

01;03;04

Расчет параметров воздушной плазмы в канале МГД-генератора с неравновесной проводимостью, создаваемой электронным пучком

© Е.Г. Шейкин

Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета,
198904 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: egsh@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 30 мая 2006 г.)

Получены приближенные аналитические выражения для расчета концентрации электронов как в стационарной, так и в нестационарной плазме, создаваемой импульсным электронным пучком, хорошо согласующиеся с численными расчетами. Показано, что алгоритм расчета параметров неравновесной плазмы в канале МГД-генератора зависит от конфигурации последнего. Исследовано влияние величины магнитной индукции в канале фарадеевского МГД-генератора на концентрацию электронов и проводимость воздушной плазмы, создаваемую электронным пучком. Проанализировано влияние параметров потока и ионизатора на эффективность МГД-генератора с неравновесной проводимостью.

PACS: 52.65.Kj, 52.25.Jm

Введение

В настоящее время большой интерес проявляется к исследованию возможностей МГД-управления сверхзвуковыми воздушными потоками [1–8]. Рассматриваются возможности управления как внешними, так и внутренними течениями. При этом в большинстве возможных приложений газовая температура воздушного потока невысока и равновесная проводимость потока практически равна нулю. Для создания неравновесной проводимости потока, которая позволит реализовать МГД-управление холодным воздушным потоком, обычно в качестве ионизатора предлагается использовать электронный пучок [9,10], который характеризуется минимальными затратами энергии для создания требуемой степени ионизации потока. Важной характеристикой плазмы является концентрация электронов, определяющая проводимость плазмы и, следовательно, степень МГД-воздействия на поток. При проведении численных расчетов МГД-течений с неравновесной воздушной плазмой, создаваемой электронным пучком, концентрация электронов может рассчитываться путем численного решения системы уравнений баланса для концентрации заряженных частиц [11]. Для ускорения газодинамических расчетов течений с неравновесной проводимостью, создаваемой электронным пучком, в работе [12] предложены аппроксимирующие формулы для расчета степени ионизации неравновесной воздушной плазмы в отсутствие электрического и магнитного полей. Согласно работам [8,13], скрещенные поля в канале МГД-генератора оказывают существенное влияние на электронную температуру, степень ионизации потока и подвижность электронов. Это ограничивает диапазон применимости аппроксимирующих формул из работы [12] при расчете концентрации электронов воздушной плазмы, создаваемой пучком в МГД-канале случае малых полей.

В данной работе будут получены аналитические выражения для расчета концентрации электронов в неравновесной воздушной плазме, создаваемой электронным пучком, в канале МГД-генератора в широком диапазоне параметров потока, и величины магнитного и электрического полей. Будет проанализировано влияние параметров потока величины магнитного поля и характеристик ионизатора на проводимость воздушной плазмы и на эффективность МГД-генератора с неравновесной проводимостью потока.

Модель ионизации воздушного потока электронным пучком. Приближенные аналитические решения для расчета концентрации электронов

Аналогично работам [9,12,14] для описания ионизации потока воздуха электронным пучком, используется упрощенная модель воздушной плазмы, в состав которой входят нейтральные молекулы (азота и кислорода), электроны, положительные и отрицательные ионы. Концентрации названных плазменных компонент будем обозначать соответственно N_{N_2} , N_{O_2} , n_e , n_+ и n_- . Систему уравнений баланса для концентраций заряженных частиц запишем в следующем виде [9]

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} &= S(t) + k_d N_{O_2} n_- - v_a n_e - \beta_{ei} n_+ n_e, \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} &= S(t) - \beta_{ii} n_+ n_- - \beta_{ei} n_+ n_e, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} &= v_a n_e - k_d N_{O_2} n_- - \beta_{ii} n_+ n_e,\end{aligned}\quad (1)$$

где S — скорость образования электрон-ионных пар в результате воздействия на поток электронного

пучка; β_{ei} и β_{ii} — константы скоростей соответственно электрон-ионной диссоциативной рекомбинации и рекомбинации положительных и отрицательных ионов; $\nu_a = k_{a1}N_{O_2}^2 k_{a2}N_{O_2}N_{N_2}$ — частота прилипания электронов к молекулярному кислороду в процессах $e + O_2 + O_2 \rightarrow O_2^- + O_2$ и $e + O_2 + N_2 \rightarrow O_2^- + N_2$, характеризующихся константами скоростей прилипания электрона к молекулярному кислороду соответственно k_{a1} и k_{a2} ; k_d — константа скорости разрушения отрицательного иона с образованием свободного электрона в процессе $O_2 + O_2^- \rightarrow e + 2O_2$. В данной работе для указанных скоростей реакций используются следующие зависимости из [9,15]:

$$\begin{aligned}\beta_{ei} &= 2 \cdot 10^{-7} \sqrt{300/T_e} \text{ cm}^3/\text{s}, \\ \beta_{ii} &= 2 \cdot 10^{-7} \sqrt{300/T} [1 + 10^{-18}N(300/T)^2] \text{ cm}^3/\text{s}, \\ k_{a1} &= 1.4 \cdot 10^{-29} \left(\frac{300}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{600}{T}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{700(T_e - T)}{T_e T}\right) \text{ cm}^6/\text{s}, \\ k_{a2} &= 1.07 \cdot 10^{-31} \left(\frac{300}{T_e}\right)^2 \exp\left(-\frac{70}{T}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1500(T_e - T)}{T_e T}\right) \text{ cm}^6/\text{s}, \\ k_d &= 8.6 \cdot 10^{-10} \exp\left(-\frac{6030}{T}\right) \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1570}{T}\right)\right] \text{ cm}^3/\text{s}.\end{aligned}\quad (2)$$

В выражениях (2) приведены размерности констант скоростей; газовая T и электронная T_e температуры измеряются в градусах Кельвина, концентрация молекул в воздухе N измеряется в cm^{-3} .

Условия квазинейтральности плазмы $n_- + n_e = n_+$ позволяет упростить (1), сведя к системе из двух уравнений относительно концентраций положительных ионов и электронов

$$\begin{aligned}\frac{dn_e}{dt} &= S(t) + k_d N_{O_2} (n_+ - n_e) - \nu_a n_e - \beta_{ei} n_+ n_e, \\ \frac{dn_+}{dt} &= S(t) - \beta_{ii} n_+ (n_+ - n_e) - \beta_{ei} n_+ n_e.\end{aligned}\quad (3)$$

Скорость образования электрон-ионных пар S определяется соотношением $S = (j_b/e)\rho Y/W_i$, где j_b — плотность тока электронного пучка, ρ — плотность воздуха, W_i — цена ионизации, e — заряд электрона, Y — тормозная способность электронов, зависящая от энергии электронов E_b [16]. Цена ионизации для воздуха, согласно [17], равна 34. Параметр $q = (j_b/e)\rho Y(E_b)$ определяет энергию, теряемую электронным пучком в единичном объеме за единицу времени в результате неупругих и упругих столкновений с молекулами воздуха, и будет использоваться в

дальнейшем как основная характеристика ионизатора. В общем случае величина q может быть произвольной функцией времени. Введем значение скорости образования электрон-ионных пар, рассчитанное для некоторого характерного значения q_0 соотношением $S_0 = q_0/W_i$. Зависимость функции $S(t)$ определим через безразмерную функцию $F(t)$ соотношением $S(t) = S_0 F(t)$, где $F(t) = q(t)/q_0$. Преобразуем систему уравнений (3), введя безразмерные переменные $\eta_e = n_e/n_0$, $\eta_+ = n_+/n_0$ и $\xi = t/t_0$, где $n_0 = \sqrt{S_0/\beta_{ei}} \equiv \sqrt{q_0/(W_i \beta_{ei})}$, $t_0 = 1/(n_0 \beta_{ei}) \equiv \sqrt{W_i/q_0 \beta_{ei}}$. Система уравнений (3) в безразмерных переменных принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_e}{d\xi} &= F(\xi) - A\eta_e - \eta_+\eta_e + B\eta_+, \\ \frac{d\eta_+}{d\xi} &= F(\xi) - C\eta_+(\eta_+ - \eta_e) - \eta_+\eta_e,\end{aligned}\quad (4)$$

где $A = \frac{k_d N_{O_2} + \nu_a}{n_0 \beta_{ei}}$, $B = \frac{k_d N_{O_2}}{n_0 \beta_{ei}}$, $C = \frac{\beta_{ii}}{\beta_{ei}}$.

Результаты численного решения системы уравнений (4), полученные для источника ионизации с

$$F(\xi) = \theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0 \end{cases}$$

и начальными условиями $\eta_+(0) = \eta_e(0) = 0$ представлены на рис. 1 для двух значений концентрации молекул в воздухе. Из рис. 1 видно, что в рассмотренных условиях стационарное значение концентрации электронов и ионов достигается при $\xi > 3$, установившееся значение относительной концентрации η для ионов и электронов падает с ростом концентрации молекул воздуха N . Для электронов это падение в основном обусловлено возрастанием частоты прилипания ν_a , приводящим к увеличению коэффициента A в системе уравнений (4). Согласно рис. 1, b , относительная концентрация ионов слабо зависит от концентрации молекул в воздухе. Таким образом, процесс прилипания, приводящий к сильному снижению концентрации электронов при большом значении N , не очень сильно влияет на относительное значение концентрации ионов $\eta_+(\xi)$. Воспользуемся этим для того, чтобы получить приближенное решение для относительной концентрации электронов. Запишем второе уравнение из системы уравнений (4) в приближенной форме, используя равенство $\eta_e(\xi) = \eta_+(\xi)$, справедливое при отсутствии процессов прилипания. Первое уравнение в системе уравнений (4) оставим неизменным. Введенная таким образом система приближенных уравнений для приближенных зависимостей относительной концентрации электронов и ионов, которые будем обозначать соответственно $\eta_e^{Appr}(\xi)$ и $\eta_+^{Appr}(\xi)$, принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_e^{Appr}}{d\xi} &= \theta(\xi) - A\eta_e^{Appr} - \eta_+^{Appr} \eta_e^{Appr} + B\eta_+^{Appr}, \\ \frac{d\eta_+^{Appr}}{d\xi} &= \theta(\xi) - (\eta_+^{Appr})^2.\end{aligned}\quad (5)$$

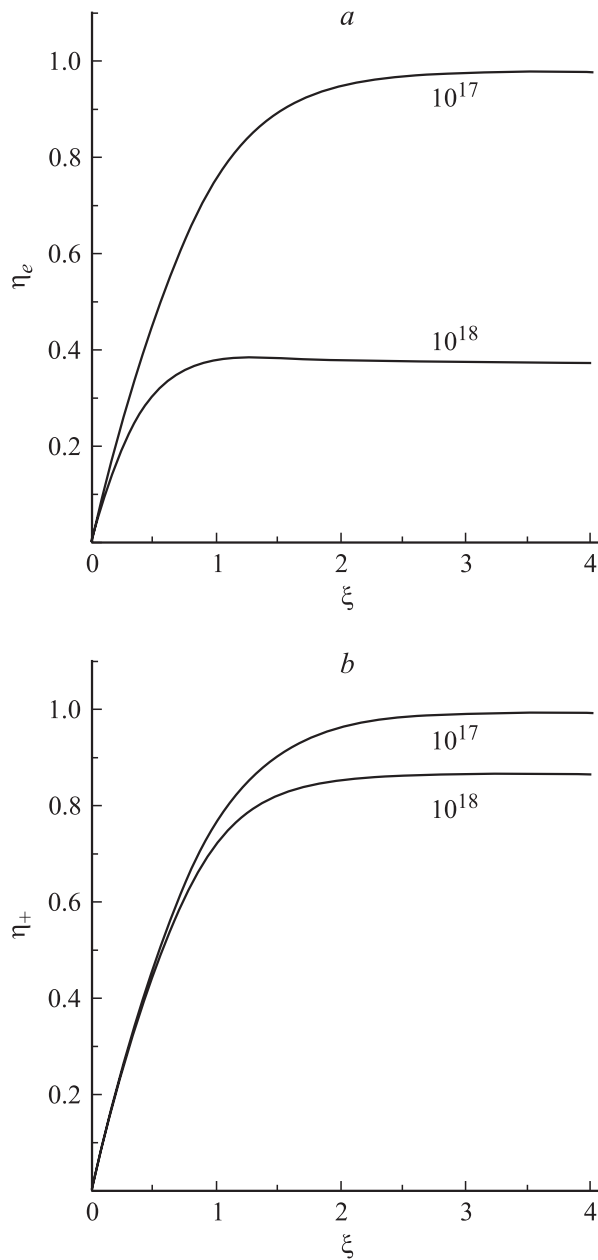


Рис. 1. Относительная концентрация заряженных частиц в воздушной плазме при $q = 0.1 \text{ W/cm}^3$, $T = T_e = 400 \text{ K}$, значения N в cm^{-3} указаны у кривых. a — электроны, b — положительные ионы.

Система уравнений (5) с начальными условиями $\eta_e^{Appr}(0) = 0, \eta_+^{Appr}(0) = 0$ имеет аналитическое решение, которое может быть записано в следующем виде:

$$\eta_+^{Appr}(\xi) = \text{th}(\xi),$$

$$\eta_e^{Appr} = \frac{1+B}{1+A} \text{th}(\xi) + \frac{2(A-B)(1 - \exp((1-A)\xi))}{(A^2-1)(1 + \exp(2\xi))}. \tag{6}$$

Так как $A > 0$, стационарное значение относительной концентрации электронов, достигающееся при $\xi \rightarrow \infty$, определяется соотношением $(1+B)/(1+A)$.

На рис. 2 проводится сравнение приближенного решения (6) для относительного значения концентрации электронов с результатом численного решения системы уравнений (4). При концентрации молекул воздуха $N = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, приближенное решение практически точно совпадает с численным. При $N = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ приближенное решение занижает значения величины относительной концентрации электронов в установившемся режиме. Отметим, что в рассматриваемом случае отличие точного и приближенного решений не превышает 5%. Таким образом, даже в ситуации, когда концентрации электронов и положительных ионов сильно отличаются, приближенная система уравнений (5) и полученное приближенное решение (6) могут быть использованы для расчета концентрации электронов.

Рассмотрим импульсный электронный пучок, характеризующийся функцией $F(\xi) = \theta(\xi)\theta(\xi_f - \xi)$, где ξ_f — относительная длительность импульса. Значения $\xi > \xi_f$ отвечают области распадающейся плазмы. Приближенная система уравнений для расчета относительной концентрации электронов и положительных ионов в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\eta_e^{Appr}}{d\xi} = \theta(\xi)\theta(\xi_f - \xi) - A\eta_e^{Appr} - \eta_+^{Appr}\eta_e^{Appr} + B\eta_+^{Appr},$$

$$\frac{d\eta_+^{Appr}}{d\xi} = \theta(\xi)\theta(\xi_f - \xi) - (\eta_+^{Appr})^2. \tag{7}$$

Нетрудно показать решение системы уравнений (7) для относительной концентрации ионов с начальными

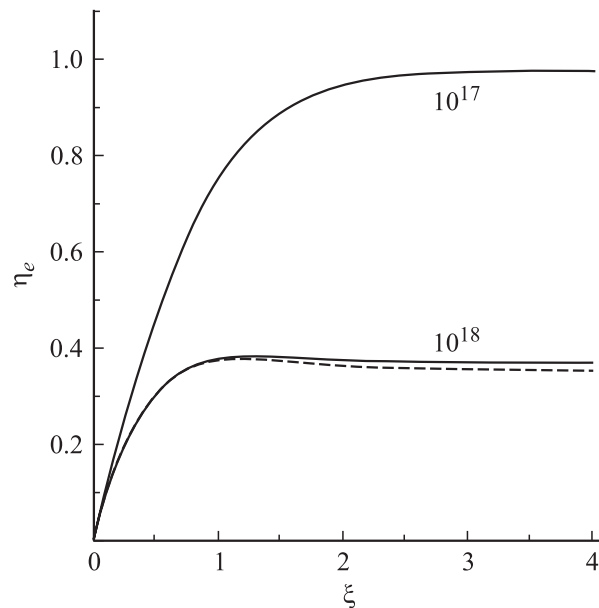


Рис. 2. Относительная концентрация электронов в воздушной плазме, параметры те же, что и для рис. 1. Сплошные кривые соответствуют численному решению, пунктир — расчет по (6).

условиями $\eta_+^{Appr}(0) = \eta_e^{Appr}(0) = 0$

$$\eta_+^{Appr} = \begin{cases} \text{th}(\xi), & 0 \leq \xi \leq \xi_f, \\ \text{th}(\xi_f)/(1 + (\xi - \xi_f)\text{th}(\xi_f)), & \xi > \xi_f. \end{cases}$$

Относительная концентрация электронов в диапазоне значений $0 \leq \xi \leq \xi_f$ описывается выражением (6) для η_e^{Appr} . При $\xi > \xi_f$ решение системы уравнений (7) для η_e^{Appr} может быть записано следующим образом:

$$\eta_e^{Appr} = \eta_e^{Appr}(\xi_f) \frac{\exp(-A(\xi - \xi_f))}{1 + (\xi - \xi_f)\text{th}(\xi_f)} + \frac{B \text{th}(\xi_f)(1 - \exp(A - (\xi - \xi_f)))}{A(1 + (\xi - \xi_f)\text{th}(\xi_f))}. \quad (8)$$

На рис. 3 проводится сравнение приближенной относительной концентрации электронов η_e^{Appr} , рассчитанной по формулам (6), (8), с результатами численного решения системы уравнений (4) для импульсного электронного пучка. Видно, что полученное приближенное аналитическое решение хорошо согласуется с результатами численного расчета и практически точно описывает динамику нарастания и спада электронной концентрации.

В стационарном случае, или при $\xi_f \gg 1$, для определения неравновесной проводимости однородного потока при расчете МГД-течений можно ограничиться расчетом установившегося значения электронной концентрации. Стационарные значения относительной концентрации электронов и ионов будем обозначать соответственно η_e^S и η_+^S , они могут быть найдены из системы уравнений (4)

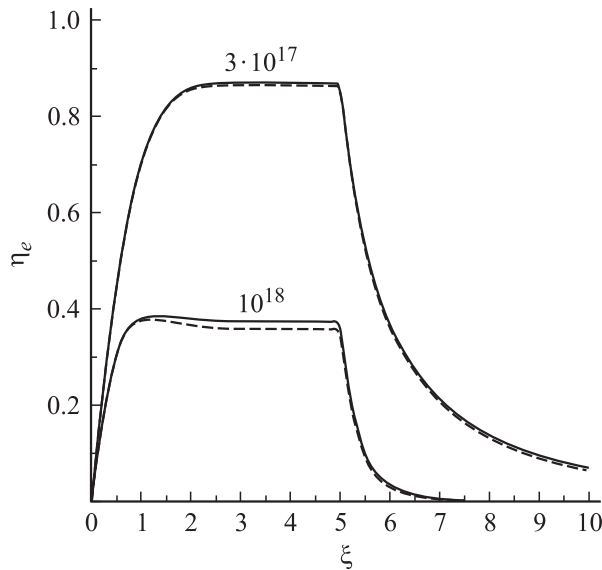


Рис. 3. Относительная концентрация электронов в воздушной плазме, создаваемая импульсным пучком электронов с длиной $\xi_f = 5$, параметры те же, что для рис. 1. Сплошные кривые соответствуют численному решению, пунктир — расчет по (6), (8).

в предположении, что $F(\xi) = 1$ и $d\eta_e/d\xi = d\eta_+/d\xi = 0$. В этом случае система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} A\eta_e^S + \eta_+^S \eta_e^S - B\eta_+^S &= 1, \\ C\eta_+^S(\eta_+^S - \eta_e^S) + \eta_+^S \eta_e^S &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) элементарным образом сводится к кубическому уравнению относительно η_e^S :

$$\begin{aligned} A(C - 1)(\eta_e^S)^3 - ((1 - A^2 + AB)C - AB)(\eta_e^S)^2 \\ - ((2A - B)C - B)\eta_e^S + C - B^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом относительная концентрация ионов η_+^S выражается через решение уравнения (10) следующим соотношением: $\eta_+^S = (1 - A\eta_e^S)/(\eta_e^S - B)$. Решение полученного кубического уравнения, естественно, не представляет никаких проблем. Единственная сложность заключается в том, что обычно данное уравнение имеет три действительных корня, и не всегда очевиден выбор правильного решения. В частности, при $N = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $q = 0.1 \text{ W/cm}^3$, $T_e = T = 400 \text{ K}$ уравнение (10) имеет два положительных корня: 0.375 и 0.868. Таким образом, чтобы сделать правильный выбор, необходимо рассчитать также и значения относительной концентрации ионов, соответствующие данным значениям η_e^S . При $\eta_e^S = 0.868$, в частности, получаем $\eta_+^S = -0.659$, что, очевидно, не является решением задачи. Поэтому единственным физически разумным решением является $\eta_e^S = 0.375$, которому соответствует значение $\eta_+^S = 0.87$.

В типичном случае использования МГД-систем для управления потоком концентрация электронов формируется пучком электронов, имеющим некоторое пространственное распределение плотности мощности q , выделяемой пучком в потоке, а параметры воздушного потока неоднородны в области создания неравновесной проводимости [18]. В стационарном случае, когда пространственный масштаб, на котором существенно изменяются параметры потока, заметно превышает значение $t_0 v$, где v — скорость потока, расчет концентрации электронов можно проводить с использованием локального приближения, определяя стационарные значения электронной концентрации в конкретной точке как функцию от значения q и параметров потока в данной точке. Максимально быстрый алгоритм для расчета концентрации электронов позволит существенно ускорить численные расчеты МГД-течений. Следовательно, актуальным является получение простого приближенного решения уравнения (10), которое позволит с высокой точностью рассчитывать концентрацию электронов в воздушной плазме.

Для нахождения приближенного решения уравнения (10) используем тот факт, что приближенное решение (6) для функции $\eta_e^{Appr}(\xi)$ хорошо описывает установившееся значение электронной концентрации. Поэтому в качестве нулевого приближения к решению уравнения (10) можно рассматривать выражение для

установившегося значения относительной электронной концентрации, получаемое из уравнения (6):

$$\eta_e^{S,0} = (1 + B)/(1 + A). \quad (11)$$

Согласно рис. 2, 3, данное приближение незначительно занижает значения электронной концентрации при высоких плотностях газа. Для нахождения более точного приближения представим относительную концентрацию электронов в следующем виде: $\eta_e^S = \eta_e^{S,0} + \delta_e$, полагая что $|\delta_e| \ll \eta_e^{S,0}$. Подставив данное выражение в уравнение (10) и, пренебрегая в получившемся уравнении членами разложения, пропорциональными δ_e^2 и δ_e^3 , приходим к линейному уравнению относительно δ_e , решение которого очевидно

$$\delta_e = \frac{(1 - AB)(A - B)(C - 1)}{(1 + A)[C(2A^2 + A + 2) + 3A + B(C - 1)(1 - 2A)]}. \quad (12a)$$

Оценки показывают, что в большинстве случаев при расчете δ_e коэффициентом B можно пренебречь, что слегка упрощает полученное выражение

$$\delta_e \approx \frac{A(C - 1)}{(1 + A)(C(2A^2 + A + 2) + 3A)}. \quad (12b)$$

На рис. 4 представлены зависимости концентрации электронов в воздушной плазме от плотности мощности q , выделяемой электронным пучком в потоке при $T_e = T$. Расчет проводился по формуле $n_e = n_0 \eta_e^S$. Точки на графике отвечают значению η_e^S , полученному из точного решения уравнения (10). Пунктир — использование в качестве η_e^S , нулевого приближения, задаваемого формулой (11). Для сплошных кривых используется приближение $\eta_e^S = \eta_e^{S,0} + \delta_e$, где δ_e рассчитывается по форму-

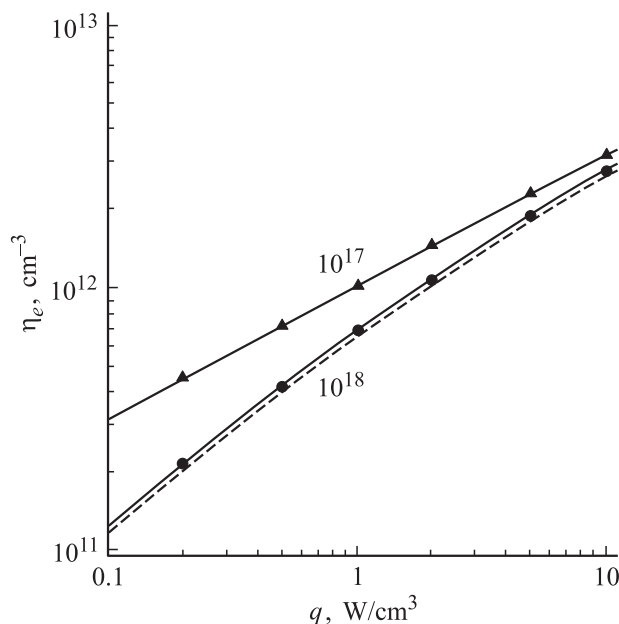


Рис. 4. Концентрация электронов в воздушной плазме при $T = T_e = 400$ К.

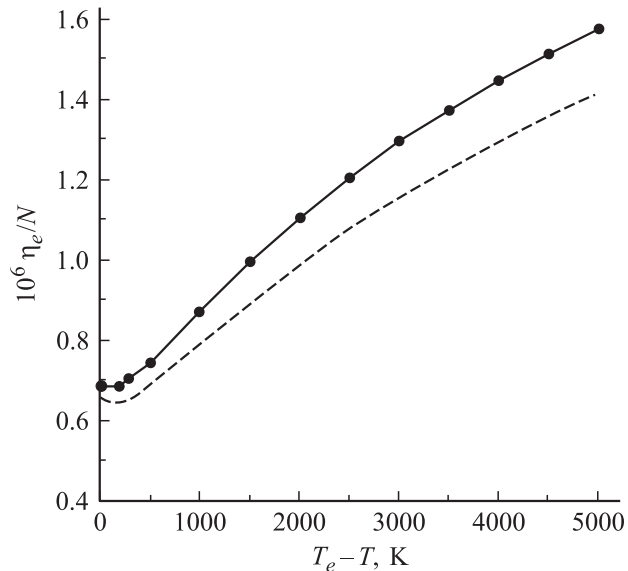


Рис. 5. Степень ионизации воздушной плазмы при значении параметров: $q = 1$ W/cm³, $T = 400$ К, $N = 10^{18}$ cm⁻³. Пунктир — нулевое приближение (11), сплошная кривая — более точное приближение (11) + (12b).

ле (12b). При $N = 10^{17}$ cm⁻³ оба приближенных решения практически совпадают с точным решением. При $N = 10^{18}$ cm⁻³ приближение $\eta_e^S = \eta_e^{S,0} + \delta_e$ практически совпадает с точным решением, нулевое же приближение дает заниженные значения концентрации электронов. Относительное отклонение при этом не превышает 5%. Увеличение электронной температуры, согласно рис. 5, приводит к повышению концентрации электронов. При этом относительная погрешность расчета концентрации электронов с использованием нулевого приближения возрастает до 10%, а более точное приближение в виде $\eta_e = \eta_e^{S,0} + \delta_e$ практически точно описывает концентрацию электронов. Таким образом, получено приближенное решение, которое в широком диапазоне изменения параметров как электронного пучка, так и потока, позволяет с высокой точностью рассчитывать концентрацию электронов в воздухе, создаваемую электронным пучком.

Расчет параметров воздушной плазмы в канале МГД-генератора с неравновесной проводимостью потока

Одна из основных характеристик плазмы, характеризующих процесс МГД-взаимодействия, это удельная проводимость σ , которая определяется соотношением $\sigma = e \mu_e \eta_e$, где μ_e — подвижность электронов. Поток плазмы в канале МГД-генератора проходит через скрещенные электрическое и магнитное поле. Очевидно, что данные поля оказывают влияние на функцию распреде-

ления электронов по энергиям $f(\varepsilon)$. В свою очередь изменение функции распределения, а следовательно и электронной температуры, приводит к изменению констант скоростей реакций процессов, определяющих концентрацию электронов плазмы, а следовательно к изменению концентрации электронов. Также изменение $f(\varepsilon)$ приведет к изменению подвижности электронов, которая, согласно [19], может быть представлена в следующем виде:

$$\mu_e = -\frac{e}{3N} \sqrt{\frac{2}{m_e}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_m(\varepsilon)} \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon,$$

где $q_m(\varepsilon)$ — транспортное сечение рассеяния электронов, m_e — масса электрона.

Известно, что функция распределения электронов в плазме, движущейся в скрещенных электрическом и магнитном полях, определяется не приведенным электрическим полем E/N , а параметром $(E'/N)\sqrt{1+\beta^2}$ [13,20], где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, β — параметр Холла. При изучении плазмы, движущейся в скрещенных полях, обычно вводится понятие эффективного поля: $E_{\text{эф}} = E'/\sqrt{1+\beta^2}$. Следовательно, можно сказать, что в скрещенных электрическом и магнитном полях подвижность электронов и электронная температура являются функцией приведенного эффективного поля $E_{\text{эф}}/N$.

Подвижность электронов, движущихся в азоте и воздухе в электрическом поле, представлены на рис. 6 как функции приведенного электрического поля. Эти зависимости получены из экспериментальных данных для дрейфовой скорости электронов $w_{dr}(E/N)$ из работы [19]. Для расчета подвижности использовалось очевидное соотношение $\mu_e = w_{dr}/E$. В скрещенных электрическом и магнитном полях, которые присутствуют в канале МГД-генератора, подвижность электронов является функцией приведенного эффективного поля. Следовательно, подвижность электронов в канале МГД-генератора можно рассчитать, используя известные зависимости $\mu_e(E/N)$, подставив в них в качестве аргумента приведенное эффективное поле $E_{\text{эф}}/N$ вместо электрического E/N . Необходимо отметить, что параметр Холла определяется через подвижность электронов соотношением $\beta = \mu_e B$ и, следовательно, также является функцией от приведенного эффективного поля. Так как эффективное поле $E_{\text{эф}} = E'/\sqrt{1+\beta^2}$, в свою очередь, зависит от параметра Холла, то задача определения параметров неравновесной плазмы МГД-генератора, в общем случае, носит самосогласованный характер.

Конфигурация электрического поля в канале МГД-генератора зависит от типа последнего и схемы коммутации электродов [21]. Следовательно, алгоритм расчета эффективного поля и параметров плазмы будет зависеть от типа МГД-генератора. Рассмотрим холловский и фарадеевский МГД-генераторы с секционированными электродами. Ограничимся рассмотрением одномерного

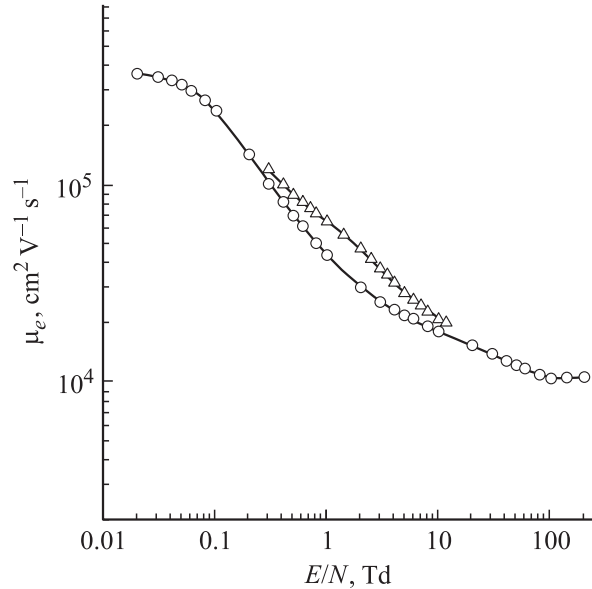


Рис. 6. Подвижность электронов в азоте (○) и воздухе (△) при $N = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $T = 293 \text{ K}$.

приближения, в котором все параметры задачи могут изменяться только в направлении движения потока. Рассматривается следующая ориентация векторов скорости и магнитной индукции: $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$. Для определения зависимости между магнитным и электрическим полями и токами в плазме используется обобщенный закон Ома [21]:

$$\mathbf{j} + \mu_e(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}', \quad (13)$$

где \mathbf{j} — плотность тока в МГД-канале. Рассматривается стационарный случай, следовательно:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (14)$$

Для рассматриваемого одномерного приближения уравнения (14) принимают следующий вид: $dj_x/dx = 0$, $dE_z/dx = 0$.

Вначале рассмотрим холловский МГД-генератор, для которого, согласно [21], электрическое поле и плотность электрического тока в плазме имеют следующие компоненты: $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ и $\mathbf{j} = (j_x, 0, j_z)$. В этом случае, используя уравнения (13), (14), получаем для плотности тока j_x

$$j_x = \frac{\sigma(E_x + \mu_e B_y^2 v_x)}{1 + (\mu_e B_y)^2}. \quad (15)$$

Для генераторного режима работы E_x принимает значение в диапазоне $[0, -\mu_e B_y^2 v_x]$. Компоненты вектора $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ для холловского МГД-генератора выглядят следующим образом:

$$E'_x = E_x, \quad E'_z = v_x B_y. \quad (16)$$

Эффективное поле в холловском МГД-генераторе с учетом (16) может быть записано в следующем виде:

$$E_{\text{эф}} = \sqrt{E_x^2 + (v_x B_y)^2} / \sqrt{1 + (\mu_e B_y)^2}. \quad (17a)$$

Согласно уравнениям (14), $j_x = \text{const} = j_x(0)$. Учитывая это, и принимая во внимание уравнение (15), нетрудно заметить, что E_x будет постоянной только в том случае, когда скорость потока и параметры плазмы не изменяются вдоль течения. Отметим, что подвижность электронов μ_e , входящая в (17а), зависит от приведенного значения эффективного поля. В том случае, когда параметры плазмы, а следовательно и E_x , не зависят от координаты x , уравнение (17а) может быть использовано для нахождения эффективного поля в холловском МГД-генераторе при заданном значении E_x , с помощью решения уравнения (17а):

$$(E_{\text{eff}}/N) = \frac{1}{N} \sqrt{E_x^2 + (v_x B_y)^2} / \sqrt{1 + (\mu_e (E_{\text{eff}}/N) B_y)^2}. \quad (17b)$$

В более сложной ситуации, когда параметры плазмы, а следовательно и E_x , зависят от координаты x , для нахождения эффективного поля необходимо использовать условие $j_x = \text{const} = j_x(0)$. При этом продольная плотность тока j_x задается уравнением (15), в которое подставляется продольная напряженность электрического поля E_x , выраженная через E_{eff} с помощью уравнения (17b). В результате уравнение для нахождения эффективного поля при заданном значении плотности тока $j_x(0)$ принимает вид

$$\frac{en_e \mu_e (E_{\text{eff}}/N) \left(\mu_e (E_{\text{eff}}/N) B_y^2 v_x - \sqrt{E_{\text{eff}}^2 (1 + (\mu_e (E_{\text{eff}}/N) B_y)^2) - (v_x B_y)^2} \right)}{1 + (\mu_e (E_{\text{eff}}/N) B_y)^2} = j_x(0). \quad (18)$$

Если зависимость электронной концентрации от координаты $n_e = n_e(x)$ известна, то уравнение (18) позволяет определить зависимости $E_{\text{eff}}(x)$, $\mu_e(x)$, а следовательно и $\beta(x)$.

Для фарадеевского МГД-генератора электрическое поле и плотность электрического тока, согласно [21], имеют следующие компоненты: $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ и $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$. Используя уравнения (13), (14), для фарадеевского МГД-генератора получаем

$$\begin{aligned} E_z &= \text{const}, \\ E_x &= -\mu_e B_y (E_z + v_x B_y), \\ j_z &= \sigma (E_z + v_x B_y). \end{aligned} \quad (19)$$

В одномерном приближении электрическое поле E_z обычно вводится с помощью безразмерного коэффициента нагрузки $k = -E_z / (v_x B_y)$, который для работы в режиме МГД-генератора принимает значения в диапазоне $[0, 1]$. Принимая во внимание уравнения (19), запишем компоненты вектора $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$E'_x = E_x = -\mu_e B_y (E_z + v_x B_y), \quad E'_z = E_z + v_x B_y.$$

В результате для эффективного поля в канале фарадеевского МГД-генератора получаем

$$\begin{aligned} E_{\text{eff}} &= \frac{\sqrt{E_z^2 + E_x^2}}{\sqrt{1 + (\mu_e B_y)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(E_z + v_x B_y)^2 + (\mu_e B_y)^2 (E_z + v_x B_y)^2}}{\sqrt{1 + (\mu_e B_y)^2}} \equiv E_z + v_x B_y. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что в отличие от рассмотренного ранее холловского МГД-генератора в фарадеевском эффективное поле не зависит от параметров плазмы. Следовательно, полученные результаты справедливы как для случая однородной плазмы, так и для плазмы, характеристики которой зависят от координаты x . При введении коэффициента нагрузки эффективное электрическое поле, определяемое формулой (20) может быть записано следующим образом: $E_{\text{eff}} = (1 - k)v_x B_y$.

В данной работе ограничимся исследованием параметров воздушной плазмы, создаваемой электронным пучком в фарадеевском МГД-генераторе. На рис. 7 представлены зависимости электронной температуры T_e и степени ионизации n_e/N воздушной плазмы в зависимости от величины магнитной индукции B . Так как в фарадеевском МГД-генераторе $E_{\text{eff}} = (1 - k)v_x B_y$, то приведенное эффективное поле E_{eff}/N пропорционально B . Значения электронной температуры, приведенной на рис. 7, оценивались из соотношения Эйнштейна $kT_e = eD_e/\mu_e$, где D_e — коэффициент диффузии электронов. Для расчета $D_e/\mu_e(E_{\text{eff}}/N)$ использовались экспериментальные зависимости $D_e/\mu_e(E/N)$ из работы [19]. Из рис. 7 следует, что увеличение магнитного

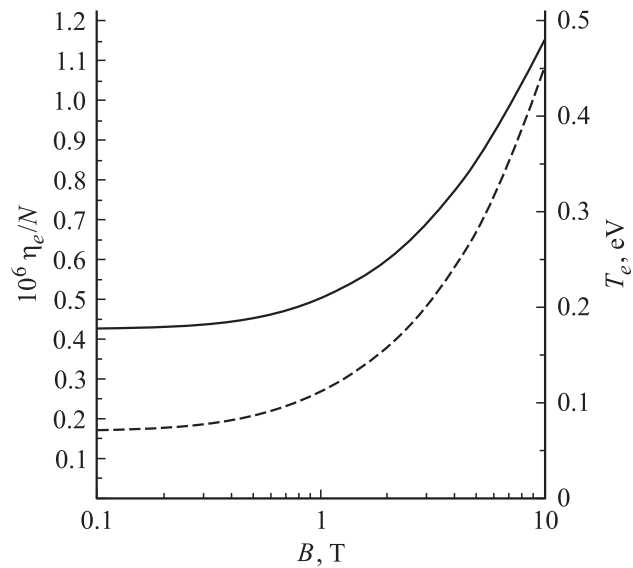


Рис. 7. Параметры воздушной плазмы в фарадеевском МГД-генераторе при: $q = 10 \text{ W/cm}^3$, $T = 400 \text{ K}$, $N = 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $v = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $k = 0.5$. Сплошная кривая — степень ионизации, пунктир — электронная температура.

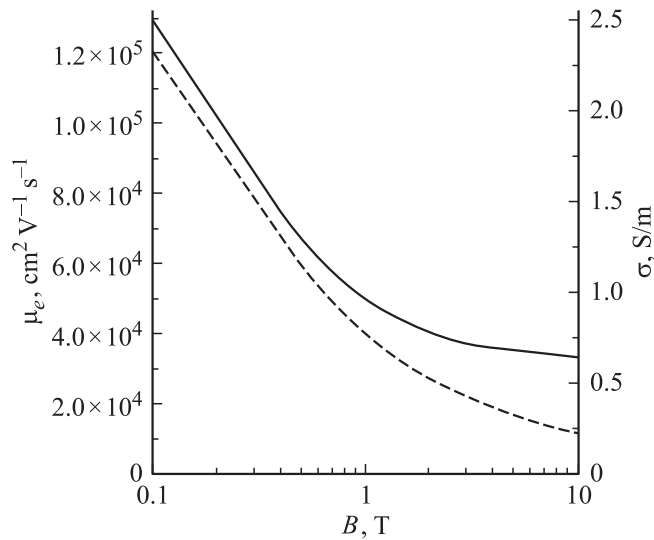


Рис. 8. То же, что и на рис. 7. Сплошная кривая — проводимость, пунктир — подвижность электронов.

поля, а следовательно и приведенного эффективного поля E_{eff}/N в канале МГД-генератора, приводит к увеличению электронной температуры. Это обеспечивает рост степени ионизации n_e/N при увеличении магнитной индукции. Согласно рис. 8, возрастание магнитной индукции в канале МГД-генератора приводит к снижению подвижности электронов, что в свою очередь приводит к уменьшению проводимости плазмы $\sigma = e\mu_e n_e$. Относительно более медленное снижение проводимости

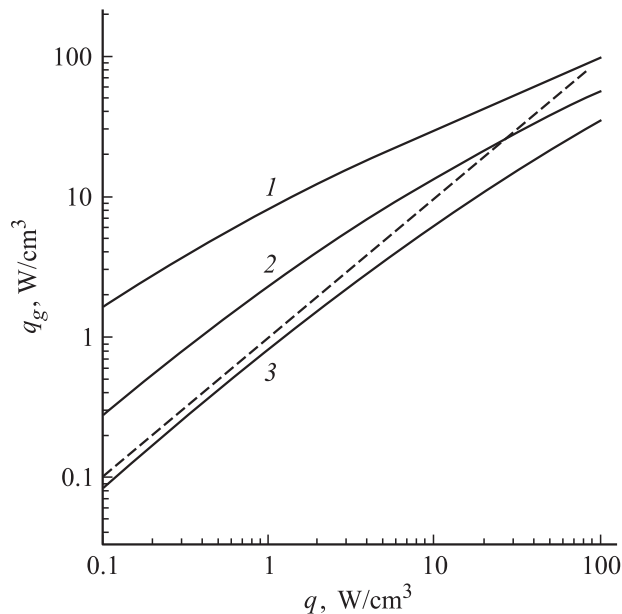


Рис. 9. Энергетические характеристики МГД-генератора с неравновесной проводимостью при: $T = 400 \text{ K}$, $v = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $B = 3 \text{ T}$, $k = 0.5$. Сплошные кривые отвечают разным значениям концентрации молекул воздуха. 1 — $N = 10^{18}$, 2 — $2 \cdot 10^{18}$, 3 — $3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

воздушной плазмы с увеличением магнитной индукции при $B > 1 \text{ T}$ обусловлено заметным ростом концентрации электронов (рис. 7), частично компенсирующим уменьшение подвижности электронов.

Для оценки эффективности МГД-генератора с неравновесной проводимостью проведены расчеты мощности, снимаемой с единицы объема МГД-генератора — $q_g = k(1 - k)\sigma B^2 v^2$, представленные на рис. 9, в зависимости от мощности q , теряемой электронным пучком в единице объема воздушного потока. Расчеты приведены для трех значений концентрации N . Видно, что q_g — монотонно возрастающая функция q . Увеличение концентрации N приводит к резкому снижению мощности, вырабатываемой МГД-генератором, в диапазоне малых значений параметра q . Это в основном обусловлено тем, что при увеличении N резко снижается концентрация электронов из-за прилипания к молекулам кислорода. Для наглядной оценки энергетической эффективности МГД-генератора на рис. 9 приведена пунктирная кривая, отвечающая зависимости $q_g = q$. Энергетически выгодный режим МГД-генератора с неравновесной проводимостью может быть реализован только в том случае, когда энергия, вырабатываемая МГД-генератором, превышает энергию, затраченную на ионизацию потока, т.е. при $q_g(q) > q$. Из рис. 9 следует, что существует некоторое критическое значение мощности $q = q_{cr}$, при котором мощность, теряемая электронным пучком в единице объема, равна мощности, снимаемой с единицы объема МГД-генератора, — $q_g(q_{cr}) = q_{cr}$, что соответствует на графике точке пересечения сплошной и пунктирной кривых. Из рис. 9 видно, что данное критическое значение мощности возрастает с уменьшением концентрации газа N . Согласно результатам, представленным на рис. 9, МГД-генератор вырабатывает больше энергии, чем затрачено на ионизацию потока, только при $q < q_{cr}$. При высоких плотностях газа, согласно рис. 9, возможны режимы, в которых энергия, вырабатываемая МГД-генератором, меньше энергии, вкладываемой в ионизацию потока, при всех значениях q . Так, в частности, для параметров, отвечающих условиям рис. 9, такая ситуация выполняется при $V > 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

Таким образом, расчеты показывают, что параметры воздушной плазмы в канале МГД-генератора существенно зависят от параметров потока, параметров ионизатора и магнитной системы. Эффективность МГД-генератора с неравновесной проводимостью потока сильно зависит как от концентрации воздушного потока, так и от характеристик ионизатора.

Заключение

В заключение перечислим основные результаты работы. В рамках упрощенной модели неравновесной воздушной плазмы, состоящей из нейтральных молекул, электронов, положительных и отрицательных ионов, получены приближенные аналитические выра-

жения для расчета концентрации электронов, поддерживаемой электронным пучком. Аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного расчета как в стационарной, так и в нестационарной плазме, создаваемой импульсным электронным пучком. Для расчета концентрации электронов в стационарном случае получено приближенное аналитическое выражение более высокого порядка точности, практически точно согласующееся с результатами численных расчетов в широком диапазоне изменения как параметров потока, так и величины магнитного и электрического полей. Проанализировано влияние конфигурации МГД-генератора на алгоритм расчета параметров неравновесной плазмы. Исследовано влияние величины магнитной индукции в канале фардеевского МГД-генератора на концентрацию электронов и проводимость воздушной плазмы, создаваемую электронным пучком. Показано что эффективность МГД-генератора с неравновесной проводимостью потока сильно зависит как от концентрации воздушного потока, так и от характеристик ионизатора.

Список литературы

- [1] *Фрайштадт В.Л., Куранов А.Л., Шейкин Е.Г.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 43–47.
- [2] *Головачев Ю.П., Сущих С.Ю.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 28–33.
- [3] *Васильева Р.В., Ерофеев А.В., Лапушкина Т.А.* и др. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 27–33.
- [4] *Korchenov V.I., Vaitzhin A.B., Gouskov O.V.* // AIAA Paper 99-4971. 9th Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, 1999.
- [5] *Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B.* // AIAA Paper 2001-0492, 39th AIAA Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2001.
- [6] *Adamovich I., Nishihara M.* // AIAA Paper 2006-1004. 44th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2006.
- [7] *Biturin V., Bocharov A., Baranov D.* // AIAA Paper 2006-1008. 44th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2006.
- [8] *Sheikin E.G., Kuranov A.L.* // AIAA Paper 2006-1372. 44th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2006.
- [9] *Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B.* // AIAA Paper 99-4800. 9th Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf., Norfolk, 1999.
- [10] *Kuranov A.L., Sheikin E.G.* // AIAA Paper 98-1642. 8th Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf., Norfolk, 1998.
- [11] *Shneider M.N., Macheret S.O., Miles R.B.* // AIAA Paper 2002-2251. 33rd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conf., Hawaii, 2002.
- [12] *Kuranov A.L., Sheikin E.G.* // J. of Spacecraft and Rockets. 2003. Vol. 40. N 2. P. 174–182.
- [13] *Soloviev V.R., Kristov V.M., Konchakov A.M., Malmuth A.M.* // AIAA Paper 2004-183. 42nd Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2004.
- [14] *Palm P., Plonjes E., Adamovich I.V., Rich J.W.* // AIAA Paper 2002-0637. 40th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2002.
- [15] *Kosyiy I.A., Kostinsky A.Yu., Matveyev A.A., Silakov V.P.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1992. Vol. 1. P. 207–220.
- [16] Тормозная способность электронов и позитронов, М.: Энергоатомиздат, 1987. С. 328 (ICRU Report 37. Stopping Powers for Electrons and Positrons. Int. Commission on radiation units and measurements, 7910 Woodmont av. Bethesda, Md. 20814, USA).
- [17] *Weiss J., Bernstein W.* // Phys. Rev. 1955. Vol. 98. N 6. P. 1828–1831.
- [18] *Sheikin E.G., Sukhomlinov V.S.* // AIAA Paper 2006-1369. 44th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit. Reno, 2006.
- [19] *Хаксли Л., Кромптон Р.* Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977. 672 с. (Huxley L.G.H., Crompton R.W. The diffusion and drift of electrons in gases, J. Willey & Sons, Inc., 1974).
- [20] *Смирнов Б.М.* Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1978. 416 с.
- [21] *Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П.* Сверхзвуковые МГД-генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.