01

Базис Мейкснера в задаче дифракции на диске

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
173003 Великий Новгород, Россия
e-mail: tel@novsu.ac.ru; Theophy@novsu.ac.ru

(Поступило в Редакцию 24 июля 2006 г.)

Рассмотрено построение базиса для решения дифракционных задач на диске в осесимметричном случае. Впервые построена система функций со свойствами, удовлетворяющими известным условиям Мейкснера на ребре, допускающими аналитическое вычисление встречающихся интегралов и, наконец, обладающими свойством ортогональности в соответствующих гильбертовых пространствах. Развита теория интегральных уравнений дифракции на диске.

PACS: 02.30.Qz

Исходные уравнения

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля $\mathbf{E}^0(E_r^0, E_\varphi^0)$ на диске радиуса $\tilde{a}$. Под действием первичного поля на поверхности диска наводятся токи. Плотность токов $\mathbf{j}(j_\varphi, j_r)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений [1]. Если первичное поле является осесимметричным, не зависящим от φ, то система распадается на два независимых уравнения вида

$$\iint\limits_S M(r,\varphi,r',\varphi')j_\varphi(r')dS' = i\omega\varepsilon E_\varphi^0(r), \qquad (1)$$

$$\iint\limits_S N(r,\varphi,r',\varphi')j_r(r')dS' = i\omega\varepsilon E_r^0(r), \qquad (2)$$

где

$$M(r,\varphi,r',\varphi') = -k^2\cos(\varphi-\varphi')G,$$

$$N(r,\varphi,r'\varphi') = \frac{\partial^2 G}{\partial r\partial r'} - k^2\cos(\varphi-\varphi')G,$$

$$G = \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \quad R = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Интегральные уравнения (1) и (2) являются двумерными, а ток зависит от одной переменной, поэтому проведем интегрирование по переменной φ. Для этого используем представление функции Грина в цилиндрической системе координат [2]

$$G = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\exp\bigl(-in(\varphi-\varphi')\bigr)$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty} J_n(xr)J_n(xr')\,\frac{xdx}{\sqrt{x^2-k^2}}, \qquad (3)$$

где J_n — функции Бесселя. С учетом (3) из (1) и (2) получим уравнения вида

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{J_1(xa\tau)x}{\sqrt{x^2-1}}\int\limits_0^1 J_1(xat)j_\varphi(t)tdtdx = -\frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_\varphi^0(\tilde{a}\tau), \qquad (4)$$

$$\int\limits_0^{+\infty}(xa\tau)x\sqrt{x^2-1}\int\limits_0^1 J_1(xat)j_r(t)tdtdx = \frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_r^0(\tilde{a}\tau). \qquad (5)$$

Здесь a — электрический радиус диска. В резонансном диапазоне, когда радиус диска порядка длины волны, уравнения (4) и (5) решаются численными методами, например методом Галеркина.

Постановка проблемы

Для эффективного решения уравнения (4) необходимо иметь систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, каждая из которых удовлетворяет условию Мейкснера на ребре

$$\varphi_n(t) \approx \frac{c}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t\to 1 \qquad (6)$$

и допускает аналитическое вычисление интегралов вида

$$\int\limits_0^1 J_1(xt)\varphi_n(t)tdt \equiv \Phi_n(x). \qquad (7)$$

Иначе говоря, должны быть известны преобразования Ханкеля от базисных функций. А для решения уравнения (5) нужна система функций $\{\psi_n\}_{=1}^{+\infty}$, каждая из которых удовлетворяет условию Мейкснера на ребре

$$\psi_n(t) \approx c\sqrt{1-t^2}, \quad t\to 1$$

и допускает вычисление интегралов

$$\int\limits_0^1 J_1(xt)\psi_n(t)tdt \equiv \Psi_n(x). \qquad (8)$$

Построение базиса для азимутальных токов

Проблема построения базиса была частично решена в работе [3]. В этой работе предложены преобразования Ханкеля базисных функций в виде

$$\Phi_n(x) = j_{2n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots\ , \tag{9}$$

где $j_{2n-1}(x)$ — сферические функции Бесселя первого рода, которые связаны с функциями Бесселя формулой

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x). \tag{10}$$

Зная преобразование $\Phi_n(x)$ Ханкеля, можно восстановить саму функцию $\varphi_n(t)$. Преобразование Ханкеля допускает обращение [3]

$$\varphi_n(t) = \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)\Phi_n(x)x\,dx = \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)\,j_{2n-1}(x)x\,dx. \tag{11}$$

Интреграл (11) вычислим с помощью табличного интеграла [4]

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)J_{2n-\frac{1}{2}}(x)\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,P^{-1}_{2n-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right). \tag{12}$$

Здесь P^{-1}_{2n-1} — шаровые, сферические функции. Описание этих функций приводится ниже, в Приложении. Формула (12) позволяет находить необходимые функции. Приведем первые три базисные функции

$$\varphi_1(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\varphi_2(t) = \frac{t(-5t^2+4)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\varphi_3(t) = \frac{t(21t^4-28t^2+8)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Построение базиса для аксиальных токов

Вновь, следуя работе [3], задаем преобразования Ханкеля от базисных фунций в виде

$$\Psi_n(x) = \frac{j_{2n}(x)}{x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\ . \tag{13}$$

По преобразованиям Ханкеля восстанавливаем базисные функции

$$\psi_n(t) = \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)\Psi_n(x)x\,dx = \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)\,j_{2n}(x)\,dx. \tag{14}$$

Интеграл (14) вычислим с помощью табличного интеграла [4]

$$\psi_{n(t)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} J_1(tx)J_{2n-\frac{1}{2}}(x)\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,P^{-1}_{2n}\left(\sqrt{1-t^2}\right). \tag{15}$$

Формула (15) позволяет находить необходимые функции:

$$\psi_1(t) = \sqrt{1-t^2}\,t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{3}\,t(-7t^2+4),$$

$$\psi_3(t) = \sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{5}\,t(33t^4-36t^2+8).$$

Пространства токов

В уравнениях (4) и (5) выделим главные части и запишем их в виде

$$\frac{1}{a}Lj_\varphi + Mj_\varphi = -\frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E^0_\varphi(\tilde{a}\tau), \tag{16}$$

$$\frac{1}{a^3}Aj_r + Nj_r = \frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E^0_r(\tilde{a}\tau), \tag{17}$$

где

$$Lj_\varphi = \int\limits_0^{+\infty} J_1(x\tau)\int\limits_0^1 J_1(xt)j_\varphi(t)t\,dt\,dx, \tag{18}$$

$$Aj_r = \int\limits_0^{+\infty} J_1(x\tau)x^2\int\limits_0^1 J_1(xt)j_r(t)t\,dt\,dx, \tag{19}$$

$$Mj_\varphi = \int\limits_0^{+\infty} J_1(xa\tau)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)\int\limits_0^1 J_1(xat)j_\varphi(t)t\,dt\,dx,$$

$$Nj_r = \int\limits_0^{+\infty} J_1(xa\tau)\left(x\sqrt{x^2-1}-x^2\right)\int\limits_0^1 J_1(xat)j_r(t)t\,dt\,dx,$$

L и A — главные сингулярные операторы. Именно они будут определять функциональные пространства.

Введем в рассмотрение пространство $L_{2,t}[0,1]$, в котором скалярное произведение определяется по формуле

$$(u,v) = \int\limits_0^1 u(t)\overline{v(t)}t\,dt.$$

Операторы L и A являются положительными в силу соотношений

$$(Au,u) = \int\limits_0^{+\infty} \left|U(x)\right|^2 x^2\,dx, \tag{20}$$

$$(Lu, u) = \int\limits_0^{+\infty} \left|U(x)\right|^2 dx, \qquad (21)$$

где $U(x)$ — преобразование Ханкеля функции $u(t)$, т.е.

$$U(x) = \int\limits_0^1 J_1(xt)u(t)t dt.$$

Поэтому можно ввести энергетические пространства H_L и H_A положительных операторов L и A [5]. Скалярные произведения в этих пространствах определяются по формулам

$$[u, v]_L = (Lu, v), \quad [u, v]_A = (Au, v). \qquad (22)$$

Операторы M и N являются вполне непрерывными. Точнее, вполне непрерывными будут операторы $L^{-1}M$ и $A^{-1}N$ соответственно в энергетических пространствах H_L и H_A.

Ортогональность базисных функций

Установим ортогональность введенных базисных функций. Имеем

$$[\varphi_m, \varphi_n]_L = \int\limits_0^{+\infty} \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} j_{2m-1}(x) j_{2n-1}(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{J_{2m-\frac{1}{2}}(x)J_{2n-\frac{1}{2}}(x)}{x}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2(4n-1)}, & m = n. \end{cases} \qquad (23)$$

Последнее равенство здесь получено в результате вычисления табличного интеграла [4]. Аналогичным образом находим скалярное произведение функций ψ_n в пространстве H_A

$$[\psi_m, \psi_n]_A = \int\limits_0^{+\infty} \Psi_m(x)\Psi_n(x)x^2dx = \int\limits_0^{+\infty} j_{2m}(x) j_{2n}(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(x)J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2(4n+1)}, & m = n. \end{cases} \qquad (24)$$

На основании (23) и (24) произведем нормировку. В результате найдем ортонормированные базисы пространств J_L и H_A соответственно

$$\tilde{\varphi}_n = \sqrt{\frac{2(4n-1)}{\pi}}\,\varphi_n, \quad \tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2(4n+1)}{\pi}}\,\psi_n. \qquad (25)$$

В заключение заметим, что полнота введенных функций следует из полноты полиномов.

Сведение операторных уравнений к бесконечным системам

Разложим неизвестные функции по базисам

$$j_\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\tilde{\varphi}_n, \quad j_r = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\tilde{\psi}_n \qquad (26)$$

и сведем операторные уравнения (16) и (17) к бесконечным системам

$$\frac{1}{a}c_n + \sum_{m=1}^{+\infty}(M\tilde{\varphi}_m, \tilde{\varphi}_n) = e_n, \quad 1 \le n \le +\infty, \qquad (27)$$

$$\frac{1}{a^3}c_n + \sum_{m=1}^{+\infty}(N\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_n) = h_n, \quad 1 \le n \le +\infty, \qquad (28)$$

где

$$e_n = \left(-\frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0_\varphi, \tilde{\varphi}_n\right), \quad h_n = \left(\frac{2i}{a^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0_\varphi, \tilde{\psi}_n\right).$$

Бесконечные системы являются системами Фредгольма второго рода.

Приложение. Шаровые (сферические) функции

В интересующем нас случае шаровые функции выражаются через полиномы Лежандра по формуле [6]

$$P_v^{-1}\big(\cos(\varphi)\big) = -\frac{1}{v(v+1)}\frac{dP_v\big(\cos(\varphi)\big)}{d\varphi}.$$

На основе этой формулы найдем шаровые функции для частных случаев

$$P_1^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{t}{2},$$

$$P_2^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2},$$

$$P_3^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{8}t(-5t^2+4),$$

$$P_4^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{8}t\sqrt{1-t^2}(-7t^2+4),$$

$$P_5^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{16}t(21t^4-28t^2+8),$$

$$P_6^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{16}t\sqrt{1-t^2}(33t^4-36t^2+8).$$

Также приведем рекуррентное соотношение

$$(2n+1)\sqrt{1-t^2}P_n^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$=(n+2)P_{n+1}^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right) + (n-1)P_{n-1}^{-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right).$$

Список литературы

[1] *Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 96–100.
[2] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967.
[3] *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* // РиЭ. 1978. Т. 23. № 8. С. 1625–1630.
[4] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
[5] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
[6] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962.