01;03

Нелинейный анализ равновесной формы заряженной капли, вращающейся вокруг оси симметрии

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, П.В. Мокшеев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 сентября 2006 г.)

Из условия баланса давлений на свободной поверхности вращающейся заряженной капли электропроводной жидкости найдено аналитическое выражение для равновесной формы капли в квадратичном по малому параметру (отношению амплитуды деформации к радиусу исходной сферической формы) приближении. Выяснилось, что в линейном приближении по малому периметру форма капли совпадает со сплюснутым сфероидом, а в квадратичном приближении появляются отличия равновесной формы капли от сфероидальной.

PACS: 47.55.dd

Введение

Расчет равновесных форм вращающихся заряженных капель представляет интерес в связи с изучением процессов в грозовых облаках, воронках смерчей и в других заряженных жидко-капельных системах естественного и искусственного происхождения [1–4]. Знание равновесных форм капель в различных силовых полях необходимо для понимания физических закономерностей временнóй эволюции неустойчивых капель, механизмов реализации их неустойчивости и закономерностях распада при силовых воздействиях, а также для проведения аналитических асимптотических и численных расчетов нелинейных осцилляций подобных капель [4–7]. Так, в экспериментах [7], которые исследовали возбуждаемые акустическим полем осцилляции большой амплитуды капель, подвешенных в акустическом подвесе, оказалось, что осцилляции большой амплитуды весьма трудно возбудить вследствие появления на поверхности капли неосесимметричной бегущей волны, которая в итоге приводила к вращению капли как целого. Такой же эффект проявлялся и в экспериментах [8] со свободно висящими в условиях невесомости каплями, осцилляции которых генерировались акустическим полем. Причина появления вращения капель в экспериментах [7,8], согласно [5,6], заключается в реализации в каплях резонансного переноса энергии из осесимметричных мод в неосесимметричные. В [5,6] было высказано предположение, что существуют резонансы третьего порядка между $(2m+1)$ неосесимметричными модами, связанными с m-й осесимметричной модой. Возбуждение таких резонансов и может привести к вращению капли как целого при закачке энергии в осесимметричную моду. Проведение соответствующих аналитических асимптотических расчетов для исследования такого феномена требует знания равновесной формы вращающейся заряженной капли с точностью, не меньшей квадратичной по отношению амплитуды деформации к радиусу исходной сферической капли [9,10]. Следует также отметить, что в последние годы экспериментальные исследования нелинейных осцилляций вращающихся капель в бесконтактных подвесах различного типа как в земных условиях, так и в условиях невесомости привлекают к себе внимание исследователей в связи с проблемой получения высокочистых веществ и бесконтактного измерения физико-химических характеристик жидких веществ [11–15].

1. Постановка задачи

Пусть капля несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ, массовой плотностью ρ, несущая заряд Q, вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Зададимся целью во втором порядке малости по отношению амплитуды деформации исходной сферической формы капли, вызванной вращением, к радиусу R найти аналитическое выражение для равновесной в указанных условиях формы капли. Все рассмотрение проведем в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с каплей, в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром масс капли, а полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси вращения. Исходить будем из условия баланса давлений на свободной поверхности капли, как это делалось в подобных расчетах в [16,17]. Всю описанную систему, состоящую из вращающейся капли вместе с окружающим ее электрическим полем, будем считать замкнутой.

В силу очевидной осевой симметрии равновесной поверхности вращающейся капли, будем искать ее форму в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$r(\theta) = R + \xi^{(1)}(\theta) + \xi^{(2)}(\theta)$$

$$\equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} P_n(\mu);$$

$$(|\xi^{(1)}(\theta)|/R) \ll 1; \quad (|\xi^{(2)}(\theta)|/|\xi^{(1)}(\theta)|) \ll 1; \quad \mu \equiv \cos\theta; \tag{1}$$

полагая, что функции $\xi^{(1)}(\theta)$ и $\xi^{(2)}(\theta)$ являются поправками первого и второго порядков малости к исходной сферической (в отсутствие вращения) форме капли соответственно.

В используемой модели несжимаемой жидкости изменение равновесной формы не должно приводить к изменению объема капли. Замкнутость системы позволяет утверждать, что центр масс капли при ее вращении вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, не будет изменять своего положения в пространстве. В итоге потребуем, чтобы форма равновесной поверхности капли удовлетворяла условиям неизменности объема и неподвижности центра масс

$$\iiint_V dV = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} r^2 dr d\mu = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$\iiint_V \mathbf{r}\, dV = \int_{0}^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3 dr d\mu d\varphi = 0,$$

которые позволяют найти ограничения снизу на спектр мод, принимающих участие в формировании равновесной формы свободной поверхности капли. Во втором из выписанных соотношений (в условии неподвижности центра масс капли) распишем орт радиальной переменной в виде разложения по ортам прямолинейной декартовой системы координат

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_z + \sin\theta\cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi \mathbf{e}_y,$$

и, взяв проекции всего интегрального соотношения на орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, получим три интегральных соотношения, из которых первые два (содержащие $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$) будут равны нулю тождественно в силу правил интегрирования по азимутальному углу φ, а третье примет вид

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} \mathbf{e}_z \mu r^3 dr d\mu = 0.$$

Подставим в эти условия разложение (1) для $r(\theta)$ и, ограничиваясь учетом слагаемых первого порядка малости (т.е. сохраняя величины $\sim (|\xi^{(1)}(\theta)|/R)$ и отбрасывая величины большего порядка малости), придем к соотношениям

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-1}^{1} P_n(\mu) d\mu = 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-1}^{1} P_n(\mu) \mu d\mu = 0.$$

Из первого выписанного соотношения в силу ортогональности полиномов Лежандра следует, что амплитуды $A_0^{(1)} = 0$. Из второго интегрального соотношения и ортогональности полиномов Лежандра следует $A_1^{(1)} = 0$. В итоге в выражении (1) для поправки первого порядка малости к сферической поверхности суммирование начинается с индекса $n = 2$:

$$\xi^{(1)}(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} P_n(\mu). \tag{2}$$

Аналогичные расчеты, выполненные во втором порядке малости, позволяют определить амплитуды нулевой и первой мод второго порядка малости

$$A_0^{(2)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (A_n^{(1)})^2;$$

$$A_1^{(2)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} A_n^{(1)} A_{n+1}^{(1)}.$$

2. Сравнение порядков малости величины давления центробежных сил и амплитуды деформации свободной поверхности

В условиях равновесия на свободной поверхности капли выполняется условие баланса давлений

$$p - p_{\text{atm}} + p_\Omega + p_Q = p_\sigma, \tag{3}$$

которое и определяет форму равновесной поверхности (форму капли). В (3) p — давление жидкости внутри капли; p_{atm} — атмосферное давление; p_Ω — давление центробежных сил; p_Q — давление электростатического поля собственного заряда капли; p_σ — давление сил поверхностного натяжения.

В отсутствие вращения все действующие на каплю силы обладают центральной симметрией, и равновесная форма капля является сферической. Вращение капли относительно оси, проходящей через центр масс, приводит к появлению давления осесимметричных центробежных сил p_Ω на поверхность капли и к искажению ее формы, которая из центрально симметричной становится осесимметричной. Примем, что угловая скорость вращения невелика и давление центробежных сил по сравнению с давлением сил поверхностного натяжения на невозмущенную сферическую поверхность капли (которое в естественных для решаемой задачи безразмерных переменных при $R = \rho = \sigma = 1$ определяет масштаб измерения давления), мало. Тогда в первом порядке малости амплитуда деформации капли под действием сил центробежного давления должна иметь такой же порядок малости, т. е.

$$|\xi^{(1)}| \sim p_\Omega.$$

В самом деле, изменение потенциальной энергии ΔU капли при малой деформации ее начальной сферической формы пропорционально квадрату амплитуды линейной деформации (см., например, [18], с. 361):

$$\Delta U \sim |\xi^{(1)}|^2 \sim |\xi^{(2)}|. \tag{4}$$

С другой стороны, изменение потенциальной энергии можно представить как работу сил давления по деформированию капли в виде интеграла

$$\Delta U = \int\limits_0^{\xi^{(1)}+\xi^{(2)}} (p - p_{\text{atm}} + p_\Omega + p_Q - p_\sigma) S(\xi) d(\xi). \tag{5}$$

Здесь $S(\xi)$ — площадь поверхности деформированной капли.

Представим входящие в это выражение давления в виде сумм давлений на поверхность невозмущенной (не вращающейся) капли, которые обозначим верхним индексом „0“, и поправок первого и второго порядков малости, возникших из-за наличия вращения

$$p \approx p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)}; \qquad p_\Omega \approx p_\Omega^{(1)} + p_\Omega^{(2)};$$

$$p_Q \approx p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} + p_Q^{(2)}; \quad p_\sigma \approx p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)} + p_\sigma^{(2)}. \tag{6}$$

Учтем также, что изменение площади поверхности капли из-за малой деформации $\xi^{(1)}(\theta) + \xi^{(2)}(\theta)$, согласно [18], начинается со слагаемых, пропорциональных квадрату амплитуды деформации

$$\Delta S \equiv S - S^{(0)} \equiv S - 4\pi R^2 \sim |\xi^{(1)}|^2 \sim |\xi^{(2)}|. \tag{7}$$

Подставим (6), (7) в (5) и во втором порядке малости получим

$$\Delta U = 4\pi R^2 \int^{\xi^{(1)}+\xi^{(2)}} (p^{(1)} + p_\Omega^{(1)} + p_Q^{(1)} - p_\sigma^{(1)}) d(\xi)$$

$$\approx 4\pi R^2 (p^{(1)} + p_\Omega^{(1)} + p_Q^{(1)} - p_\sigma^{(1)}) \xi^{(1)}, \tag{8}$$

где учтено, что

$$p_\Omega^{(0)} \equiv 0; \quad p^{(0)} - p_{\text{atm}} + p_Q^{(0)} - p_\sigma^{(0)} \equiv 0.$$

Сравнив (8) с (4), несложно получить

$$(p^{(1)} + p_\Omega^{(1)} + p_Q^{(1)} - p_\sigma^{(1)}) \sim \xi^{(1)}. \tag{9}$$

Полученная оценка означает, что в первом порядке малости деформация свободной поверхности капли под действием центробежного давления имеет тот же порядок величины, что и само давление

$$\xi^{(1)} \sim p_\Omega^{(1)},$$

поскольку остальные величины в (9) — $p^{(1)}$, $p_Q^{(1)}$, $p_\sigma^{(1)}$ — пропорциональны значению деформации поверхности [18,19]. Повторив проведенные расчеты в следующем порядке малости, несложно показать, что

$$(p^{(2)} + p_\Omega^{(2)} + p_Q^{(2)} - p_\sigma^{(2)}) \sim (\xi^{(1)})^2 \sim \xi^{(2)}.$$

В итоге выражения для давлений на поверхность капли запишем в виде асимптотических разложений

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \mathrm{O}(\xi^{(3)});$$

$$p_\sigma = p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)} + p_\sigma^{(2)} + \mathrm{O}(\xi^{(3)});$$

$$p_Q = p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} + p_Q^{(2)} + \mathrm{O}(\xi^{(3)});$$

$$p_\Omega = p_\Omega^{(1)} + p_\Omega^{(2)} + \mathrm{O}(\xi^{(3)}). \tag{10}$$

3. Определение компонент давлений различных порядков малости на поверхность капли

Подставив разложения (10) в уравнение баланса давлений (3) и собрав вместе слагаемые одного порядка малости, потребуем выполнения баланса давлений в каждом из порядков по отдельности. Нулевой порядок малости определит баланс давлений на свободной поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения. Балансы давлений первого и второго порядков малости позволят рассчитать амплитуды $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ в выражении (1) соответственно.

Получим отдельно для каждого из входящих в (3) давлений явные выражения в виде суперпозиции компонент нулевого и первого порядков малости.

3а. Давление сил поверхностного натяжения определяется через орт нормали $\mathbf{n}$ к поверхности (1) по известным формулам

$$p_\sigma = \sigma \,\mathrm{div}\, \mathbf{n}; \qquad \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|};$$

$$F(\theta) \equiv r(\theta) - R - \xi^{(1)}(\theta) - \xi^{(2)}(\theta) = 0.$$

Выражение для орта нормали к поверхности получается в виде

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \left[1 - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{\mathbf{e}_\theta}{R} \left[\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{\xi^{(1)}}{R} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right].$$

Тогда для давления сил поверхностного натяжения во втором порядке малости получается выражение

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}[2 + \Delta_\theta]\xi^{(1)} - \frac{\sigma}{R^2}[2 + \Delta_\theta]\xi^{(2)}$$

$$+ 2\frac{\sigma}{R^3}\xi^{(1)}[1 + \Delta_\theta]\xi^{(1)}.$$

Подставив в это выражение разложения по полиномам Лежандра для $\xi^{(1)}(\theta)$ и $\xi^{(2)}(\theta)$, окончательно получим

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_n^{(1)}P_n(\mu)$$
$$+ \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_n^{(2)}P_n(\mu)$$
$$- \frac{2\sigma}{R^3}(k^2+k-1)(A_k^{(1)})^2\sum_{k=0}^{\infty}K_{kkn}P_n(\mu);$$
$$K_{jnk} \equiv (C_{j0n0}^{k0})^2, \tag{11}$$

где C_{j0n0}^{k0} — коэффициенты Клебша–Гордана [20]. При выводе этого соотношения были использованы рекуррентные формулы для разложения произведения полиномов Лежандра $P_n(\mu)P_n(\mu)$ по $P_n(\mu)$, приведенные в „Приложении".

3b. Давление центробежных сил, как уже отмечалось выше, в первом порядке малости определяется на невозмущенной сферической поверхности капли. В расчетах второго порядка малости давление центробежных сил определится выражением [21]:

$$p_\Omega = \int_0^{r(\theta)\sin\theta}\rho\Omega^2 x\,dx \equiv \frac{\rho\Omega^2 r^2(\theta)\sin^2\theta}{2}$$
$$\equiv \frac{\rho\Omega^2(R+\xi^{(1)}+\xi^{(2)})^2}{3}\big(P_0(\mu)-P_2(\mu)\big).$$

Подставив в это выражение разложения по полиномам Лежандра для $\xi^{(1)}(\theta)$ и $\xi^{(2)}(\theta)$, во втором порядке малости получим

$$p_\Omega = \frac{R^2}{3}\rho\Omega^2\big[P_0(\mu)-P_2(\mu)\big]$$
$$- \frac{2}{3}R\rho\Omega^2\Bigg[\frac{A_2^{(1)}}{5}P_0(\mu) + \frac{9}{35}A_3^{(1)}P_1(\mu)$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\big(A_{n+2}^{(1)}K_{2(n+2)n} + (K_{2nn}-1)A_n^{(1)}$$
$$+ (1-\delta_{n2}-\delta_{n3})A_{n-2}^{(1)}K_{2(n-2)n}\big)P_n(\mu)\Bigg], \tag{12}$$

где δ_{nj} — символы Кронекера. При записи этого соотношения были использованы рекуррентные формулы для разложения произведения полиномов Лежандра $P_2(\mu)P_n(\mu)$ и $P_n(\mu)P_n(\mu)$ по $P_n(\mu)$, приведенные в „Приложении".

3c. Давление электрического поля собственного заряда на равновесную поверхность капли выражается через потенциал электрического поля φ:

$$p_Q = \frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi)^2. \tag{13}$$

Для отыскания явного вида p_Q необходимо решить краевую задачу для электростатического потенциала φ, состоящую из уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0;$$

условия убывания решения на бесконечности и условия эквипотенциальности поверхности капли

$$r\to\infty: \quad \varphi\to 0; \qquad r=r(\theta): \quad \varphi=\varphi_S;$$

а также условия неизменности заряда капли

$$2\pi\int_{-1}^{1}\frac{(\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi)}{(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{n})}r^2 d\mu = -4\pi Q,$$

где φ_S — потенциал поверхности электропроводной капли.

Подставив в сформулированную краевую задачу для отыскания потенциала φ асимптотическое разложение

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \mathrm{O}(\xi^{(2)}),$$

получим краевые задачи для определения каждой из составляющих φ.

Задача нулевого порядка малости имеет вид

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0;$$
$$r\to\infty: \quad \varphi^{(0)}\to 0; \qquad r=R: \quad \varphi^{(0)}=\varphi_S^{(0)};$$
$$r=R: \qquad \int_{-1}^{1}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}R^2 d\mu = -2Q. \tag{14}$$

Задача первого порядка малости запишется в виде

$$\Delta\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = 0;$$
$$r\to\infty: \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{r})\to 0;$$
$$r=R: \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) + R\frac{\partial\varphi^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial r}\xi(\theta) = \varphi_S^{(1)};$$
$$r=R: \quad \int_{-1}^{1}\Bigg[\frac{\partial\varphi^{(1)}}{dr} + \Bigg(2\frac{\partial\varphi^{(0)}}{dr}$$
$$+ R\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\Bigg)\xi^{(1)}(\theta)\Bigg]R^2 d\mu = 0. \tag{15}$$

Задача второго порядка малости запишется в виде

$$\Delta\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = 0;$$
$$r\to\infty: \qquad \varphi^{(2)}(\mathbf{r})\to 0;$$
$$r=R: \qquad \varphi^{(2)} + \xi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(2)}\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r}$$
$$+ \frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial r} = \varphi_S^{(2)};$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{R^2\left[\frac{\partial\varphi^{(2)}}{dr}+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{dr^2}+\xi^{(2)}\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{dr^2}+\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^3\varphi^{(0)}}{\partial r^3}\right]\right.$$
$$+2R\left[\xi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}+(\xi^{(1)})^2\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial r^2}+\xi^{(2)}\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r}\right]$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi^{(1)}(\theta)}{\partial\theta}+(\xi^{(1)})^2\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r}\right\}d\mu=0. \qquad (16)$$

Согласно (14)–(16), потенциалы $\varphi^{(j)}(\mathbf{r})$ являются убывающими на бесконечности решениям уравнений Лапласа в сферических координатах и, следовательно, их следует искать в виде:

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\mu);$$
$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{\infty}D_n r^{-(n+1)}P_n(\mu);$$
$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^{-(n+1)}P_n(\mu). \qquad (17)$$

Постоянные коэффициенты B_n, D_n и C_n в разложениях (17) определяются из граничных условий краевых задач (14)–(16). Решения задач (14)–(16) запишутся (с учетом рекуррентных соотношений приведенных в „Приложении“) в виде

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r})=\frac{Q}{r};\quad \varphi^{(1)}(\mathbf{r})=\frac{Q}{R}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}P_n(\mu);$$
$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r})=\frac{Q}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{A_n^{(2)}}{R}+2(A_n^{(1)})^2K_{2nn}\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\mu). \qquad (18)$$

Давление электростатического поля на поверхность капли (13) после подстановки в него асимптотического разложения для потенциала электрического поля и выражения для формы равновесной поверхности (2) может быть во втором порядке малости представлено в виде

$$p_Q\approx p_Q^{(0)}+p_Q^{(1)}+p_Q^{(2)}=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right)^2$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\left(\xi^{(1)}\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}+\frac{d\varphi^{(1)}}{dr}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{8\pi}\left\{2\xi^{(2)}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\right.$$
$$+(\xi^{(1)})^2\left(\left(\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\right)^2+\frac{d^3\varphi^{(0)}}{dr^3}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right)$$
$$+\left(\frac{d\varphi^{(1)}}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{d\varphi^{(1)}}{dr}\right)^2+2\frac{d\varphi^{(2)}}{dr}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}$$
$$\left.+2\xi^{(1)}\left(\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\frac{d\varphi^{(1)}}{dr}+\frac{d^2\varphi^{(1)}}{dr^2}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right)\right\}. \qquad (19)$$

Подставим в (19) выражения (18) для потенциалов $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$, $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$, $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ и для давления электрического поля окончательно получим

$$p_Q=\frac{Q^2}{8\pi R^4}\left[1+\frac{2}{R}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(1)}(n-1)P_n(\mu)\right.$$
$$\left.-13\sum_{n=0}^{\infty}(A_2^{(1)})^2K_{22n}P_n(\mu)-\frac{2}{R}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(2)}P_n(\mu)\right]. \qquad (20)$$

4. Расчет равновесной формы капли из баланса давлений

Коэффициенты $A_n^{(j)}$ в выражении для формы равновесной поверхности (2) вычислим, подставив полученные выражения для компонент давлений (11), (12), (20) в условие баланса давлений (3), приравняв слагаемые одинакового порядка малости и используя ортогональность полиномов Лежандра.

4 a. В нулевом порядке получим равенство, описывающее баланс давлений на поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения и позволяющее определить равновесное давление внутри капли

$$p^{(0)}=\frac{2\sigma}{R}-\frac{Q^2}{8\pi R^4}+p_{\text{atm}}.$$

4 b. Баланс давлений на поверхности капли, выписанный в первом порядке малости, имеет вид

$$p_\sigma^{(1)}=p^{(1)}+p_Q^{(1)}+p_\Omega.$$

После подстановки в него выражений (11), (12) и (20), получим

$$-\frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}\big(2-n(n+1)\big)A_n^{(1)}P_n(\mu)$$
$$=p^{(1)}P_0(\mu)+\frac{Q^2}{4\pi R^5}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(1)}(n-1)P_n(\mu)$$
$$+\frac{5}{6}\rho\Omega^2R^2P_0(\mu)-\frac{1}{3}\rho\Omega^2R^2P_2(\mu).$$

Собрав слагаемые при полиномах Лежандра одинакового порядка и приравняв каждую из таких сумм нулю в силу ортогональности функций $P_n(\mu)$, получим при $n=0$ поправку к давлению внутри капли, возникающую вследствие вращения

$$p^{(1)}=-5\rho\Omega^2R^2/6,$$

а при $n\geq 2$ — коэффициенты $A_n^{(1)}$ в разложении (3)

$$A_3^{(1)}=-\frac{4\pi}{3}\frac{\rho\Omega^2R^7}{(16\sigma R^3\pi-Q^2)};\quad A_n^{(1)}=0\ \ (\forall n>2).$$

Согласно полученным соотношениям, первый порядок малости имеет лишь коэффициент при полиноме

Лежандра $P_2(\mu)$, в то время как коэффициенты при всех остальных полиномах равны нулю. В результате равновесная форма поверхности капли в первом порядке малости запишется в виде

$$r(\theta) \approx R\left(1 - \frac{4\pi}{3}\,\frac{\rho\Omega^2R^6}{(16\sigma R^3\pi - Q^2)}P_2(\mu)\right). \qquad (21)$$

Из сравнения выражения (21) с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения сфероидальной поверхности, выписанного в сферических координатах

$$r_{\text{sph}} \approx R\big(1 - e^2P_2(\mu)/3\big) + \mathrm{O}(e^4),$$

следует, что равновесную форму поверхности заряженной капли, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω, можно считать сплюснутым сфероидом с точностью до слагаемых $\sim e^2$, эксцентриситет которого связан с зарядом капли и со скоростью вращения соотношением

$$e^2 = \frac{\rho\Omega^2R^3}{4\sigma(1-W)}, \qquad (22)$$

где $W \equiv Q^2/16\pi\sigma R^3$ — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость поверхности капли по отношению к собственному заряду (критическое для развития неустойчивости значение параметра W равно единице). Поскольку квадрат эксцентриситета пропорционален отношению давления центробежных сил, имеющему первый порядок малости, к давлению капиллярных сил под сферической поверхностью, имеющему нулевой порядок малости, то он согласно сказанному выше (разд. 2), имеет первый порядок малости и пропорционален величине деформации капли, т.е. $e^2 \sim A_2^{(1)} \sim \xi^{(1)} \sim p_\Omega^{(1)}$.

Из соотношения (22) видно, что как увеличение скорости вращения капли, так и увеличение заряда приводит к росту эксцентриситета, т.е. к увеличению сфероидальной деформации равновесной поверхности капли. Область применимости полученного выражения определяется условием

$$e^2 \equiv \frac{\rho\Omega^2R^3}{4\sigma(1-W)} \ll 1. \qquad (23)$$

Соотношение (23) накладывает ограничение на величины угловой скорости вращения, заряд и радиус капли, при которых форму заряженной вращающейся капли можно считать близкой к сплюснутому сфероиду. Поскольку в жидкокапельных аэродисперсных системах радиусы капель, как правило, не превышают десятков микрометров, то угловые скорости вращения, при которых условие (23) выполняется, могут достигать тысяч оборотов в секунду при любых достижимых в заряженных облаках естественного происхождения зарядах капли [22].

Согласно ранее проведенным исследованиям закономерностей реализации неустойчивости свободной поверхности капли в отсутствие вращения по отношению к собственному заряду [19,23], известно, что начальная стадия этой неустойчивости связана с деформацией изначально сферической капли к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду. В ситуации вращающейся заряженной капли можно ожидать, что развитие неустойчивости будет связано с деформацией ее поверхности к трехосному сфероиду, по схеме, описанной в [24,25].

4c. Во втором порядке малости имеем

$$p_\sigma^{(2)} = p_1^{(2)} + p_Q^{(2)} + p_\Omega^{(2)}.$$

Подставив сюда выражения для поправок второго порядка малости к давлениям, получим

$$-\frac{\sigma}{R^2}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}P_n(\mu) - \sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)A_n^{(2)}P_n(\mu)\right]$$

$$+\frac{2\sigma}{R^3}\left[(A_2^{(1)})^2\sum_{n=0}^{\infty}K_{22n}P_n(\mu) - 6(A_2^{(1)})^2\sum_{n=0}^{\infty}K_{2nn}P_n(\mu)\right]$$

$$= p_1^{(2)} - \frac{Q^2}{4\pi R^5}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}P_n(\mu) - \frac{13}{72}\frac{Q^2}{\pi R^4}e^4\sum_{n=0}^{\infty}K_{22n}P_n(\mu)$$

$$-\frac{2}{3}R\rho\Omega^2\left[\frac{A_2^{(1)}}{5}P_0(\mu) + \frac{9}{35}A_3^{(1)}P_1(\mu)\right.$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\big(A_{n+2}^{(1)}K_{2n+2n} + A_n^{(1)}(K_{2nn} - 1)$$

$$\left. + (1 - \delta_{n2} - \delta_{n3})A_{n-2}^{(1)}K_{2n-2n}\big)P_n(\mu)\right].$$

Воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра и найдем, приравняв коэффициенты при полиномах Лежандра разных порядков при $P_0(\mu)$:

$$p_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{11}{72}\,\frac{Q^2}{\pi R^4} - \frac{8}{9}\,\frac{\sigma}{R}\right]e^4 + \frac{2}{45}\rho(R\Omega e)^2;$$

при $P_n(\mu)$, $n \geq 2$:

$$-\frac{\sigma}{R^2}\left[2A_n^{(2)} - n(n+1)A_n^{(2)}\right] - \frac{10\sigma}{R^3}(A_2^{(1)})^2K_{22n}$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi R^5}A_n^{(2)} - \frac{13}{72}\frac{Q^2}{\pi R^4}e^4K_{2nn}$$

$$-\frac{2}{3}R\rho\Omega^2\Big[A_{n+2}^{(1)}K_{2n+2n} + A_n^{(1)}(K_{2nn} - 1)$$

$$+ (1 - \delta_{n2} - \delta_{n3})A_{n-2}^{(1)}K_{2n-2n}\Big].$$

Так как $A_n^{(1)}$ отличны от нуля только при $n = 2$, то и в коэффициентах $A_n^{(2)}$ отличны от нуля только два коэффициента

$$A_2^{(2)} = \frac{\frac{5}{63}e^4R - \frac{13}{1008}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 - \frac{5}{42}\frac{R^4(\Omega e)^2\rho}{\sigma}}{1+W};$$

$$A_4^{(2)} = \frac{\frac{2}{7}e^4R - \frac{13}{280}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 + \frac{2}{35}\frac{R^4(\Omega e)^2\rho}{\sigma}}{9+2W}.$$

В итоге

$$\xi^{(2)}(\theta) = -\frac{R}{45}e^4 P_0(\mu) + \left[\frac{\frac{5}{63}e^4 R - \frac{13}{1008}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 - \frac{5}{42}\frac{R^4\Omega^2 e^2\rho}{\sigma}}{1+W}\right]P_2(\mu) + \left[\frac{\frac{2}{7}e^4 R - \frac{13}{280}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 + \frac{2}{35}\frac{R^4\Omega^2 e^2\rho}{\sigma}}{9+2W}\right]P_4(\mu).$$

Окончательный аналитический вид уравнения образующей вращающейся заряженной капли с сохранением слагаемых второго порядка малости

$$r(\theta) = \left[R - \frac{R}{45}e^4\right]P_0(\mu) + \left[-\frac{R}{3}e^2 + \frac{\frac{5}{63}e^4 R - \frac{13}{1008}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 - \frac{5}{42}\frac{R^4\Omega^2 e^2\rho}{\sigma}}{1+W}\right]P_2(\mu) + \left[\frac{\frac{2}{7}e^4 R - \frac{13}{280}\frac{Q^2}{\pi R^2\sigma}e^4 + \frac{2}{35}\frac{R^4(\Omega e)^2\rho}{\sigma}}{9+2W}\right]P_4(\mu).$$

Подставив в это выражение соотношения $W \equiv \equiv Q^3/16\pi\sigma R^3$; $e^2 \equiv \frac{\rho\Omega^2 R^3}{4\sigma(1-W)}$, получим

$$r(\theta) = R\left\{1 - \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) - \left[\frac{1}{45}P_0(\mu) + \frac{1}{63}\left(\frac{25-17W}{1+W}\right)P_2(\mu) - \frac{2}{35}\left[\frac{9-17W}{9+2W}\right]P_4(\mu)\right]e^4\right\}. \tag{24}$$

Сравнив (24) с разложением в ряд по эксцентриситету e^2 уравнения образующей сплюснутого сфероида, выписанного в сферических координатах с точностью до второго порядка малости по e^2

$$r(\theta) = R\left\{1 - \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) - \left[\frac{7}{180}P_0(\mu) + \frac{11}{63}P_2(\mu) - \frac{3}{35}P_4(\mu)\right]e^4\right\}, \tag{25}$$

приходим к выводу, что реальная форма вращающейся заряженной капли в приближении второго порядка малости амплитуде деформации сферической формы капли отличается от сплюснутой сфероидальной. На рис. 1 приведены формы образующей капли в нулевом, линейном и квадратичном приближениях. На рис. 2 приведены формы образующей капли в линейном и квадратичном приближениях, а также уравнение сплюснутого сфероида с тем же значением e^2. Несложно видеть, что реальная форма капли отличается от формы сплюснутого сфероида.

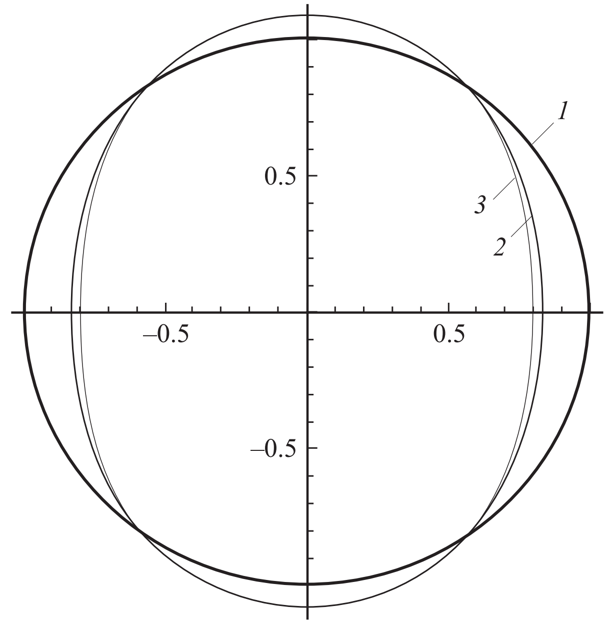

Рис. 1. Образующая равновесной формы капли: *1* — окружность, получающаяся в нулевом приближении по квадрату угловой скорости; *2* — сплюснутый вдоль оси вращения эллипс, получающийся в расчетах линейного приближения; *3* — результат расчета квадратичного приближения. Расчеты проведены при $W = 0.8$; $e^2 = 0.5$.

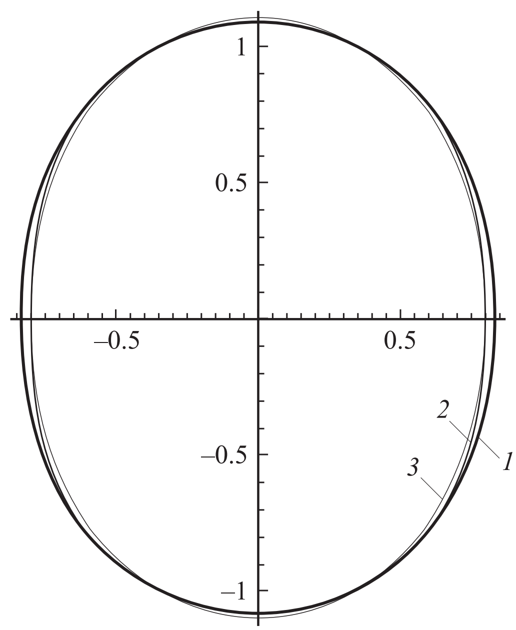

Рис. 2. Образующая равновесной формы капли: *1* — сплюснутый вдоль оси вращения эллипс, получающийся в расчетах линейного приближения; *2* — результат расчета квадратичного приближения; *3* — сплюснутый эллипс с таким же эксцентриситетом, какой получается в расчетах линейного приближения. Расчеты проведены при $W = 0.8$; $e^2 = 0.5$ (большое значение квадрата эксцентриситета выбрано для иллюстрации обсуждаемых зависимостей — при вдвое меньшем его значении кривые не различаются на толщине линии).

Заключение

Равновесная форма заряженной вращающейся капли в расчетах первого порядка малости может быть аппроксимирована сфероидом, сплюснутым вдоль оси вращения, с эксцентриситетом, величина которого определяется угловой скоростью вращения. Наличие у капли собственного заряда приводит к увеличению эксцентриситета. В расчетах второго порядка малости вращающуюся каплю уже нельзя считать сфероидальной.

Приложение

В соответствии с [20,26] выпишем рекуррентные соотношения для разложений произведений полиномов Лежандра между собой и произведений их первых производных по полярному углу по полиномам же Лежандра.

1. Разложение для $P_2(\mu)P_n(\mu)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\big(P_n(\mu)P_n(\mu)\big) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\Big\{K_{2n(n-2)}P_{n-2}(\mu) + K_{2nn}P_n(\mu) + K_{2n(n+2)}P_{n+2}(\mu)\Big\}, \tag{П.1}$$

где $K_{jnk}=(C^{k0}_{j0n0})^2$, а C^{k0}_{j0n0} — коэффициент Клебша–Гордана [20]; $|j-n|\le k\le j+n$; $j+k+n$ — четное.

Перепишем в несколько иной форме первую и третью суммы в (П.1), переходя от $P_{n\pm2}(\mu)$ к $P_n(\mu)$. В сумме $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}K_{2n(n-2)}P_{n-2}(\mu)$ сделаем замену $n-2=j$ и просуммируем по j, в итоге получим $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_{j+2}^{(1)}K_{2(j+2)}P_j(\mu)$. Сделаем еще одну замену $j=n$ и начнем суммирование с $n=2$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+2}^{(1)}K_{2(n+2)n}P_n(\mu) = \frac{1}{5}A_2^{(1)}P_0(\mu) + \frac{9}{35}A_3^{(1)}P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n+2}^{(1)}K_{2(n+2)n}P_n(\mu).$$

В сумме

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}K_{2n(n+2)}P_{n+2}(\mu)$$

сделаем замену $n+2=j$ и просуммируем по j, получим

$$\sum_{j=4}^{\infty} A_{j-2}^{(1)}K_{2(j-2)j}P_j(\mu).$$

Сделаем теперь замену $j=n$ и начнем суммирование с $n=2$, в итоге получим

$$\sum_{n=4}^{\infty} A_{n-2}^{(1)}K_{2(n-2)n}P_n(\mu) = \sum_{n=2}^{\infty}(1-\delta_{n2}-\delta_{n3})A_{n-2}^{(1)}K_{2(n-2)n}P_n(\mu),$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

В итоге вместо (П.1) в результате перемножения полиномов второй и n-й степени получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\big(P_2(\mu)P_n(\mu)\big) = \frac{1}{5}A_2^{(1)}P_0(\mu) + \frac{9}{35}A_3^{(1)}P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty}\big(A_{n+2}^{(1)}K_{2(n+2)n} + A_n^{(1)}K_{2nn} + (1-\delta_{n2}-\delta_{n3})A_{n-2}^{(1)}K_{2(n-2)n}\big)P_n(\mu).$$

2. Разложение для $P_n(\mu)P_n(\mu)$ получается в результате сходных рассуждений

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}P_n(\mu)A_n^{(1)}P_n(\mu) = \sum_{n=2}^{\infty}(A_n^{(1)})^2\big(P_n(\mu)P_n(\mu)\big) = \sum_{n=2}^{\infty}(A_n^{(1)})^2\sum_{k=0}^{\infty}K_{nnk}P_k(\mu) = \sum_{k=2}^{\infty}(A_k^{(1)})^2\sum_{n=0}^{\infty}K_{kkn}P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(A_k^{(1)})^2K_{kkn}P_n(\mu).$$

3. Разложение для произведения двух производных от полиномов Лежандра по полярному углу $\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\theta}\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\theta}$. Согласно [26], будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\theta}A_n^{(1)}\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\theta} = \sum_{n=2}^{\infty}(A_n^{(1)})^2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nnk}P_k(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(A_k^{(1)})^2\alpha_{kkn}P_n(\mu);$$

$$\alpha_{jnk} = -C^{k0}_{j0n0}C^{k0}_{j(-1)n1}\sqrt{j(j+1)n(n+1)}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Brown R.A., Scriven L.E.* // Proc. R. Soc. London, 1980. Vol. A371. P. 331–357.
[2] *Wang T.G., Trinch E., Croonquist A.P., Elleman D.D.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. N 5. P. 452–455.
[3] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 1985–1987.
[4] *Григорьев А.И., Григорьев О.А.* // ЭОМ. 1991. № 3. С. 41–44.
[5] *Natarajan R., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 183. P. 95–121.
[6] *Natarajan R., Brown R.A.* .// Proc. R. Soc. London, 1987. Vol. A410. P. 209–227.
[7] *Trinch E., Wang T.G.* // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 122. P. 315–338.
[8] *Jakobi N., Croonquist A.P., Elleman D.D., Wang T.G.* // Proc. 2^{nd} Int. Colloq. on Drop and Bubbles. Pasadena, 1982. JPL Publication N 82–7. P. 31.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–54.
[10] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 17–30.
[11] *Won-Kyu Rhim, Takehiko Ishikawa* // Rev. Sci. Instr. 1998. Vol. 69. N 10. P. 3628–3633.
[12] *Hisao Azuma, Shoichi Yoshihara* // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 393. P. 309–332.
[13] *Won-Kyu Rhim, Takehiko Ishikawa* // Rev. Sci. Instr. 2001. Vol. 72. N 9. P. 3572–3575.
[14] *Taric Al-Hassan, Mumford C.J., Jeffreys G.V.* // Chem. Ing. & Techn. 2004. Vol. 14. N 1. P. 65–72.
[15] *Saghal S.S., Rednikov A., Ohsaka K.* // Ann. N.Y. Acad. Sci. 2004. N 1027. P. 447–463.
[16] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
[17] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
[18] *Стретт Дж.В.* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехтеориздат, 1955. 475 с.
[19] *Hendrics C.D., Schneider J.M.* // J. Amer. Phys. 1963. Vol. 1. N 6. P. 450–453.
[20] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
[21] *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Л.–М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. 375 с.
[22] *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[23] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Вып. 7. С. 1272–1278.
[24] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
[25] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 48–51.
[26] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 20–26.