01;04

Отражение плазменной волны от плоской границы вырожденной плазмы

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: yushkanov@inbox.ru; avlatyshev@mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 июня 2006 г.)

Впервые поставлена и аналитически решена линеаризованная задача об отражении плазменной волны от границы полупространства вырожденной столкновительной плазмы. Применяются как зеркальные, так и диффузные условия рассеяния электронов на границе плазмы. Коэффициент отражения найден как функция исходных параметров задачи. Проанализирован длинноволновой предел.

PACS: 52.35.-g, 52.20.-j, 52.25.-b

Введение и основные уравнения

Возьмем систему координат с центром, лежащим на границе плазмы, плоскость yz совместим с границей плазмы, ось x направим перпендикулярно границе плазмы вглубь плазмы. Будем считать, что одна волна $E_1\exp\bigl(-i(kx+\omega t)\bigr)$ движется к границе плазмы, на границе отражается, от границы уходит отраженная волна $E_2\exp\bigl(i(kx-\omega t)\bigr)$.

Требуется найти: отношение амплитуд $K=E_2/E_1$, коэффициент отражения волны $R=|K|^2$ и аргумент отношения амплитуд $\varphi=\arg K$. Другими словами, нас интересует, какая часть волны рассеивается при отражении от границы и как „сдвигается" ее фаза.

В связи с тем что мы рассматриваем движение волны вдоль одной оси x, задача является одномерной в физическом пространстве. При этом функция распределения электронов зависит от времени t, пространственной координаты x и скоростной переменной $\mathbf{v}=(v_x,0,0)$.

Наш анализ примыкает к работам [1,2], где рассматривалась задача о поведении плазмы в полупространстве с диффузным [1] и зеркальным [2] отражением электронов от границы.

Пусть вырожденная плазма занимает полупространство $x>0$. Будем использовать [3] τ-модельное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+e_0\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=\nu(f_{\text{eq}}-f)$$

и уравнение Максвелла для электрического поля

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\qquad \rho=e_0\int(f-f_0)\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Здесь f_{eq} — локально-равновесная функция распределения Ферми, $f_{\text{eq}}=H(\varepsilon_F(t,x)-\varepsilon_e)$, $H(x)$ — единичная „ступенька" Хэвисайда,

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

f_0 — невозмущенная функция распределения Ферми (абсолютный фермиан), $f_0=H(\varepsilon_F-\varepsilon_e)$, $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ — импульс электрона, $\varepsilon_F(t,x)=\frac{mv_F^2(t,x)}{2}$ — возмущенная кинетическая энергия Ферми, $\varepsilon_e=\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия электрона (поверхность Ферми считается сферической), $\varepsilon_F=\frac{mv_F^2}{2}$ — невозмущенная кинетическая энергия Ферми, e_0 — заряд электрона, ρ — плотность заряда, $\hbar$ — постоянная Планка, ν — эффективная частота рассеяния электронов.

Ввиду симметрии задачи функция распределения f зависит только от пространственной координаты x, т. е. $f=f(x,\mathbf{v},t)$.

Будем линеаризовать функцию распределения электронов f и локально-равновесную функцию распределения f_{eq} относительно абсолютного фермиана $f_0(\varepsilon_e)$:

$$f=f_0(\varepsilon_e)+f_1(x,v_x,t),$$

$$f_{\text{eq}}=f_0(\varepsilon_F-\varepsilon_e)+\bigl(\varepsilon_F(t,x)-\varepsilon_e\bigr)\delta(\varepsilon_F-\varepsilon_e).$$

Поле внутри плазмы $\mathbf{E}$ будем искать в виде $\mathbf{E}=\bigl(E(x)\exp(-i\omega t),0,0\bigr)$. Проведем линеаризацию исходных уравнений. Так как электрическое поле имеет одну x-компоненту, то функцию распределения f_1 можно искать в виде

$$f_1=\exp(-i\omega t)\delta(\varepsilon_F-\varepsilon_e)\varepsilon_F h(x,\mu),\qquad \mu=\frac{v_x}{v}.$$

Обозначим $e(x)=\frac{e_0v_F}{\nu\varepsilon_F}E(x)$ и введем безразмерную координату $x_1=\frac{\nu x}{v_F}$. Введем безразмерную величину $k_1=k\frac{v_F}{\omega_p}$; тогда $kx=k_1\frac{\omega_p}{v_F}x_1\frac{v_F}{\nu}=\frac{k_1x_1}{\varepsilon}$, где $\varepsilon=\frac{\nu}{\omega_p}$. Переменную x_1 снова будем обозначать через x. Уравнения задачи теперь запишутся в безразмерном виде

$$\mu\frac{\partial h(x,\mu)}{\partial x}+z_0h(x,\mu)=\mu e(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}h(x,\mu')d\mu',$$

$$z_0=1-i\frac{\omega}{\nu}, \tag{1}$$

$$\frac{de(x)}{dx} = \frac{3\omega_p^2}{2\nu^2}\int_{-1}^{1} h(x,\mu')d\mu', \quad x > 0, \quad |\mu| < 1,$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e_0^2 n}{m}. \tag{2}$$

Известно, что частота плазменных колебаний ω_p, как правило, много больше частоты столкновений электронов в металле [4]. Поэтому в случае, когда $\omega \sim \omega_p$, выполняется условие $\omega_p \gg \nu$ ($\varepsilon \ll 1$).

Постановка задачи и собственные функции

Предположим, что на границу плазмы, которая лежит в плоскости $x = 0$, движется волна $E_1 \exp\big(-i(kx/\varepsilon + \omega t)\big)$, а отражается волна $E_2 \exp\big(i(kx/\varepsilon - \omega t)\big)$. Здесь $\varepsilon = \nu/\omega_p$, k — волновое число, ω — частота колебаний волны. Нас интересуют две основные характеристики взаимодействия плазменной волны с поверхностью плазмы — коэффициент отражения волны $R(k,\varepsilon) = |K|^2$ и сдвиг ее фазы — угол $\varphi(k,\varepsilon) = \arg K$, $K = E_2/E_1$. Амплитуда E_2 зависит от параметров задачи k и ε.

Задача об отражении ленгмюровской волны далее решается в двух случаях: зеркального и диффузного отражения электронов от границы плазмы. Для электрического поля граничные условия одни и те же в обоих случаях

$$e(0) = 0. \tag{3}$$

Условие непротекания для функции распределения электронов также одно и то же в обоих случаях

$$\int_{-1}^{1} \mu h(0,\mu)d\mu = 0. \tag{4}$$

Условие непротекания означает, что ток через границу плазмы отсутствует.

Для функции распределения электронов зеркальное отражение электронов от границы означает, что

$$h(0,\mu) = h(0,-\mu), \qquad -1 < \mu < 1. \tag{5}$$

В случае диффузного отражения электронов от границы плазмы функция распределения электронов должна удовлетворять условию

$$h(0,\mu) = A, \qquad 0 < \mu < 1, \tag{6}$$

причем постоянная A определяется из условия непротекания (4).

Частоту колебаний волны ω будем считать комплексной величиной $\omega = \omega_0 + i\omega_1$ и введем параметр γ равенствами

$$1 + \gamma = \frac{\omega_0 + i\omega_1}{\omega_p}, \qquad \gamma = \gamma_0 + i\gamma_1;$$

$$1 + \gamma_0 = \frac{\omega_0}{\omega_p}, \qquad \gamma_1 = \frac{\omega_1}{\omega_p}.$$

Параметр $\omega_1(\gamma_1)$ описывает затухание плазменной волны вследствие рассеяния электронов в объеме металла.

Будем искать решение уравнений (1) и (2) в виде

$$\varphi_n(x,\mu) = \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta}\Big)\Phi(\eta,\mu),$$

$$e_\eta(x) = \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta}\Big)E(\eta), \tag{7}$$

где $\eta \in (-1,+1)$ — спектральный параметр, или параметр разделения.

Подставим (7) в уравнения (1) и (2). Получим характеристическую систему уравнений

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{\eta\mu}{z_0}E(\eta) + \frac{\eta}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu')\,d\mu', \tag{8}$$

$$E(\eta) = -\frac{3\omega_p^2\eta}{2\nu^2 z_0}\int_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu)d\mu. \tag{9}$$

Обозначим $\eta_1^2 = \varepsilon^2 z_0/3$. Ясно, что

$$z_0 = -\frac{i}{\varepsilon}(1 + \gamma + i\varepsilon), \quad \eta_1^2 = -\frac{i\varepsilon}{3}(1 + \gamma + i\varepsilon).$$

Подставив интеграл из уравнения (9) в (8), приходим к следующей системе уравнений:

$$(\eta - \mu)\,\Phi(\eta,\mu) = \frac{E(\eta)}{z_0}(\eta\mu - \eta_1^2),$$

$$-\eta_1^2 E(\eta) = \frac{\eta}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu)\,d\mu. \tag{10}$$

Решение системы уравнений (10) существенно зависит от того, принадлежит или нет спектральный параметр η интервалу $-1 < \eta < 1$. В связи с этим интервал $-1 < \eta < 1$ назовем непрерывным спектром характеристической системы. Так же как и в первой главе, мы будем рассматривать лишь убывающие (по переменной x, $x > 0$) решения исходной системы, отвечающие непрерывному спектру.

Согласно (7), убывающими решения являются тогда и только тогда, когда $\eta \in (0,1)$, интервал $0 < \eta < 1$ является непрерывным спектром граничной задачи.

Пусть $\eta \in (-1,+1)$. Тогда из уравнений (10) в пространстве обобщенных функций [5] найдем собственные функции характеристической системы

$$\Phi(\eta,\mu) = F(\eta,\mu)\frac{E(\eta)}{z_0},$$

$$F(\eta,\mu) = P\frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - 2\eta_1^2 z_0\frac{\lambda(\eta)}{\eta}\delta(\eta - \mu), \tag{11}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, функция $\lambda(z)$ называется дисперсионной функцией задачи, Px^{-1} — символ главного значения интеграла от x^{-1},

$$\lambda(z) = 1 - \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0}\left(1 - \frac{z^2}{\eta_1^2}\right)\lambda_c(z),$$

$$\lambda_c(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\tau\,d\tau}{\tau - z},$$

$\lambda_c(z)$ — дисперсионная функция Кейза [6].

Функции (11) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр η сплошным образом заполняет континуум $(0, +1)$. Собственные решения исходной задачи даются равенствами (7).

Граничные значения дисперсионной функции сверху и снизу на разрезе вычисляются согласно формулам Сохоцкого:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \lambda(\mu) \pm \frac{i\pi\mu}{2z_0}\left(1 - \frac{\mu^2}{\eta_1^2}\right), \qquad -1 < \mu < 1.$$

По определению дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионного уравнения $g(z) \equiv \lambda(z)/z = 0$.

Приступим к отысканию этих нулей. Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\lambda(z) = \lambda_\infty + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_4}{z^4} + \ldots, \qquad z \to \infty, \tag{12}$$

где

$$\lambda_\infty = \lambda(\infty) = 1 - \frac{1}{z_0} + \frac{1}{3z_0\eta_1^2} = \frac{2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)}{(1 + \gamma + i\varepsilon)^2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{z_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5\eta_1^2}\right) = -\frac{9 + 5i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{15(1 + \gamma + i\varepsilon)^2},$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{z_0}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7\eta_1^2}\right) = -\frac{15 + 7i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{35(1 + \gamma + i\varepsilon)^2}.$$

Нетрудно видеть, что дисперсионное уравнение в качестве нуля имеет точку $\eta_i = \infty$, которой отвечают дискретные собственные решения исходной системы

$$\varphi_\infty(x, \mu) = \frac{E_\infty}{z_0}\mu, \qquad e_\infty(x) = E_\infty.$$

Это решение естественно назвать модой Друде. Оно описывает объемную проводимость металла, рассмотренную Друде (см., например, [4]).

В [1] подробно был рассмотрен вопрос о существовании плазменных мод, отвечающих конечным комплексным нулям дисперсионной функции. Обозначим эти нули $\pm\eta_0$, причем за η_0 возьмем такой нуль, у которого $\mathrm{Re}\,\eta_0 > 0$. Нулю η_0 отвечает следующее решение:

$$\varphi_{\eta_0}(x, \mu) = \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big)\frac{E_0}{z_0}\,\frac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu},$$

$$e_{\eta_0}(x) = \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big)E_0.$$

Разложение решения по собственным функциям

Предположим, что дискретный спектр задачи состоит из трех точек: $\sigma_d = \{\eta_i = \infty, \eta_0, -\eta_0\}$. Так как по условию задачи ток через границу плазмы отсутствует, то точке $\eta_i = \infty$ отвечает тривиальное (тождественно равное нулю) решение. Точкам η_0 и $-\eta_0$ отвечают следующие два решения дискретного спектра:

$$h_{\eta_0}(x, \mu) = E_2 \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big)\frac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu},$$

$$e_{\eta_0}(x) = E_2 \exp\Big(-\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big)$$

и

$$h_{-\eta_0}(x, \mu) = E_1 \exp\Big(\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big)\frac{\eta_0\mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu},$$

$$e_{-\eta_0}(x) = E_1 \exp\Big(\frac{z_0 x}{\eta_0}\Big).$$

Эти решения естественно назвать плазменными модами. Они описывают плазменные волны, отраженные от границы и движущиеся к ней. После замены $\eta_0 = i\varepsilon z_0/k$, $\varepsilon = \nu/\omega_p$, приведем плазменные моды для электрического поля к виду распространяющихся волн

$$e_{-\eta_0}(x) = E_1 \exp\Big(-i\,\frac{kx}{\varepsilon}\Big), \quad e_{\eta_0}(x) = E_2 \exp\Big(i\,\frac{kx}{\varepsilon}\Big),$$

вторая из которых является отраженной от границы плазмы, а первая — движущейся к этой границе.

Чтобы найти связь между амплитудами E_1 и E_2, необходимо решить систему уравнений, состоящую из кинетического уравнения для функции распределения электронов и уравнения Максвелла для электрического поля вблизи поверхности. Будем решать эту систему методом Кейза [6].

Покажем, что задача системы уравнений (1) и (2) с граничными условиями (3)–(6) имеет решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристической системы

$$\begin{aligned} h(x, \mu) = {} & \frac{E_2}{z_0}\,\frac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}\exp\left(i\,\frac{kx}{\varepsilon}\right) \\ & + \frac{E_1}{z_0}\,\frac{\eta_0\mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}\exp\left(-i\,\frac{kx}{\varepsilon}\right) \\ & + \frac{1}{z_0}\int\limits_0^1 \exp\left(-z_0\,\frac{x}{\eta}\right)F(\eta, \mu)E(\eta)\,d\eta, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} e(x) = {} & E_2 \exp\left(i\,\frac{kx}{\varepsilon}\right) + E_1 \exp\left(-i\,\frac{kx}{\varepsilon}\right) \\ & + \int\limits_0^1 \exp\left(-z_0\,\frac{x}{\eta}\right)E(\eta)\,d\eta. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь E_1 задано, а E_2 — неизвестный коэффициент. Обе эти величины (амплитуды Дебая) отвечают дискретному спектру, $E(\eta)$ — неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра.

Граничное условие (3) и условие непротекания (4) приводят к одному условию

$$E_1 + E_2 + \int\limits_0^1 E(\eta)\,d\eta = 0. \tag{15}$$

Предположим, что электроны зеркально отражаются от границы плазмы. В этом случае будем решать уравнения (1) и (2) с граничными условиями (3)−(5). Решение этой граничной задачи ищем в виде разложений (13) и (14), в результате находим, что $E_2 = -E_1$. Это значит, что

$$R = |K|^2 = 1, \qquad \varphi = \arg K = \pi. \tag{16}$$

Это решение выглядит следующим образом:

$$h(x,\mu) = -\frac{2iE_1}{z_0(\mu^2k^2 + z_0^2\varepsilon^2)}\left[\mu\left(\eta_1^2k^2 + z_0^2\varepsilon^2\right)\sin\left(\frac{kx}{\varepsilon}\right)\right.$$
$$\left. + z_0\varepsilon k\left(\eta_1^2 - \mu^2\right)\cos\left(\frac{kx}{\varepsilon}\right)\right],$$
$$e(x) = -2E_1 i \sin\left(\frac{kx}{\varepsilon}\right).$$

Диффузное граничное условие

Предположим, что электроны отражаются полностью диффузно от границы плазмы. В этом случае будем решать уравнения (1) и (2) с граничными условиями (3), (4) и (6). Решение задачи также ищем в виде разложений (13) и (14).

Подставим разложение (13) в граничное условие (6). Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$-Az_0 + E_2\frac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + E_1\frac{\eta_0\mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}$$
$$+\int\limits_0^1 \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu}E(\eta)\,d\eta - 2\eta_1^2 z_0\frac{\lambda(\mu)E(\mu)}{\mu} = 0. \tag{17}$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int\limits_0^1 \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z}E(\eta)\,d\eta,$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \tag{18}$$

С помощью равенств для граничных значений $\lambda(z)$ и $N(z)$ сведем уравнение (17) к неоднородной краевой задаче Римана

$$\lambda^+(\mu)\left[N^+(\mu)+\varphi_1(\mu)\right] = \lambda^-(\mu)\left[N^-(\mu)+\varphi_1(\mu)\right], \quad 0<\mu<1.$$

Здесь

$$\varphi_1(\mu) = -Az_0 + E_2\frac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + E_1\frac{\eta_0\mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}.$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \qquad 0 < \mu < 1.$$

В данном случае индекс краевой задачи равен единице. Следовательно, каноническим решением однородной краевой задачи является функция

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i}{\tau - z}\,d\tau,$$

$$G(\tau) = \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)}.$$

Преобразуем неоднородную краевую задачу с помощью однородной к задаче определения аналитической функции о скачке

$$X^+(\mu)\left[N^+(\mu)+\varphi_1(\mu)\right] = X^-(\mu)\left[N^-(\mu)+\varphi_1(\mu)\right], \quad 0<\mu<1.$$

Общее решение задачи о скачке содержит две произвольные постоянные C_1, C_2:

$$N(z) = Az_0 - E_2\frac{\eta_0 z - \eta_1^2}{\eta_0 - z} - E_1\frac{\eta_0 z + \eta_1^2}{\eta_0 + z}$$
$$+\frac{1}{X(z)}\left[\frac{C_2}{z - \eta_0} + \frac{C_1}{z + \eta_0}\right]. \tag{19}$$

Устранив полюсы у решения (19), находим:

$$C_1 = -E_1(\eta_0^2 - \eta_1^2)X(-\eta_0),$$
$$C_2 = -E_2(\eta_0^2 - \eta_1^2)X(\eta_0). \tag{20}$$

Следовательно, равна нулю и его правая часть. Отсюда получаем, что

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{X(-\eta_0)}{X(\eta_0)}\,\frac{\eta_1\alpha^+ + \eta_0\alpha^-}{\eta_1\alpha^+ - \eta_0\alpha^-}. \tag{21}$$

Задача с диффузным граничным условием решена полностью.

Коэффициент отражения плазменной волны и сдвиг ее фазы

Из равенства (21) видно, что коэффициент отражения плазменной волны от границы вычисляется по формуле

$$R = R(\eta_0,\eta_1) = \left|A(\eta_0)\right|^2\left|S(\eta_0,\eta_1)\right|^2. \tag{22}$$

Здесь

$$A(\eta_0) = \frac{X(-\eta_0)}{X(\eta_0)} = -\exp\Big(V(-\eta_0) - V(\eta_0)\Big),$$

$$S = S(\eta_0,\eta_1) = \frac{\eta_0\alpha^- + \eta_1\alpha^+}{\eta_0\alpha^- - \eta_1\alpha^+} = \frac{\eta_0 + \eta_1\beta(\eta_1)}{\eta_0 - \eta_1\beta(\eta_1)},$$

где

$$\beta = \beta(\eta_1) = \frac{\alpha^+}{\alpha^-} = \frac{X(\eta_1) + X(-\eta_1)}{X(\eta_1) - X(-\eta_1)}$$
$$= \frac{\exp V(\eta_1) - \exp V(-\eta_1)}{\exp V(\eta_1) + \exp V(-\eta_1)}.$$

Сдвиг фазы отраженной волны определяется как разность аргументов амплитуд бегущей к границе и отраженной от нее волн

$$\varphi(\eta_0,\eta_1) = \arg E_2(\eta_0,\eta_1) - \arg E_1$$
$$= \arg A(\eta_0) + \arg S(\eta_0,\eta_1). \qquad (23)$$

В случае зеркального отражения электронов от границы ранее было найдено (16), что $R = 1$, $\varphi = \pi$. Этот результат физически очевиден: падающая на стенку волна не теряет энергию при зеркальном отражении электронов от границы, а ее фаза изменяется на 180°.

Отметим, что формулы (22) и (23) непрерывно переходят в формулы (16) в длинноволновом пределе, когда $k \to 0$. Это означает, что в длинноволновом пределе стирается различие в характере отражения волны между зеркальным и диффузным механизмами отражения электронов от границы плазмы.

Преобразуем формулы для вычисления $A(\eta_0)$ и $S(\eta_0,\eta_1)$ к виду, удобному для исследования. Имеем

$$\beta(\eta_1) = \frac{1-\exp a(\eta_1)}{1+\exp a(\eta_1)}, \qquad a(\eta_1) = V(-\eta_1) - V(\eta_1),$$

или

$$\beta(\eta_1) = \frac{\eta_1\big(1-\exp a_0(\eta_1)\big) + \big(1+\exp a_0(\eta_1)\big)}{\big(1-\exp a_0(\eta_1)\big) + \eta_1\big(1+\exp a_0(\eta_1)\big)},$$

$$a_0(\eta_1) = -\frac{\eta_1}{\pi i}\int_0^1 \frac{\ln G(\tau)d\tau}{\tau^2-\eta_1^2}.$$

Величина $S(\eta_0,\eta_1)$ может быть представлена в следующем виде:

$$S(\eta_0,\eta_1) = \frac{1+\eta_1\beta(\eta_1)/\eta_0}{1-\eta_1\beta(\eta_1)/\eta_0},$$

где

$$\beta(\eta_1) = \frac{\eta_1 + g(\eta_1)}{1+\eta_1 g(\eta_1)}, \quad g(\eta_1) = \frac{1+\exp a_0(\eta_1)}{1-\exp a_0(\eta_1)}.$$

Таким образом, получаем, что

$$A(\eta_0) = -\exp a(\eta_0), \quad a(\eta_0) = -\frac{\eta_0}{\pi i}\int_0^1 \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i}{\tau^2-\eta_0^2}\,d\tau,$$

следовательно

$$K(k,\varepsilon) = -\exp\big(a_0(\eta_0)\big)\frac{1+\eta_1\beta(\eta_1)/\eta_0}{1-\eta_1\beta(\eta_1)/\eta_0}.$$

Анализ решения

Рассмотрим дисперсионное уравнение $\lambda(i\varepsilon z_0/k) = 0$. При малых волновых числах k дисперсионное уравнение упрощается, и мы получаем $\gamma_0 = \omega_0/\omega_p = 0.3k^2$, $\gamma_1 = \omega_1/\omega_p = -\varepsilon/2$. Выразим основные параметры задачи через k и ε. В линейном приближении имеем

$$z_0 = \frac{1}{2} - i\,\frac{1+0.3k^2}{\varepsilon} = -i\,\frac{1+0.3k^2+0.5\varepsilon}{\varepsilon},$$
$$\eta_1^2 = -i\,\frac{\varepsilon}{3}\big(1+0.3k^2+i\,0.5\varepsilon\big),$$
$$\eta_0 = \frac{1+0.3k^2+i\,0.5\varepsilon}{k}.$$

Займемся линеаризацией формулы для K. Для этого заметим, что в пределе при $\varepsilon, k \to 0$ получаем $\lim\limits_{\varepsilon,k\to 0} G(\tau) = G_0(\tau)$. Здесь

$$G_0(\tau) = \frac{1+3\tau^2\big(\lambda_c(\tau)+i\pi\tau/2\big)}{1+3\tau^2\big(\lambda_c(\tau)-i\pi\tau/2\big)}$$
$$= \frac{1+3\tau^2\lambda_c^+(\tau)}{1+3\tau^2\lambda_c^-(\tau)} = \frac{\lambda_0^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)},$$

причем $\lambda_0^\pm(\tau) = 1+3\tau^2\lambda_c^\pm(\tau)$, $\lambda_0(z) = 1+3z^2\lambda_c(z)$.

Отметим, что функция $\lambda_0(z)$ имеет единственный нуль кратности два в бесконечно удаленной точке $z = \infty$.

Обозначим через $\theta(\tau) = \arg\lambda_0^+(\tau)$ — главное значение аргумента, фиксированное в нуле условием: $\theta(0) = 0$. Кроме того, заметим, что $|\lambda_0^+(\tau)| = |\lambda_0^-(\tau)|$, $\overline{\lambda_0^+(\tau)} = \lambda_0^-(\tau)$, поэтому

$$G_0(\tau) = \exp\big(2i\theta(\tau)\big), \quad \ln G_0(\tau) = 2i\theta(\tau).$$

Обозначим далее: $\xi(\tau) = \theta(\tau) - \pi$, $\lim\limits_{\varepsilon,k\to 0} V(z) = V_0(z)$. Нетрудно видеть, что

$$\xi(\tau) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\lambda_0(\tau)}{3\pi\tau^3}, \quad V_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi(\tau)\,d\tau}{\tau - z}.$$

Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$V_0(z) = \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z_2} + \ldots, \qquad z \to \infty,$$
$$V_1 = 0.816910, \qquad V_2 = 0.357143, \quad \ldots.$$

Заметим, что при больших $|\eta_0|$ (т.е. при малых k, ε) имеем

$$a(\eta_0) = -\frac{2\eta_0}{\pi}\int_0^1 \frac{\xi(\tau)\,d\tau}{\tau^2-\eta_0^2} \approx \frac{2}{\eta_0\pi}\int_0^1 \xi(\tau)\,d\tau = -\frac{2V_1}{\eta_0}.$$

Преобразуем формулу для $K = K(\eta_0,\eta_1)$. При малых η_1 интеграл $a_0(\eta_1)$ равен

$$a_0(\eta_1) = -\frac{2\eta_1}{\pi}\int_0^1 \frac{\ln G_0(\tau)}{\tau^2}\,d\tau = -2\eta_1 W_1,$$

$$W_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\theta(\tau)}{\tau^2}\,d\tau, \qquad W_1 = 0.417798.$$

В линейном приближении при $k, \varepsilon \to 0$ отсюда получаем: $g(\eta_1) = 1/\eta_1 W_1$, $\eta_1\beta(\eta_1) = 1/(1+W_1)$, следовательно

$$S(\eta_0, \eta_1) = \frac{1 + \left[(1+W_1)\eta_0\right]^{-1}}{1 - \left[(1+W_1)\eta_0\right]^{-1}} \approx 1 + \frac{2}{(1+W_1)\eta_0}.$$

Окончательно, для отношения амплитуд $K(\eta_0, \eta_1) = -\left[\exp a(\eta_0)\right] S(\eta_0, \eta_1)$ получаем следующее выражение:

$$K(k, \varepsilon) = -\exp\left(-\frac{2V_1}{\eta_0}\right)\left(1 + \frac{2}{(1+W_1)\eta_0}\right),$$

откуда в линейном приближении получаем

$$K_0(k) = -1 + 2\left(V_1 - \frac{1}{1+W_1}\right)k = -1 + 0.223182k. \qquad (24)$$

Заключение

Возвращаясь к размерным величинам в формуле (24), получаем

$$K_0(k) = -1 + 0.223182k\,\frac{v_F}{\omega_p}.$$

Зависимость $K = K(k, \varepsilon)$ от ε в линейном приближении по ε и по k, т.е. в выражении $K_0 = K_0(k)$, отсутствует. О точности линейного приближения (24) свидетельствует следующее равенство:

$$O(0.01, 0.001) = -2.5 \cdot 10^{-4} - i \cdot 2.52 \cdot 10^{-3},$$

где $O(k, \varepsilon) = [K(k, \varepsilon) - K_0(k)]/k$.

Модуль величины K при всех рассмотренных параметрах ε, k близок к единице. При этом $|\mathrm{Im}\,(K)| \ll |K|$. Поэтому величина $\mathrm{Im}\,(K)$ близка (а по сути совпадает) к $\arg(K) + \pi$. На рис. 1 изображена зависимость коэффициента отражения R от волнового числа волны Ленгмюра k. Кривые *1, 2* отвечают параметрам $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-3}$,

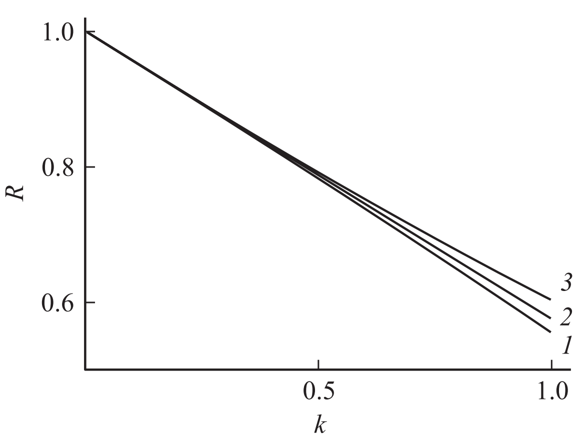

Рис. 1.

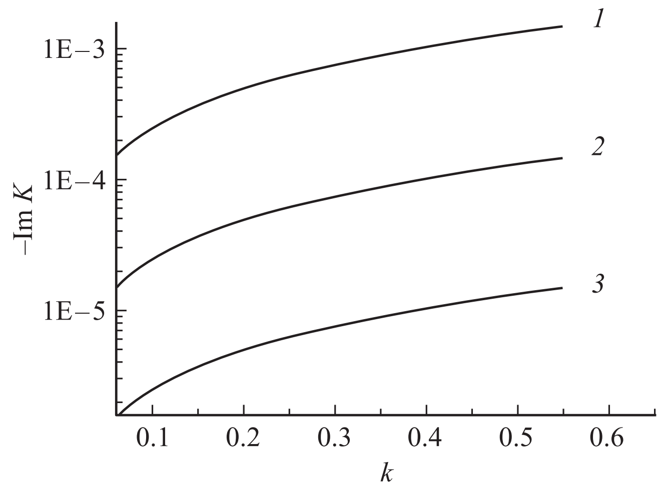

Рис. 2.

кривая *3* отвечает асимптотике $R_{\mathrm{as}}(k) = |K_0(k)|^2$. Отклонение коэффициента отражения от его асимптотики $R_{\mathrm{as}}(k)$ начинается при $k > 0.05$. На рис. 2 представлена зависимость величины $-\mathrm{Im}\,K$ от волнового числа волны Ленгмюра k; кривые *1–3* отвечают параметрам $\varepsilon = 10^{-2}$; 10^{-3}; 10^{-4}.

Итак, в настоящей работе впервые поставлена и аналитически решена задача об отражении плазменных волн от границы полупространства. Рассмотрены случаи зеркального и диффузного отражения электронов от границы плазмы. Исследован случай длинноволновой асимптотики, когда волновое число $k \to 0$.

Список литературы

[1] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1229.

[2] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 2006. № 1. С. 165.

[3] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1988. 424 с.

[4] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.

[5] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.

[6] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.