в итоге

$$\hat{L} f_1(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (15)$$

Умножим граничные условия (13) на координату r , затем вычтем из первого второе, а результат разделим на r^2 и получим

$$\hat{L} f_2(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим детально выражение (16), учитывая, что $f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \partial \psi_2 / \partial z$, а также то, что операторы \hat{L} и $\partial / \partial z$ коммутируют друг с другом. Тогда (16) можно переписать в виде

$$\hat{L} \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 \equiv \frac{\partial}{\partial z} \hat{L} \psi_2 \equiv 0. \quad (17)$$

Из (17) следует $\hat{L} \psi_2 = 0$ либо $\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0$. Первое из выписанных соотношений в общем случае не может выполняться в силу соотношения (7) для ψ_2 , значит, верно второе

$$f_2(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Несложно убедиться, что

$$\hat{L} \equiv -\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j.$$

Покажем это, учитывая $\hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z$ и $\hat{\mathbf{N}}_2^+ \equiv \mathbf{e}_z \times \nabla \equiv -\nabla \times \mathbf{e}_z \equiv -\hat{\mathbf{N}}_2$. В итоге

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \equiv -(\nabla \times \mathbf{e}_z)(\nabla \times \mathbf{e}_z) \equiv -(\nabla \times \mathbf{e}_z \times \nabla) \mathbf{e}_z$$

$$\equiv -(\mathbf{e}_z \Delta - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}_z)) \mathbf{e}_z \equiv -\Delta + (\mathbf{e}_z \nabla)(\mathbf{e}_z \nabla)$$

$$\equiv -\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv -\hat{L}.$$

Преобразуем теперь (15), учитывая, что, согласно принятому выше

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \phi_k = \mu_k \phi_k; \quad \psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_k G_k^{(j)} \phi_k.$$

В итоге получим

$$\hat{L} f_1(\mathbf{r}, t) \equiv -\hat{\mathbf{N}}_j^+ \hat{\mathbf{N}}_j \left\{ 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \hat{L} \psi_3 \right\}$$

$$\equiv - \sum_k \left\{ 2G_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + G_k^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_k^{(3)} \mu_k \right\} \mu_k \phi_k = 0.$$

Последнее равенство при $\{\mu_k\} = 0$ выполняется, если выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю:

$$2G_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + G_k^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_k^{(3)} \mu_k = 0.$$

Умножим теперь каждую скобку на собственную функцию ϕ_k с тем же номером и, просуммировав по k , найдем

$$f_1(\mathbf{r}, t) \equiv 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \hat{L} \psi_3 = 0. \quad (19)$$

В итоге соотношения (18) и (19) заменяют собой пару динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений (13).

Из системы гидродинамических граничных условий (12), (14) и (19) видно, что функция $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, не зависящая, согласно (18), от координаты z и характеризующая, согласно общей идеологии метода скаляризации, плоские вихревые движения в жидкости, перпендикулярные оси симметрии системы, при исследовании устойчивости мениска может быть опущена, так как она не входит ни в одно из граничных условий (12), (14), (19).

4. Вывод и анализ дисперсионного уравнения

Решения уравнений (7)–(8) в цилиндрической системе координат, ограниченные на оси симметрии, будем искать в виде следующих разложений:

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} A_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\varphi) \exp(k_j z) \exp(-s_j t);$$

$$\psi_3(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} B_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\varphi) \exp(q_j z) \exp(-s_j t); \quad (20)$$

где $q_j^2 \equiv k_j^2 + s_j/\nu$; s_j — комплексная частота; k_j — волновое число; n и j — целые числа; $J_n(k_j r)$ — функция Бесселя первого рода.

Решение уравнения Лапласа (2) для отыскания потенциала электростатического поля $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, так же как и функцию $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, имеющую смысл гидродинамического потенциала и являющуюся решением уравнения Лапласа (8), будем искать в виде

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} C_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\varphi) \exp(k_j z) \exp(-s_j t), \quad (21)$$

так же как и выражение для волнового возмущения мениска

$$\xi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0, j=1}^{\infty} D_{nj} J_n(k_j r) \exp(in\varphi) \exp(-s_j t). \quad (22)$$

Из граничного условия задачи (2) для электростатического потенциала $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ легко найти связь между коэффициентами C_{nj} и D_{nj} в виде

$$C_{nj} = E_0 D_{nj}.$$

Теперь, подставив в граничные условия (12), (14), (19) проекты решений (20)–(22), получим систему трех однородных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов разложений A_{nj} , B_{nj} , D_{nj} , которая имеет решения только при условии обращения в нуль определителя, составленного из множителей при искомым коэффициентах A_{nj} , B_{nj} , D_{nj} . Это требование и даст нам дисперсионное уравнение задачи

$$(s_j + 2vk_j^2)^2 + \omega_j^2 = 4v^2 k_j^4 \sqrt{1 + \frac{s}{vk_j^2}}; \quad (23)$$

$$\omega_j^2 \equiv k_j^3 - k_j - Wk_j^2; \quad W \equiv E_0^2/4\pi.$$

Несложно видеть, что дисперсионное уравнение формально имеет такой же вид, как и для плоских капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости [23,24]. Отличие в том, что теперь иначе определена частота ω_j , поскольку ускорение поля сил тяжести в рассматриваемой задаче играет дестабилизирующую роль и входит со знаком, обратным по сравнению с классической задачей о волнах на свободной поверхности жидкости [23–24], и кроме того, величина волнового числа изменяется не непрерывно, как было в [23–24], но должна удовлетворять условиям закрепления мениска на торце трубки: $z = 0$, $r = R$: $\xi(r, \varphi, t) = 0$. Подставив сюда (22), несложно найти, что спектр допустимых волновых чисел определяется корнями функций Бесселя

$$J_n(\mu_{nj}) = 0; \quad \mu_{nj} \equiv k_{nj}R. \quad (24)$$

Несколько первых корней системы (24) имеют значения [25]:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad \mu_{01} &= 2.405, \quad \mu_{02} = 5.520, \\ \mu_{03} &= 8.654, \quad \mu_{04} = 11.792; \\ n = 1: \quad \mu_{11} &= 3.832, \quad \mu_{12} = 7.016, \\ \mu_{13} &= 10.174, \quad \mu_{14} = 13.324; \\ n = 2: \quad \mu_{21} &= 5.136, \quad \mu_{22} = 8.417, \\ \mu_{23} &= 11.620, \quad \mu_{24} = 14.796; \\ n = 3: \quad \mu_{31} &= 6.380, \quad \mu_{32} = 9.761, \\ \mu_{33} &= 13.015, \quad \mu_{34} = 16.223. \end{aligned}$$

В асимптотике малой вязкости, когда безразмерный коэффициент кинематической вязкости много меньше единицы $\nu \ll 1$ (в размерном виде $\nu \ll \sqrt[4]{\sigma^3/\rho^3g}$), дисперсионное уравнение (23) можно записать в линейном

приближении по безразмерной вязкости, и оно существенно упрощается

$$s_{nj}^2 + 4vk_{nj}^2 s_{nj} + \omega_{nj}^2 = 0, \quad (25)$$

а его решения в том же приближении легко выписываются в виде

$$\begin{aligned} s_{nj(1;2)} &= \gamma_{nj} \pm i\omega_0 \equiv -2vk_{nj}^2 \pm \sqrt{(2vk_{nj}^2)^2 - \omega_{nj}^2} \\ &\cong -2vk_{nj}^2 \pm \sqrt{-\omega_{nj}^2} \equiv -2vk_{nj}^2 \\ &\pm \sqrt{-(k_{nj}^3 - k_{nj} - Wk_{nj}^2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Следует отметить, что условие малости вязкости жидкости $\nu \ll 1$ оставляет весьма широкий простор для использования упрощенного и наглядного соотношения (26). В самом деле, величина характерного масштаба измерения кинематической вязкости жидкости при принятом обезразмеривании на $\sqrt[4]{\sigma^3/\rho^3g}$ для большинства используемых в технических приложениях жидкостей измеряется единицами стоксов (cm^2s^{-1}) [14]. Так, например, для воды характерный масштаб измерения кинематической вязкости ≈ 4.4 , тогда как величина размерной кинематической вязкости для воды равна $0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Таким образом, область применимости соотношений (26) в технических и технологических приложениях достаточно велика.

5. Анализ устойчивости мениска жидкости на торце капилляра

5.1. Дестабилизирующее влияние поля сил тяжести

В (26) γ_{nj} характеризует декремент затухания осцилляций мениска, а ω_{nj} — их частоту. Из (26) видно, что условием нарушения устойчивости мениска является условие прохождения через нуль в область отрицательных значений квадрата частоты ω_{nj} . При этом частота s_{nj} становится вещественной положительной, что, согласно общему виду решений (20)–(22), соответствует их экспоненциальному росту со временем. Условие нарушения устойчивости мениска по отношению к возмущениям бесконечно малой амплитуды имеет вид

$$k_{nj}^3 - k_{nj} - Wk_{nj}^2 = 0 \text{ или } W = k_{nj} - k_{nj}^{-1}. \quad (27)$$

Соответствующая зависимость проиллюстрирована кривой 1 на рис. 2 (отрицательные значения W физического смысла не имеют).

Учтем теперь, что волновое число при фиксированном радиусе трубки может принимать только дискретно изменяющиеся значения, согласно (24), и (27) можно переписать в виде

$$W = \frac{\mu_{nj}}{R} - \frac{R}{\mu_{nj}}.$$

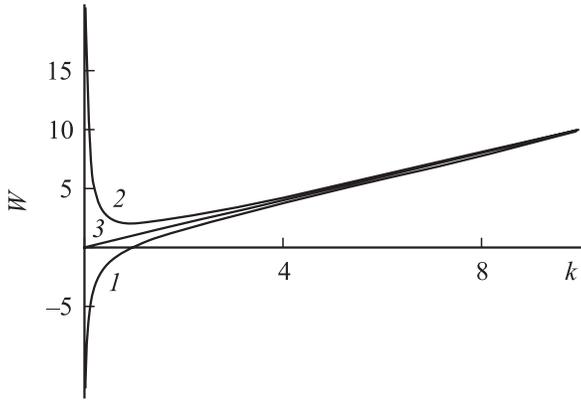


Рис. 2. Зависимость критического для проявления неустойчивости мениска значения параметра W от безразмерного волнового числа k : 1 — поле сил тяжести играет дестабилизирующую роль; 2 — поле сил тяжести играет стабилизирующую роль; 3 — поле сил тяжести отсутствует.

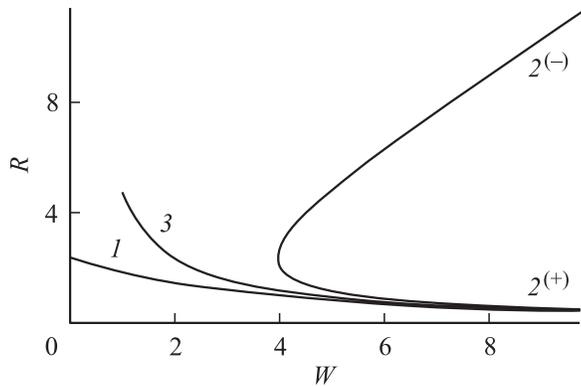


Рис. 3. Зависимость критического для начала вытекания жидкости значения безразмерного радиуса трубки R от величины параметра W . Обозначения те же, что для рис. 2.

Видно, что при фиксированных n и j непрерывно могут меняться радиус трубки R и параметр W . Если теперь сформулировать проблему отыскания значений радиусов трубки R и соответствующих им величин параметра W , при которых жидкость под влиянием поля сил тяжести и давления электрического поля начнет вытекать из трубки, то выписанное соотношение определит связь между критическим значением радиуса $R = R_c$ и параметра $W = W_c$. При $W = W_c$ жидкость будет вытекать из трубки с радиусом $R \geq R_c$:

$$R_c = \frac{\mu_{nj}}{0.5W_c + \sqrt{0.25W_c^2 + 1}}. \quad (28)$$

Из (28) ясно, что с увеличением W значение R_c снижается, как это видно из рис. 3, где соответствующая зависимость нанесена кривой 1. Неустойчивые состояния мениска соответствуют геометрическому месту точек, расположенному выше кривой 1, а устойчивые — геометрическому месту точек, расположенному ниже ее. Несложно видеть, что для трубок достаточно больших

радиусов мениск будет неустойчив даже при $W = 0$, т.е. в отсутствие внешнего электрического поля, а причиной неустойчивости будет влияние поля сил тяжести. С другой стороны, для трубок малых радиусов (для капилляров) реализация неустойчивости будет иметь место только при больших значениях параметра W (напряженности электростатического поля).

5.2. Стабилизирующее влияние поля сил тяжести

Сформулируем теперь задачу, аналогичную рассматриваемой, с той лишь разницей, что будем рассматривать устойчивость во внешнем электростатическом поле плоского мениска жидкости на верхнем конце трубки в установке, подобной изображенной на рис. 1, но повернутой на 180° относительно горизонтальной плоскости. В новых условиях поле сил тяжести будет играть стабилизирующую роль, а орт внешней нормали к невозмущенной поверхности плоского мениска жидкости будет направлен противоположно ускорению поля сил тяжести: $\mathbf{n} \parallel -\mathbf{g}$. Математическая постановка задачи и приведенные выше математические построения остаются в силе с тем отличием, что в уравнении Навье–Стокса и динамическом граничном условии изменится на противоположный знак \mathbf{g} . Дисперсионное уравнение по-прежнему будет иметь вид (23), а в приближении $v \ll 1$ — (25), но в нем изменится выражение для ω_{nj}^2 :

$$\omega_{nj}^2 \equiv k_{nj}^3 + k_{nj} - Wk_{nj}^2,$$

т.е. изменится знак при слагаемом, соответствующем влиянию поля сил тяжести. Вместо (27) появится зависимость

$$W = k_{nj} + k_{nj}^{-1}, \quad (29)$$

а вместо (28)

$$R_1 = \frac{\mu_{nj}}{0.5W + \sqrt{0.25W^2 - 1}} \text{ и } R_2 = \frac{\mu_{nj}}{0.5W - \sqrt{0.25W^2 - 1}}. \quad (30)$$

На рис. 2 зависимость (29) нанесена кривой 2. Зависимости (30) на рис. 3 нанесены кривыми $2^{(+)}$ (для R_1) и $2^{(-)}$ (для R_2) соответственно. Мениск неустойчив на геометрическом месте точек, расположенном на рис. 3 внутри области, ограниченной сверху, снизу и слева кривыми $2^{(+)}$ и $2^{(-)}$. Точка слияния кривых $2^{(+)}$ и $2^{(-)}$ на рис. 3 имеет координаты $W = 2$, $R = \mu_j$ и соответствует критическим условиям реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля [23] — неустойчивости плоской однородно заряженной свободной поверхности идеально проводящей жидкости в поле силы тяжести и противоположно ей направленном электростатическом поле. Кривая $2^{(+)}$ соответствует ветви капиллярных волн на мениске, а $2^{(-)}$ — ветви гравитационных волн.

Таким образом, мы рассмотрели устойчивость мениска жидкости в коллинеарных электростатическом и гравитационном полях, когда ось симметрии капилляра

параллельна внешним силовым полям, действующим в одном и том же или в противоположных направлениях. В технических устройствах, использующих феномен электродиспергирования жидкости, ориентация капилляров, по которым жидкость подается в разрядную систему, произвольна по отношению к направлению поля сил тяжести [14].

5.3. Отсутствие поля сил тяжести

В связи со сказанным выше рассмотрим вопрос об устойчивости плоского мениска, когда капилляр ориентирован перпендикулярно направлению поля сил тяжести, но параллельно внешнему электростатическому полю. Примем для простоты, что радиус трубки мал: $R < 1$, она может считаться капилляром, и влиянием изменения гидростатического давления в жидкость вдоль радиуса капилляра можно пренебрегать. В таких условиях ускорение поля сил тяжести не будет влиять на динамическое граничное условие. Дисперсионное уравнение по-прежнему будет иметь вид (23), а в приближении $\nu \ll 1$ — вид (25), но в нем изменится выражение для ω_{nj}^2 , которое упростится

$$\omega_{nj}^2 \equiv k_{nj}^3 - Wk_{nj}^2,$$

т.е. исчезнет слагаемое, соответствующее влиянию поля сил тяжести. Вместо (27) появится зависимость: $W = k_{nj}$, а вместо (28) — $R = \mu_{nj}/W$. Соответствующие зависимости обозначены на рис. 2 и 3 номером 3. Из приведенных рисунков несложно видеть, что ситуация с отсутствием влияния поля сил тяжести на устойчивость мениска занимает промежуточное значение между рассмотренными выше ситуациями, дестабилизирующими и стабилизирующими его влияние. Причем при достаточно больших значениях параметра W , характеризующего давление внешнего электростатического поля, при $W \geq 6$, разница между рассмотренными ситуациями с различным вкладом поля сил тяжести в реализацию неустойчивости мениска исчезает, и критические зависимости, проиллюстрированные кривыми 1, 2(+), 3, сливаются в одну. Такая ситуация соответствует малым радиусам капилляров и определяющему влиянию отрицательного давления внешнего электростатического поля на устойчивость мениска. Если учесть, что в технических устройствах, использующих феномен электродиспергирования жидкости, диаметры капилляров, по которым жидкость подается в разрядную систему, не превышают десятых долей от капиллярной постоянной диспергируемой жидкости [14], то условие $W \geq 6$, как правило, удовлетворяется.

5.4. Произвольная взаимная ориентация поля сил тяжести и внешнего электростатического поля

Для общности в приближении $R < 1$ рассмотрим ситуацию, когда ось капилляра и коллинеарная ей на-

пряженность внешнего электростатического поля ориентированы под углом ϑ по отношению к направлению ускорения поля сил тяжести (угол ϑ отсчитывается от направления \mathbf{g}). Разложим силу тяжести на две перпендикулярные компоненты: параллельную оси симметрии $g_{\parallel} \equiv g \cos \vartheta$ (и коллинеарную направлению напряженности внешнего электростатического поля) и перпендикулярную ей $g_{\perp} \equiv g \sin \vartheta$. Тогда, согласно сказанному выше, компонента давления поля сил тяжести, пропорциональная g_{\parallel} , будет оказывать влияние на устойчивость мениска на торце капилляра, а компонента, пропорциональная g_{\perp} , не будет. Математическая формулировка задачи об исследовании устойчивости мениска останется прежней, равно как и дисперсионное уравнение, которое по-прежнему будет иметь вид (23), а в приближении $\nu \ll 1$ — вид (25), но в нем изменится выражение для ω_{nj}^2 , которое примет вид

$$\omega_j^2 \equiv k_j^3 - k_j \cos \vartheta - Wk_j^2. \quad (31)$$

Вместо (29) появится выражение

$$W = k_{nj} - \frac{\cos \vartheta}{k_{nj}},$$

а вместо (30)

$$R_1 = \frac{\mu_{nj}}{0.5W + \sqrt{0.25W^2 + \cos \vartheta}}$$

и $R_2 = \frac{\mu_{nj}}{0.5W - \sqrt{0.25W^2 + \cos \vartheta}},$

где выражение для R_2 определено только при $\cos \vartheta \leq 0$, а при $\cos \vartheta > 0$ теряет смысл, поскольку приводит к отрицательным значениям радиуса. На рис. 2 и 3 соответствующие зависимости при $R < 1$ расположатся между кривыми 1 и 2(+).

Сказанное в этом разделе в приближении $R < 1$ о закономерностях нарушения устойчивости заряженной поверхности жидкости остается справедливым и в приложении к капле, находящейся в скрещенных гравитационном и электростатическом полях (т.е. в ситуации грозового облака) [6].

Интересно отметить, что в ситуации, рассмотренной в п. 5.1, когда поле сил тяжести играет стабилизирующую роль (при $\cos \vartheta > 0$), критическому для реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости значению параметра W соответствует конкретная волна с волновым числом k , обладающая максимальным инкрементом неустойчивости, так же как и в задаче о неустойчивости Тонкса-Френкеля [23,24] (когда $\cos \vartheta = 1$), отличие лишь в дополнительном условии (24), накладывающем ограничение на спектр волновых чисел. Иными словами, при $\cos \vartheta > 0$ система уравнений

$$\omega_{nj}^2 = 0; \quad \frac{d(\omega_{nj}^2)}{dk} = 0 \quad (32)$$

имеет решение

$$W = 2\sqrt{\cos \vartheta}; \quad k = \sqrt{\cos \vartheta}. \quad (33)$$

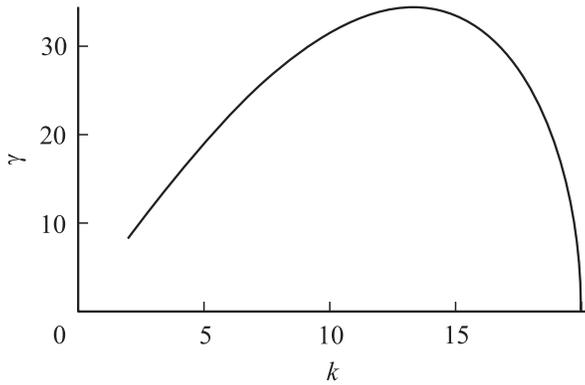


Рис. 4. Зависимость величины безразмерного инкремента неустойчивости мениска γ от безразмерного волнового числа k , рассчитанная для первой неустойчивой осесимметричной моды при $W = 20$.

Для всех остальных рассмотренных ситуаций система (32) несовместна, а решения (33) при $\cos \vartheta \leq 0$ теряют физический смысл. В подобной ситуации критическому значению параметра W соответствует волновое число, инкремент неустойчивости которого не экстремален.

Неустойчивость мениска реализуется, когда проходит через нуль и становится отрицательным ω_{nj}^2 , или, согласно (31), когда

$$\omega_{nj}^2 \equiv k_{nj}^3 + k_{nj} \cos \vartheta - W k_{nj}^2 \leq 0.$$

При фиксированных W, k и $\cos \vartheta$ величина инкремента неустойчивости волны с волновым числом k определится выражением

$$\gamma_{nj} \equiv \sqrt{W k_{nj}^2 - k_{nj}^3 + k_{nj} \cos \vartheta}.$$

Зависимость $\gamma_j = \gamma_j(k)$ приведена на рис. 4. Несложно видеть, что максимальное значение инкремента достигается при значении волнового числа, определенном соотношением $k = \frac{1}{3}(W + \sqrt{W^2 - 3 \cos \vartheta})$, которое совпадает с экстремальным (33) только при $\cos \vartheta > 0$.

6. Сравнение полученных результатов с опытными данными

Проведенные выше рассуждения выполнены для идеализированной системы электродов, изображенной на рис. 1, которая была выбрана для удобства аналитических расчетов. В реальных устройствах для электродиспергирования жидкости используется система электродов, отличающаяся от приведенной на рис. 1 выступающим капилляром, схема которой представлена на рис. 5. В такой системе электродов напряженность внешнего электростатического поля в окрестности торца капилляра существенно (в несколько раз) превышает при прочих равных условиях напряженность однородного

поля \mathbf{E}_0 между электродами, изображенными на рис. 1. Если длину выступающей части капилляра обозначить L , эксцентриситет e вытянутого сфероида, которым мы моделируем капилляр для оценки напряженности электростатического поля у его вершины, определится с учетом электростатического отражения капилляра в плоском электроде известным выражением $e \equiv \sqrt{1 - R^2/L^2}$. Согласно [26], величина напряженности электростатического поля у вершины сфероида превышает величину напряженности внешнего однородного электростатического поля \mathbf{E}_0 в χ раз: $\chi \equiv \left\{ \frac{(2-e^2)}{2e^3} \left[\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right] \right\}^{-1}$. Зависимость $\chi = \chi(e)$ приведена на рис. 6. В реальных установках для электродиспергирования жидкости радиусы капилляров R измеряются сотнями микрометров, и при длине капилляра порядка $L = 10R$ (т.е. порядка единиц миллиметров) получим $e \approx 0.995$, а $\chi \approx 30$. Давление же электростатического поля на мениск (параметр W) увеличится на три порядка по сравнению с его значением в установке (рис. 1). Сказанное означает, что в реальных установках электродиспергирование жидкости

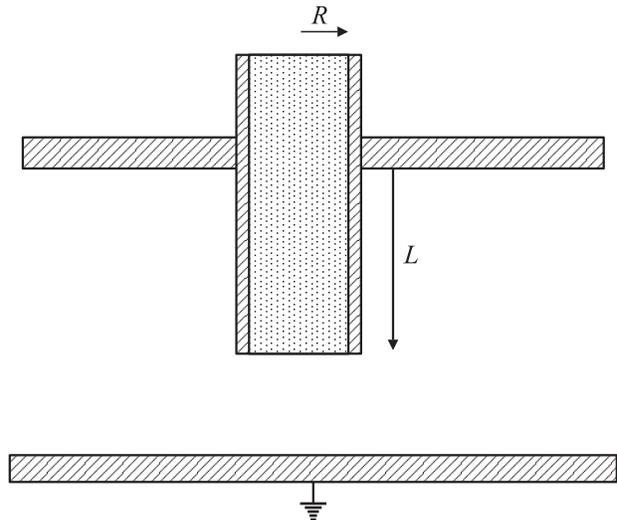


Рис. 5. Схематическое изображение реальной установки для электродиспергирования жидкости.

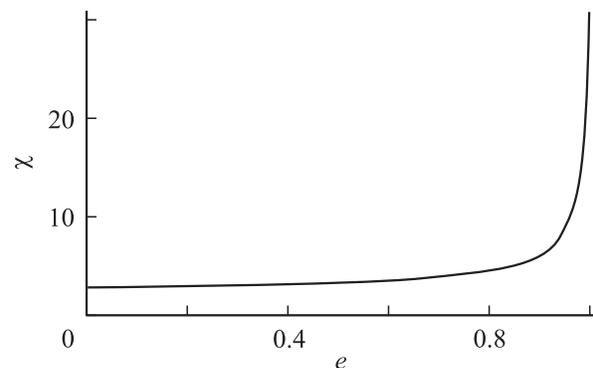


Рис. 6. Зависимость коэффициента усиления внешнего электростатического поля на вершине сфероида χ от величины его эксцентриситета.

происходит при определяющем влиянии электрического поля (в области, где кривые 1, 2⁽⁺⁾ и 3 на рис. 3 сливаются), а влияние поля сил тяжести несущественно.

Согласно [13,14], все экспериментально реализующиеся режимы электродиспергирования жидкости начинаются с выброса струи вдоль оси симметрии капилляра. Сказанное означает, что форма мениска после потери им устойчивости определяется суперпозицией функций Бесселя нулевого порядка

$$\xi(r, t) = \sum_j D_{0j} J_0(k_{0j} r) \exp(\gamma_{0j} t). \quad (34)$$

Значительное количество экспериментально наблюдаемых режимов электродиспергирования обусловлено не столько геометрическими параметрами установки, сколько разнообразием физико-химических свойств жидкостей (в первую очередь вязкостью, электропроводностью и коэффициентом диэлектрической проницаемости) и варьированием массового расхода жидкости. Так, например, при нулевом массовом расходе через капилляр (при отсутствии течения жидкости в капилляре) на форму поверхности мениска (34) должно быть наложено условие неизменности объема жидкости под мениском

$$\int_0^R \xi(r, t) r dr d\varphi = \int_0^R \sum_j D_{0j} J_0(k_{0j} r) \exp(\gamma_{0j} t) r dr d\varphi = 0;$$

которое ограничит спектр волн, формирующих форму мениска (отметим, что выписанные интегралы от нечетных функций Бесселя нулевого порядка положительны, а от четных — отрицательны). При большом массовом расходе жидкости и наличии течения жидкости вдоль капилляра при анализе устойчивости мениска необходимо принимать во внимание гидродинамическое давление жидкости, которое в силу зависимости скорости течения от расстояния до оси капилляра по-разному скажется на устойчивости различных мод.

Необходимо также принимать во внимание то обстоятельство, что при формировании рельефа мениска основной вклад в этот процесс внесут моды с максимальными значениями инкрементов неустойчивости, а рост остальных мод будет подавляться условиями ограниченности подвода жидкости в увеличивающий свою амплитуду мениск.

В соответствии с экспериментальными данными по электродиспергированию жидкостей (см. например, [14] и указанную там литературу) радиус струи, выбрасываемой вдоль оси симметрии капилляра, в 10–20 раз меньше радиуса капилляра. На рис. 7 приведены графики цилиндрических функций нулевого порядка, соответствующих нескольким первым корням уравнения (24). Несложно видеть, что характерный поперечный размер центрального выступа, который и определит радиус выбрасываемой струи, много больше того, что регистрируется в экспериментах. Это обстоятельство можно объяснить двумя факторами. Во первых, вполне возможно,

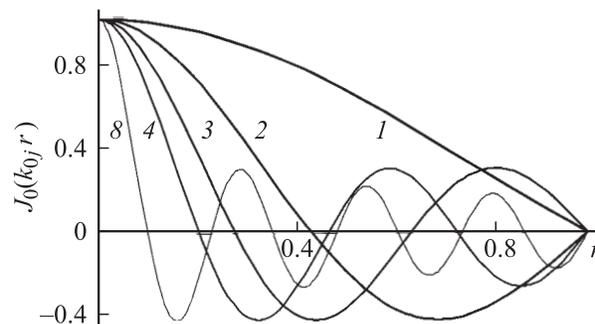


Рис. 7. Зависимости от радиальной координаты нескольких первых функций Бесселя первого рода нулевого порядка. Номер кривой совпадает с номером j корня уравнения (24).

что при больших значениях параметра Тонкса–Френкеля могут возбудиться моды с существенно большими номерами j , чем приведенные на рисунке. Во вторых, можно предположить, что по мере роста амплитуды центрального выступа на мениске с радиусом кривизны, много меньшим радиуса капилляра, и соответствующего роста напряженности поля у вершины выступа, а с ним и величины параметра W , выполняются условия реализации неустойчивости поверхности жидкости в малой окрестности вершины выступа. В итоге из вершины выступа будет выброшена струя существенно меньшего радиуса.

Заключение

В различных технических и технологических приложениях феномена электродиспергирования жидкости при реализации неустойчивости плоского мениска вязкой жидкости на торце капилляра в поле сил тяжести и достаточно интенсивном электростатическом поле при произвольной ориентации оси симметрии капилляра по отношению к направлению ускорения поля сил тяжести основную роль играет отрицательное давление электростатического поля. Поле сил тяжести сказывается на феномене только при напряженностях электростатического поля, меньших критической в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, и для трубок с радиусами, существенно превышающими капиллярную постоянную диспергируемой жидкости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Кожевников В.И., Фукс Н.А. // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
- [2] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [3] Bailey A.G. // Atomization and Spray Technology. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

- [5] *Zeleny J.* // Phys. Rev. 1914. Vol. 3. N 2. P. 69–91.
- [6] *Mackay W.A.* // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [7] *English W.N.* // Phys. Rev. 1948. Vol. 74. N 2. P. 179–189.
- [8] *Magarvey R., Outhouse L.* // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. N 1. P. 151–157.
- [9] *Huebner A., Chu H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. N 2. P. 361–372.
- [10] *Hoburg J.F., Melcher J.R.* // JEEE Transact. on PAS. 1975. Vol. 94. N 1. P. 128–136.
- [11] *Fernandes de la Mora J., Loscertales I.G.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 260. P. 155–184.
- [12] *Gamero-Castano M., Hruby V.* // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 459. P. 245–276.
- [13] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор). Препринт ИМ РАН. № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
- [15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
- [16] *Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I.* // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [17] *Ентов В.М., Ярин А.Л.* // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: Изд. ВИНТИ, 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [18] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.
- [19] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
- [20] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
- [21] *Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К.* и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [22] *Ширяева С.О., Лазаряц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН. № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [23] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.
- [24] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
- [25] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
- [26] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.