

01;03

## О нелинейных поправках к частотам мод осцилляций заряженной струи идеальной жидкости

© С.О. Ширяева, Н.В. Воронина, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 июня 2006 г.)

В третьем порядке малости по амплитуде осцилляций поверхностно однородно заряженной струи идеальной несжимаемой проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности, получено аналитическое асимптотическое выражение для формы струи как функции времени, когда начальная деформация равновесной поверхности определяется одной модой, которая может быть как осесимметричной, так и неосесимметричной. Найдены аналитическое выражение для нелинейной поправки к частоте и положения внутренних нелинейных вырожденных трехмодовых и четырехмодовых резонансов, характерных для нелинейных поправок к аналитическим выражениям для формы струи, потенциалам поля скоростей течения жидкости в струе, электростатического поля в окрестности струи, а также для нелинейной поправки к частоте. Обнаружено, что нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности поверхности, зависящей от вида начальной деформации, в общем случае неосесимметричной.

PACS: 47.10-g

### Введение

Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по изучению неустойчивости движущейся струи жидкости и дробления ее на отдельные капли, многое в физике происходящих процессов остается до сих пор невыясненным и по-прежнему привлекает внимание исследователей. Сказанное, в частности, относится к анализу устойчивости неосесимметричных мод осцилляций струи, и связано это с тем, что большая часть проведенных к настоящему времени исследований дробления струй была направлена на получение потоков монодисперсных капель [1,2]. Тем не менее феномен распада на капли неосесимметричных струй, выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [3] и менисков жидкости на торцах капилляров [4–6], при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду был давно известен. Устойчивость неосесимметричных волн на поверхности заряженных цилиндрических струй электропроводных и диэлектрических жидкостей в линейном приближении была исследована в [7,8], где было показано, что неосесимметричные моды при достаточно больших значениях плотности электрического заряда могут быть более неустойчивыми, чем осесимметричные, и определить закономерности разбиения струи на отдельные капли.

Теоретическое исследование заряженных струй, проводимое в последние годы, ориентировано на изучение нелинейных эффектов, связанных с осцилляциями струй и дроблением их на капли [9–12], и выполняется как численными [9], так и аналитическими асимптотическими [10–12] методами. Причем в [10–12] нелинейный асимптотический анализ проведен для общей ситуации неосесимметричных волн на поверхности струи.

В настоящем рассмотрении, как и в [10–12], также проводится аналитическое асимптотическое исследование нелинейных неосесимметричных волн на поверхности заряженной идеально проводящей струи. Однако в отличие от [10–12], где аналитические расчеты выполнялись лишь во втором порядке малости, нижеследующий анализ проводится с точностью до третьего порядка малости включительно, что позволяет отыскать нелинейные поправки к частотам мод и положения новых четырехмодовых резонансов.

### 1. Постановка задачи

Пусть имеется движущаяся с постоянной скоростью  $U$  бесконечная цилиндрическая струя постоянного радиуса  $R$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности струи распределен заряд, поверхностная плотность  $\chi$  которого в равновесном состоянии, т.е. в условиях отсутствия каких-либо возмущений равновесной цилиндрической формы струи, постоянна. Влиянием поля сил тяжести будем пренебрегать.

Рассмотрение проведем в инерциальной системе отсчета, неподвижной относительно поверхности струи, в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью  $U$ , а ось  $OZ$  направлена вдоль оси симметрии струи по направлению ее движения:  $\mathbf{n}_Z \parallel \mathbf{U}$ . Будем полагать, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе определится

капиллярными колебаниями ее поверхности, обусловленными начальной деформацией, которую для простоты выберем наиболее простой. Примем, что начальная деформация волновая и определяется одной гармоникой с волным числом  $k$  и азимутальным числом  $m$

$$t = 0: \quad r(\varphi, r, t) = R + a \cos[(kz - m\varphi) - \omega_m t],$$

которая может быть как осесимметричной при  $m = 0$ , так и неосесимметричной при  $m \neq 0$ ; радиус струи много больше амплитуды осцилляций  $R \gg a$ . Зададимся целью проследить эволюцию во времени подобной начальной деформации равновесной цилиндрической струи.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным, полагая  $R = \rho = \sigma = 1$ . Тогда уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1, \quad (1)$$

где  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты;  $t$  — время;  $\xi$  — функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи, заданного в начальный момент времени, будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе  $\Psi$  и электростатического потенциала  $\Phi$  в окрестности струи

$$\Delta\Psi = 0; \quad \Delta\Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и на бесконечности

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla\Psi| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi| \rightarrow 0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Psi\nabla F = 0;$$

$$F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)] = 0; \quad (4)$$

$$\Delta P - \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 - \operatorname{div}\mathbf{n} = 0; \quad (5)$$

$$\Phi = \Phi_S(t). \quad (6)$$

В выражении (5)  $\Delta P$  — перепад давлений внутри и вне цилиндрической струи в равновесном состоянии; предпоследнее и последнее слагаемые — давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности (1):  $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$ .

Красивую задачу (1)–(6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина кото-

рого равна длине волны  $\lambda$ :

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}\nabla\Phi)r \, d\varphi \, dz = 2\pi\chi\lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \, dr \, d\varphi \, dz = \pi\lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2)–(8) необходимо задать еще начальные условия, первое из которых представляет собой начальное возмущение поверхности струи, которое запишем в виде

$$r(\varphi, z, 0) = 1 + \varepsilon[\xi^{(+)}(0) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(0) \exp(-im\varphi)] \exp(ikz),$$

$\varepsilon$  — малый параметр, равный отношению амплитуды волны к радиусу струи  $\varepsilon \equiv a/R$ . Второе начальное условие, как это принято в аналитических расчетах нелинейных волн [10–15], зададим на финальной стадии решения задачи таким образом, чтобы получающееся аналитическое выражение имело наименее громоздкий вид.

## 2. Описание асимптотической процедуры

Будем искать решение (2)–(8) в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\varepsilon$ . Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до третьего порядка малости включительно, представим искомые функции  $\varphi, \Psi$  и  $\Phi$  в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется тремя временными масштабами: основным  $T_0 = t$  и более медленными  $T_1 = \varepsilon t$  и  $T_2 = \varepsilon^2 t$ ;

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^3\xi^{(3)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^4);$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\Psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^4);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^4). \quad (9)$$

Примем, что форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени имеет вид

$$r = 1 + \varepsilon[\xi^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным;  $\theta \equiv kz - \omega_m T_0$ , где  $\omega_m(k)$  — частота волны,  $\xi^{\pm}(T_1, T_2)$  — пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленных времен  $T_1$  и  $T_2$ .

Чтобы отыскать асимптотическое решение сформулированной задачи, подставим разложение (9) в уравнения (2)–(8), пользуясь для вычисления производной по времени оператором

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$$

и раскладывая с учетом (10) граничные условия (4)–(8) в асимптотические ряды в окрестности равновесной цилиндрической поверхности  $r = 1$ . Затем в каждом из уравнений и граничных условий задачи (2)–(8) выделим, просуммируем и приравняем нулю слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В итоге получим набор линейных (в общем случае неоднородных) краевых задач для отыскания нелинейных поправок различных порядков малости к линейному решению.

### 3. Решения задач различных порядков малости

#### 3а. Задача нулевого порядка малости

В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда  $\chi$ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю:  $\Phi_s^{(0)} = 0$ . Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на цилиндрической поверхности струи  $\Delta P = 1 - 2\pi\chi^2$ .

#### 3б. Задача первого порядка малости

В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9) функции  $\Psi^{(j)}$  и  $\Phi^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) в первом приближении являются решениями уравнений Лапласа. Система граничных и дополнительных условий (4)–(8) в первом порядке малости принимает вид

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad & \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \xi^{\pm(1)}}{\partial T_0} = 0; \\ & -\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{\pm(1)} \right\} \\ & + \xi^{\pm(1)} + \frac{\partial^2 \xi^{\pm(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\pm(1)}}{\partial z^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{\pm(1)} &= \Phi_s^{(1)}(t); \\ \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{\pm(1)} \right] d\varphi dz &= 0; \\ \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{\pm(1)} d\varphi dz &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи первого порядка малости для профиля волны  $\xi^{\pm(1)}(\varphi, z, T_0, T_1, T_2)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^{\pm(1)} &= [\xi^{\pm(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ &+ \xi^{\pm(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Явный вид функций  $\xi^{\pm(1)}(T_1, T_2)$  может быть определен лишь из решений задач более высоких порядков малости. Несложно убедиться, что функция  $\xi^{\pm(1)}$  в виде (12) удовлетворяет условию неизменности объема (8).

Принимая во внимание, что потенциал поля скоростей  $\Psi^{(1)}$  и электростатический потенциал  $\Phi^{(1)}$ , определяемые в первом порядке малости, связаны с функцией  $\xi^{\pm(1)}$  кинематическим граничным условием (4) и условием эквивалентности (6), будем искать выражения для  $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2)$  и  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2)$  в виде

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= I_m(kr) [B^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ &+ B^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= K_m(kr) [D^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ &+ D^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + \Phi_s^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где зависимость потенциалов  $\Psi^{(1)}$  и  $\Phi^{(1)}$  от координаты  $r$  определяется из уравнений Лапласа (2), которые при заданной зависимости от угла  $\varphi$  сводятся к уравнениям Бесселя, и должна удовлетворять условиям ограниченности (3), а потому выражается через модифицированные функции Бесселя  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$ . Учитывая сказанное выше, найдем связь между коэффициентами решений (12) и (13):

$$\begin{aligned} B^{\pm}(T_1, T_2) &= \frac{-i\omega_m \xi^{\pm(1)}(T_1, T_2)}{k I_m'(k)}; \\ D^{\pm}(T_1, T_2) &= \frac{4\pi\chi \xi^{\pm(1)}(T_1, T_2)}{K_m(k)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи. В результате выражения для потенциалов  $\Psi^{(1)}(\mathbf{r})$  и  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r})$  примут окончательный вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) &= -i\omega_m \frac{I_m(kr)}{k I_m'(k)} [\xi^{\pm(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ &+ \xi^{\pm(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) = & 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ & + \xi^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

При записи выражения для  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r})$  учтено, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности электропроводной струи равна нулю:  $\Phi_S^{(1)}(t) = 0$ .

Подставив в динамическое граничное условие решения (15) и (12), найдем дисперсионное уравнение, связывающее волновое  $k$  и азимутальное  $m$  числа с частотой волны  $\omega_m(k)$ :

$$\omega_m^2(k) = G_m(k)[k^2 + m^2 - 1 + W(1 + H_m(k))]; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W &\equiv 4\pi\chi^2; & G_m(k) &= k I'_m(k)/I_m(k); \\ H_m(k) &= k K'_m(k)/K_m(k). \end{aligned}$$

### 3с. Задача второго порядка малости

Во втором порядке малости из системы (2)–(8) получим неоднородную краевую задачу для отыскания поправок второго порядка малости  $\xi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ . Функции  $\Psi^{(2)}$  и  $\Phi^{(2)}$  в силу линейности проектов асимптотических решений (9) во втором порядке малости являются решениями уравнений Лапласа с неоднородными граничными условиями, в которых правые части (играющие роль функций неоднородности) выражаются через решения нулевого (11) и первого (12), (15) порядков малости.

Система граничных и дополнительных условий во втором порядке малости имеет вид

$$r = 1 :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = & \left[ \frac{\partial \xi^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \xi^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \\ & \times \exp(i\theta) + i [X_1 ((\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \\ & \times \exp(-i2m\varphi)) + X_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)} \exp(i2\theta) + (k.c.)]; \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi \left[ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi \xi^{(2)} \right] + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2}$$

$$= -i\omega_m \frac{1}{G_m(k)} \left[ \frac{\partial \xi^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \xi^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right]$$

$$\times \exp(i\theta) + [Y_1 ((\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi))$$

$$+ Y_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)} \exp(i2\theta) + Y_3 2\xi^{(+)}\xi^{(-)} \exp(i2m\varphi)$$

$$+ Y_4 (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) + (k.c.);$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} - 4\pi\chi \xi^{(2)} = & \Phi_S^{(2)} + L \left\{ [(\xi^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) \right. \\ & + (\xi^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) + 2\xi^{(+)}\xi^{(-)} \exp(i\theta) \\ & \left. + 2\xi^{(+)}\xi^{(-)} \exp(i2m\varphi) + (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) + (k.c.) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} d\varphi dz = & -4\pi^2 \lambda \chi [k^2 + m^2 - 4H_m(k)] (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2); \end{aligned}$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} d\varphi dz = -\pi\lambda (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2).$$

Выражения для неопределенных коэффициентов приведены в Приложении А.

Аналитические выражения для искомым поправок второго порядка малости, получаемые в результате решения задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} = & [A_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + A_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi) \\ & + A_{02}] \exp(i2\theta) + A_{00}(T_1, T_2) + [A_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ & + A_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) \\ & + A_{20}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)} = & I_{2m}(2kr) [B_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) \\ & + B_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) \\ & + I_0(2kr) B_{02}(T_1, T_2) \exp(i2\theta) \\ & + r^{2m} B_{20}(T_1) \exp(i2m\varphi) + 2B_{00}(T_1, T_2) \\ & + I_m(kr) [B_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ & + B_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + f_1(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} = & K_{2m}(2kr) [D_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) \\ & + D_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) \\ & + K_0(2kr) D_{02}(T_1, T_2) \exp(i2\theta) \\ & + r^{-2m} D_{20}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + D_{00}(T_1, T_2) \\ & + K_m(kr) [D_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) \\ & + D_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + f_2(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Зависимости поправок второго порядка малости  $\Psi^{(2)}$  и  $\Phi^{(2)}$  от координаты  $r$ , использованные при записи (17), так же как в задаче первого порядка малости, несложно получить из уравнений Лапласа с заданными условиями ограниченности на оси и на бесконечности.

Подставив (17) в граничные условия и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим систему уравнений относительно коэффициентов  $A_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ ,  $B_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$  и  $D_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ ,  $n, l = \{0, 1, 2\}$ , отыскав решение которой, найдем связь  $A_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ ,  $B_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ ,  $D_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$  между собой и с

комплексными амплитудами  $\xi^{(\pm)}$ , а также дифференциальное уравнение для отыскания амплитуд  $\xi^{(\pm)}$ :

$$\partial \xi^{(\pm)} / \partial T_1 = 0; \quad (18)$$

$$A_{22}^{(\pm)} = a_1 (\xi^{(\pm)})^2; \quad A_{02} = a_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)}; \quad A_{20} = a_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}};$$

$$A_{00} = -(|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) / 2; \quad A_{11}^{(\pm)} = 0; \quad (19)$$

$$B_{22}^{(\pm)} \equiv \frac{-i}{2k I_{2m}^{\prime}(2k)} (2\omega_m A_{22}^{(\pm)} - X_1 (\xi^{(\pm)})^2) \equiv -i b_1 (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$B_{11}^{(\pm)} = B_{20} = 0;$$

$$B_{02} \equiv \frac{-i}{2k I_0^{\prime}(2k)} (2\omega_m A_{02} - X_2 \xi^{(+)} \xi^{(-)}) \equiv -i b_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)};$$

$$f_1(t) = b_0 T_0;$$

$$D_{22}^{(\pm)} = (4\pi\chi A_{22}^{(\pm)} + L(\xi^{(\pm)})^2) / K_{2m}(2k) \equiv d_1 (\xi^{(\pm)})^2;$$

$$f_2 = (2\pi\chi - L) A_{00};$$

$$D_{20} = 4\pi\chi A_{20} + L \xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}} \equiv d_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}};$$

$$D_{00} = 4\pi\chi (k^2 + m^2) A_{00};$$

$$D_{02} = (4\pi\chi A_{02} + L \xi^{(+)} \xi^{(-)}) / K_0(2k) \equiv d_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)};$$

$$D_{11}^{(\pm)} = 0, \quad (20)$$

где черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Выражения для коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  приведены в Приложении А.

Из соотношений (18)–(20) видно, что комплексные амплитуды  $\xi^{(\pm)}$  и коэффициенты  $A_{nl}^{(\pm)}$ ,  $B_{nl}^{(\pm)}$  и  $D_{nl}^{(\pm)}$  не зависят от временного масштаба  $T_1$ . Все вновь введенные обозначения приведены в Приложении А.

### 3д. Задача третьего порядка малости

Поправки  $\Psi^{(3)}$  и  $\Phi^{(3)}$  третьего порядка малости будут решениями уравнений Лапласа. Система неоднородных граничных и дополнительных условий к задаче в третьем порядке малости имеет громоздкий вид и вынесена в Приложение В. В третьем порядке малости помимо поправок  $\xi^{(3)}$ ,  $\Psi^{(3)}$  и  $\Phi^{(3)}$  можно получить зависимость комплексных амплитуд от более медленного временного масштаба  $T_2$  и нелинейную (зависящую от квадрата амплитуды волны) поправку к частоте волны.

Повторив те же шаги, что и в задаче второго порядка малости, для поправок третьего порядка малости  $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$ ,  $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$  и  $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$  можно найти аналитические выражения

$$\xi^{(3)} = [(A_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + A_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi)) + (A_2^{(+)} \exp(im\varphi) + A_2^{(-)} \exp(-im\varphi))] \exp(i3\theta) + [A_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + A_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi)] \exp(i\theta) + [A_4^{(+)} \exp(im\varphi) + A_4^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + A_5 + (k.c.);$$

$$\Psi^{(3)} = I_{3m}(3kr) [B_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + B_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi)] \exp(i3\theta) + I_m(3kr) [B_2^{(+)} \exp(im\varphi) + B_2^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i3\theta) + I_{3m}(kr) [B_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + B_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi)] \exp(i\theta) + I_m(kr) [B_4^{(+)} \exp(im\varphi) + B_4^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + (k.c.);$$

$$\Phi^{(3)} = K_{3m}(3kr) [D_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + D_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi)] \exp(i3\theta) + K_m(3kr) [D_2^{(+)} \exp(im\varphi) + D_2^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i3\theta) + K_{3m}(kr) [D_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + D_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi)] \exp(i\theta) + K_m(kr) [D_4^{(+)} \exp(im\varphi) + D_4^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + D_5 \ln r + (k.c.), \quad (21)$$

определив зависимость  $\Psi^{(3)}$  и  $\Phi^{(3)}$  от координаты  $r$ , подставив их в уравнения Лапласа (2) с условиями ограниченности (3).

Подставив выражения (21) для поправок третьего порядка малости в дополнительные условия сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны  $\lambda$  (8), (9), найдем, что коэффициенты  $A_5$  и  $D_5$  равны нулю. После подстановки выражений (21) в кинематическое (4) и динамическое (5) граничные условия, а также в условие эквипотенциальности поверхности струи (6), если равны коэффициенты при одинаковых экспонентах, определяется система уравнений для нахождения коэффициентов  $A_j^{(\pm)}$ ,  $B_j^{(\pm)}$  и  $D_j^{(\pm)}$ ; ( $j = \{1, \dots, 5\}$ ). Кроме выражений, определяющих коэффициенты в решении третьего порядка малости, получаем дифференциальное уравнение относительно  $\xi^{(\pm)}$ , из которого можно найти коэффициент  $g^{(\pm)}$ , определяющий поправку к частоте волны

$$\frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial T_2} = -i \frac{g^{(\pm)}(k)}{\omega_m(k)} \xi^{(\pm)} + i \frac{G_m(k)}{2\omega_m(k)} \left[ \frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} + 1 - k^2 - m^2 - W(1 + H_m(k)) \right] A_4^{(\pm)}; \quad (22)$$

$$g^{(\pm)} \equiv \frac{G_m(k)}{2} \left\{ \left( \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \Gamma_4 + \Upsilon_4 + \chi H_m(k) \Lambda_4 \right) |\xi^{(\pm)}|^2 + \left( \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \Gamma_5 + \Upsilon_5 + \chi H_m(k) \Lambda_5 \right) |\xi^{(\mp)}|^2 \right\}. \quad (23)$$

Выражения для коэффициентов  $\Gamma_j$ ,  $\Upsilon_j$  и  $\Lambda_j$  приведены в Приложении С.

Отметим, что сама по себе нелинейная поправка к частоте в асимптотическом анализе означает лишь распыление нелинейной волны со временем за счет

различия в фазовых скоростях поправок различных порядков малости, но тем не менее она оказывает существенное влияние на закономерности реализации неустойчивости волны (на закономерности разбиения волны на отдельные капли).

Квадратная скобка в уравнении (22) равна нулю, согласно (16). Поскольку у нас не использовано второе начальное условие, сформулируем его в виде требования, чтобы  $A_4^{(\pm)} = 0$ . Тогда из уравнения (22) зависимость комплексных амплитуд  $\xi^{(\pm)}$  от временного масштаба  $T_2$  определится в виде:

$$\xi^{(\pm)} = C \exp\left(-i \frac{g^{(\pm)}(k)}{\omega_m(k)} T_2\right).$$

Поскольку  $g^{(+)}$  и  $g^{(-)}$  характеризуют поправку к одной и той же частоте  $\omega_m(k)$ , очевидно, что они должны быть равны, что говорит об эквивалентности  $\xi^{(+)}$  и  $\xi^{(-)}$ . Таким образом, для  $\xi = \xi(T_2)$  можно записать окончательное выражение

$$\xi(T_2) = C \exp\left(-i \frac{g(k)}{\omega_m(k)} T_2\right), \quad (24)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Учитывая, что  $\xi^{(+)} = \xi^{(-)}$ , приведем соотношение для определения коэффициентов  $A_j$ :

$$A_j = \alpha_j C^3, \quad j = \{1, 2, 3\};$$

$$\alpha_j = \frac{\omega_j \Gamma_j + G_{m_j}(k_j)(\Upsilon_j + \chi \Lambda_j H_{m_j}(k_j))}{\omega_j^2 - (\omega_{m_j}(k_j))^2}; \quad (25)$$

$$\omega_j \equiv \{3\omega_m(k_j), 3\omega_m(k_j), \omega_m(k_j)\},$$

$$k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}.$$

Поскольку потенциалы поля скоростей  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  и электростатический  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  связаны с функцией  $\xi(\mathbf{r}, t)$  граничными условиями (4)–(5) и условием (6), то коэффициенты  $B_j$  и  $D_j$  несложно найти, зная  $A_j$ :

$$B_j \equiv (-i/[k_j I'_{m_j}(k_j)])(\omega_j A_j - \Gamma_j C^3);$$

$$D_j \equiv (1/K_{m_j}(k_j))(4\pi\chi A_j + \Lambda_j C^3), \quad j = \{1, 2, 3\}. \quad (26)$$

Из первого начального условия следует, что  $C = 1$ .

#### 4. Финальное выражение для формы струи. Обсуждение полученных результатов

Собрав вместе поправки всех порядков малости, получим, что форма свободной поверхности жидкости струи в произвольный момент времени с учетом выра-

жения (24) будет описываться уравнением

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \varepsilon \cos(m\varphi) \cos\left(\theta - \varepsilon^2 \frac{g(k)}{\omega_m(k)} t\right) - 0.25\varepsilon^2 [0.5 - (a_1 \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\theta) - a_3 \cos(2m\varphi)] + (\varepsilon^3/16) \{ [\alpha_1 \cos(3m\varphi) + \alpha_2 \cos(m\varphi)] \cos(3\theta) + \alpha_3 \cos(3m\varphi) \cos(\theta) \}. \quad (27)$$

Условие реализации неустойчивости струи по отношению к действию сил поверхностного натяжения и давления электрического поля заключается в прохождении квадрата частоты через нуль в область отрицательных значений. С учетом наличия нелинейной поправки к частоте в третьем порядке малости это условие приведет к соотношению

$$\left(\omega_m + \varepsilon^2 \frac{g}{\omega_m}\right)^2 \approx \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 g = 0.$$

Несложно видеть, что влияние нелинейной поправки на критическую для начала реализации неустойчивости струи длину волны  $k$  и критическое значение параметра  $W$  будет различным при  $g > 0$  и при  $g < 0$ .

Из вида нелинейных поправок третьего порядка малости  $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  несложно видеть, что они имеют резонансный характер, определяющийся видом коэффициентов, которые при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами. Положения резонансов определяются требованием стремления к бесконечности коэффициентов  $\alpha_j$ , через которые определяются амплитудные множители  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $D_j$  при нелинейных поправках третьего порядка малости. Согласно (25), условия реализации вырожденного четырехмодового резонансного взаимодействия волн на поверхности струи имеют вид

$$\omega_j^2 - (\omega_{m_j}(k_j))^2 = 0, \quad (28)$$

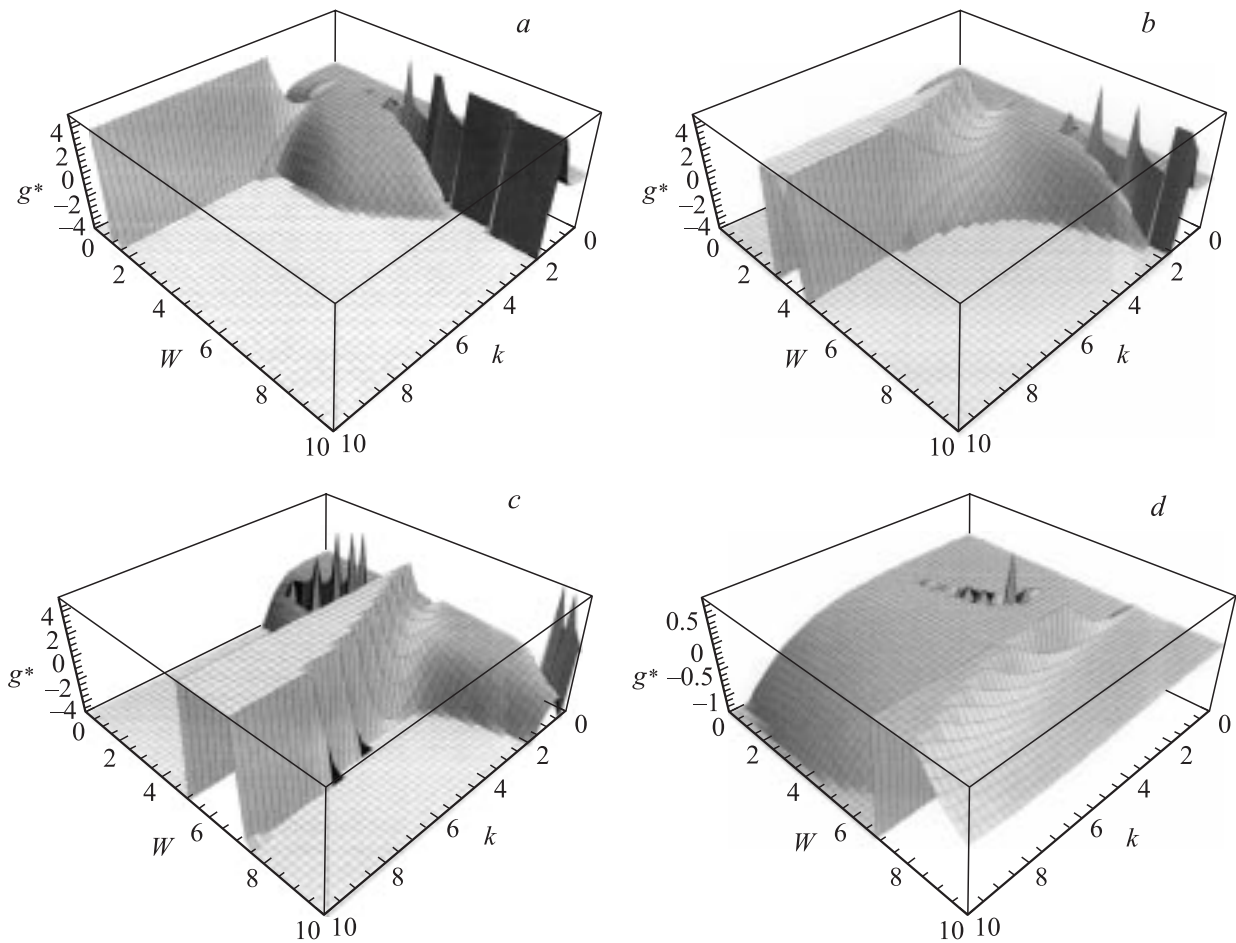
где  $\omega_j$  — частота моды, в которую энергия перекачивается, определяется (16), а  $\omega_{m_j}(k_j)$  — частота моды, определяющей форму начальной деформации, от которой энергия отбирается, задается соотношением:

$$(\omega_{m_j}(k_j))^2 \equiv G_{m_j}(k_j) \{k_j^2 + m_j^2 - 1 + W [1 + H_{m_j}(k_j)]\};$$

$$\omega_{m_j} \equiv \{3\omega_m(k), 3\omega_m(k), \omega_m(k)\},$$

$$k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}. \quad (29)$$

В нелинейных поправках третьего порядка малости  $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  сохраняются и вырожденные трехмодовые резонансы, характерные для квадратичного приближения. Их положения определяются требованием стремления к бесконечности коэффициен-



Зависимости величины нелинейной поправки к частоте  $g^* \equiv \varepsilon^2 g$  от параметра  $W$ , характеризующего поверхностную плотность заряда на струе, и безразмерного волнового числа  $k$ , рассчитанные при различных значениях азимутального числа:  $a$  —  $m = 0$ ;  $b$  —  $1$ ,  $c$  —  $2$ ;  $d$  —  $3$ ;  $e$  —  $4$ .

тов  $a_j$ , входящих в определение амплитудных коэффициентов второго и третьего порядков малости. Условия реализации трехмодовых резонансов записываются в виде

$$4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0; \quad 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0.$$

Исследование закономерностей резонансного обмена энергией между волнами требует отдельного рассмотрения, но из вида соотношений (16), (28), (29) сразу можно сказать, что в реализующихся вырожденных резонансах перенос энергии между длинными и короткими волнами идет лишь в одном направлении: от длинных к коротким, независимо от симметрии взаимодействующих волн.

На рисунке приведены рассчитанные по (23) для различных значений азимутального числа  $m$  графики зависимости величины нелинейной поправки к частоте  $g^* \equiv \varepsilon^2 g$  от параметра  $W$ , характеризующего поверхностную плотность заряда на струе, и безразмерного волнового числа  $k$ . Из рисунка видно, что величина и знак (а следовательно, и влияние на критические условия неустойчивости струи) нелинейной поправки к частоте зависят не только от поверхностной плотности

электрического заряда на струе и волнового числа, но и от азимутального числа  $m$ . Видно также, что нелинейная поправка к частоте имеет резонансный вид, поэтому при ее использовании в окрестностях резонансов следует обращать внимание на выполнение требования асимптотичности разложения (иными словами, необходимо следить, чтобы малая поправка к частоте оставалась малой по сравнению с частотой).

Интересно отметить, что нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации

$$r(z, \varphi) = 1 - 0.25\varepsilon^2 [0.5 - a_3 \cos(2m\varphi)].$$

Такой же феномен ранее был обнаружен для нелинейно-осциллирующих капель [16,17].

## Заключение

В асимптотических расчетах нелинейных осцилляций струи третьего порядка малости появляются нелинейные поправки к частотам, квадратичные по амплитуде, зави-

сящие от вида начальной деформации струи, имеющие резонансный вид и оказывающие влияние на критические условия реализации неустойчивости струи.

## Приложение А

Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости

$$\begin{aligned}
 a_1 &\equiv M_1/N_1; & a_2 &\equiv M_2/N_2; \\
 M_1 &= G_{2m}(2k)[Y_1 + \chi L H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k)X_1; \\
 N_1 &= 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k); \\
 M_2 &= G_0(2k)[Y_2 + \chi L H_0(2k)] + 2\omega_m(k)X_2; \\
 N_2 &= 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k); \\
 a_3 &\equiv (Y_3 - 2m\chi L)/[(1 - 2m)(1 + 2m - W)]; \\
 b_0 &\equiv Y_4 + 0.5 - 0.5W(k^2 + m^2 + 1); \\
 X_1 &= \omega_m(k)[2(k^2 + m^2) - G_m(k)]/G_m(k); \\
 X_2 &= \omega_m(k)[2k^2 - G_m(k)]/G_m(k); \\
 L &= -2\pi\chi[1 + 2H_m(k)]; \\
 Y_1 &= 1 + 0.5(k^2 - 5m^2) + \omega_m^2(k)[k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)]/2G_m^2(k) \\
 &\quad + 0.5W[3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)]; \\
 Y_2 &= 1 + 0.5(k^2 - 3m^2) + \omega_m^2(k)[k^2 - m^2 - 3G_m^2(k)]/2G_m^2(k) \\
 &\quad + 0.5W[3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)]; \\
 Y_3 &= 1 - 0.5(k^2 + 5m^2) + \omega_m^2(k)[k^2 - m^2 - G_m^2(k)]/2G_m^2(k) \\
 &\quad + 0.5W[k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)]; \\
 Y_4 &= 1 - 0.5(k^2 + 3m^2) + \omega_m^2(k)[k^2 + m^2 - G_m^2(k)]/2G_m^2(k) \\
 &\quad + 0.5W[k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)].
 \end{aligned}$$

## Приложение В

Система граничных и дополнительных условий третьего порядка малости.

$$\begin{aligned}
 r = 1 : & \quad \frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(3)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_2} - \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \\
 & \quad + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(2)} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}}{\partial r^3} (\xi^{(1)})^2 + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial \varphi \partial r} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \\
 & \quad - 2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial z \partial r} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \\
 & \quad + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(3)} \right\} \\
 & + \xi^{(3)} + \frac{\partial^2 \xi^{(3)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(3)}}{\partial z^2} = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial T_0 \partial r} \xi^{(2)} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}}{\partial T_0 \partial r^2} (\xi^{(1)})^2 + \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial T_0 \partial r} \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial T_1 \partial r} \xi^{(1)} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \\
 & - \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \xi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} \\
 & - \frac{1}{8\pi} \left\{ \xi^{(1)} \xi^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{6} (\xi^{(1)})^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right\} \\
 & - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(2)} \\
 & - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial r^3} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} \right) (\xi^{(1)})^2 \\
 & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} (\xi^{(1)})^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \\
 & + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - 3 \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \\
 & - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} \\
 & - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \xi^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + 2 \left( \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right) \\
 & + 2 \xi^{(1)} \xi^{(2)} - (\xi^{(1)})^3 - 3 \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} (\xi^{(1)})^2 + 2 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi \partial z} \\
 & + \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right]; \\
 \Phi^{(3)} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(3)} &= \Phi_S^{(3)}(t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(2)} \\
 & - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} (\xi^{(1)})^2 \\
 & - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \xi^{(2)} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} (\xi^{(1)})^3;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \right]_{\xi^{(3)}} \Big|_{r=1} d\varphi dz \\
& = \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \right]_{\xi^{(2)}} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \right)_{\xi^{(1)}} \\
& + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)_{\xi^{(1)}} \xi^{(2)} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \left( r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)_{\xi^{(1)}}^3 \\
& - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)_{\xi^{(1)}} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)_{\xi^{(1)}} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)_{\xi^{(1)}}^2 - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right) \\
& \times \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \right]_{\xi^{(1)}} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} \\
& - \left. \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right]_{r=1} d\varphi dz.
\end{aligned}$$

## Приложение С

Выражения для  $\Gamma_j$ ,  $\Upsilon_j$  и  $\Lambda_j$ ,  $j = \{1, \dots, 5\}$ , использующихся при записи решения третьего порядка малости:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 & = b_1 I_{2m}(2k)(k^2 + m^2 - G_{2m}(2k)) \\
& + a_1 \omega_m (3k^2 + 3m^2 - G_m(k)) / G_m(k) \\
& - \omega_m [k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k)] / 2G_m(k); \\
\Gamma_2 & = b_1 I_{2m}(2k)(6k^2 + 2m^2 - G_{2m}(2k)) + a_1 \omega_m (3k^2 - m^2 \\
& - G_m(k)) / G_m(k) + 2b_2 I_0(2k)(6k^2 - G_0(2k)) \\
& + 2a_2 \omega_m (3k^2 + m^2 - G_m(k)) / G_m(k) \\
& - \omega_m [3k^2 + 5m^2 - (9k^2 + m^2 + 6)G_m(k)] / 2G_m(k); \\
\Gamma_3 & = b_1 I_{2m}(2k)(2k^2 + 6m^2 - G_{2m}(2k)) \\
& + a_1 \omega_m (k^2 - 3m^2 + G_m(k)) / G_m(k) \\
& + \omega_m [k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k)] / 2G_m(k); \\
\Gamma_4 & = b_1 I_{2m}(2k)(2k^2 + 2m^2 - G_{2m}(2k)) \\
& + a_1 \omega_m (k^2 + m^2 + G_m(k)) / G_m(k) \\
& + \omega_m [k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k)] / 2G_m(k);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 & = 2b_2 I_0(2k)(2k^2 - G_0(2k)) \\
& + 2a_2 \omega_m (k^2 - m^2 + G_m(k)) / G_m(k) \\
& + \omega_m [k^2 - m^2 - (3k^2 - m^2 + 2)G_m(k)] / G_m(k); \\
\Upsilon_1 & = a_1 [-\omega_m^2 + 2k^2 - 12m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] \\
& + 1.5\omega_m^2 + b_1 \omega_m I_{2m}(2k) [2(k^2 + m^2) / G_m(k) - 3G_{2m}(2k)] \\
& + d_1 \chi K_{2m}(2k) [6k^2 + 6m^2 - (2 + H_m(k))H_{2m}(2k)] \\
& - \omega_m^2(k) [(k^2 + m^2)G_m(k) + 2m^2] / 2G_m^2(k) \\
& + 0.5W [4 - 3k^2 - 7m^2 + (k^2 + m^2 + 6 + 2H_m(k))H_m(k)] \\
& - 1 - 0.5k^2 + 4.5m^2 + 3k^2 m^2 + 1.5(k^4 + m^4); \\
\Upsilon_2 & = (a_1 + 2a_2) [-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] \\
& + 2a_1 (k^2 - 4m^2) + 4a_2 (k^2 - m^2) + 4.5\omega_m^2 + b_1 \omega I_{2m}(2k) \\
& \times [2(k^2 - m^2) / G_m(k) - 3G_{2m}(2k)] + b_2 2\omega I_0(2k) \\
& \times [2k^2 / G_m(k) - 3G_0(2k)] + d_1 \chi K_{2m}(2k) [6k^2 + 6m^2 \\
& - (2 + H_m(k))H_{2m}(2k)] + d_2 2\chi K_0(2k) [6k^2 - (2 + H_m(k)) \\
& \times H_0(2k)] - \omega_m^2(k) [(3k^2 + 11m^2)G_m(k) - 2m^2] / 2G_m^2(k) \\
& - 3 - 1.5k^2 + 7.5m^2 - k^2 m^2 + 0.5W [12 - 9k^2 - 13m^2 \\
& + (3k^2 - 5m^2 + 18 + 6H_m(k))H_m(k)] + 1.5(3k^4 - m^4); \\
\Upsilon_3 & = (a_1 + 2a_3) [-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] \\
& - 2a_1 (k^2 + 6m^2) - a_3 24m^2 + 0.5\omega_m^2 + b_1 \omega I_{2m}(2k) \\
& \times [2(k^2 - m^2) / G_m(k) - G_{2m}(2k)] + d_1 \chi K_{2m}(2k) [2k^2 + 6m^2 \\
& - (2 + H_m(k))H_{2m}(2k)] + d_3 4\chi m [3m + 2 + H_m(k)] \\
& - \omega_m^2(k) [(-5k^2 + 3m^2)G_m(k) + 2m^2] / 2G_m^2(k) - 3 \\
& + 1.5k^2 + 13.5m^2 - k^2 m^2 + 0.5W [12 - 9k^2 - 21m^2 \\
& + (-5k^2 + 3m^2 + 18 + 6H_m(k))H_m(k)] - 1.5(k^4 - 3m^4); \\
\Upsilon_4 & = a_1 [-\omega_m^2 - 2k^2 - 8m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] \\
& + 1.5\omega_m^2 + b_1 \omega_m I_{2m}(2k) [2(k^2 + m^2) / G_m(k) - G_{2m}(2k)] \\
& + d_1 \chi K_{2m}(2k) [2k^2 + 2m^2 - (2 + H_m(k))H_{2m}(2k)] \\
& + \omega_m^2(k) [5(k^2 + m^2)G_m(k) - 6m^2] / 2G_m^2(k) \\
& + 0.5W [18 - 7k^2 - 11m^2 + (-3k^2 - 3m^2 + 22 \\
& + 6H_m(k))H_m(k)] - 5 + 0.5k^2 + 9.5m^2 - 3k^2 m^2 \\
& - 1.5(k^4 + m^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_5 &= 2(a_2 + a_3) [-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] \\
&- 4a_2(k^2 + m^2) - a_3 16m^2 + 2\omega_m^2 \\
&+ 2b_2\omega_m I_0(2k) [2k^2/G_m(k) - G_0(2k)] \\
&+ d_2 2\chi K_0(2k) [2k^2 - (2 + H_m(k))H_0(2k)] \\
&+ d_3 4\chi m(m + 2 + H_m(k)) \\
&+ \omega_m^2(k) [(5k^2 - 3m^2)G_m(k) + 2m^2]/G_m^2(k) - 8 + k^2 \\
&- 17m^2 + 2k^2m^2 + W[15 - 8k^2 - 12m^2 - (4k^2 + 4m^2 \\
&- 20 - 6H_m(k))H_m(k)] - 3(k^4 + m^4); \\
\Lambda_1 &= -4\pi\chi a_1(1 + H_m(k)) + 2\pi\chi[(2/3) - k^2 - m^2 \\
&+ H_m(k)] - d_1 2kK'_{2m}(2k); \\
\Lambda_2 &= -4\pi\chi(a_1 + 2a_2)(1 + H_m(k)) + 6\pi\chi[(2/3) - k^2 \\
&- m^2 + H_m(k)] - 2k[d_1 K'_{2m}(2k) + 2d_2 K'_0(2k)]; \\
\Lambda_3 &= -4\pi\chi(a_1 + 2a_3)(1 + H_m(k)) + 6\pi\chi[(2/3) - k^2 \\
&- m^2 + H_m(k)] - d_1 2kK'_{2m}(2k) + d_3 4m; \\
\Lambda_4 &= -4\pi\chi a_1(1 + H_m(k)) + 2\pi\chi[4 - k^2 - m^2 + 5H_m(k)] \\
&- d_1 2kK'_{2m}(2k); \\
\Lambda_5 &= -8\pi\chi(a_2 + a_3)(1 + H_m(k)) + 4\pi\chi[3 - 2k^2 - 2m^2 \\
&+ 4H_m(k)] - d_2 4kK'_0(2k) + d_3 4m.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

## Список литературы

- [1] Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городков А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [2] Chen C.H., Saville D.A., Aksay I.A. // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 88. N 3 154 104. P. 1–3.
- [3] Macky W.A. // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [4] Higuera F.J. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 513. P. 239–246.
- [5] Lopez-Herera J.M., Canan-Calvo A.M. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 501. P. 303–326.
- [6] Loscertales I.G., Barrero A., Marquez M. // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 2005. Vol. 860E. N LL.5.9. P. 1–6.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
- [9] Горшков В.Н., Чабан М.Г. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
- [10] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Лувчук Т.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.

- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–50.
- [12] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.
- [13] Naufel F.H. // Phys. Fluids. 1970. N 4. P. 841–847.
- [14] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 37–44.
- [15] Курочкина С.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 44–51.
- [16] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
- [17] Ширяева С.О. // МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.