01;03

Об осцилляциях заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, О.С. Крючков

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 сентября 2006 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных осцилляций сферической капли вязкой несжимаемой жидкости с конечной электропроводностью. Выяснилось, что электрические токи в заряженной капле, выравнивающие ее потенциал, приводят к возникновению течений жидкости, взаимодействующих как с потенциальными, так и с вихревыми полоидальными движениями жидкости в капле, порождаемыми осцилляциями капли. Учет конечности скорости выравнивания потенциала вдоль поверхности капли приводит к дополнительному затуханию капиллярных колебаний, происходящему из-за увеличения роли диссипации энергии.

PACS: 47.55.dd

Введение

Капиллярные колебания и устойчивость заряженных капель при различных физико-химических характеристиках жидкости неоднократно исследовались как экспериментально, так и теоретически в линейном и в нелинейных приближениях, поскольку сама проблема представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, [1–3] и указанную там литературу). Однако некоторые вопросы, связанные с указанной тематикой, до сих пор исследованы не полностью. Так, например, влияние на закономерности реализации устойчивых и неустойчивых движений жидкости в капле конечности скорости перераспределения заряда (конечности скорости выравнивания электрического потенциала) при осцилляциях капли для жидкости с конечной электропроводностью исследовано пока слабо, хотя эта тематика неоднократно становилась объектом внимания исследователей как для изолированной капли в вакууме [4], так и для вязкой проводящей капли в электропроводной вязкой среде [5], для капли, излучающей при осцилляциях электромагнитные волны [6], или при расчетах равновесных форм капель [7]. Причина сложившегося положения дел в некорректном использовании условия баланса электрического заряда на поверхности осциллирующей капли, которое механически переносилось с равновесной плоской поверхности (поверхности с нулевой средней кривизной), для которой и были сформулированы основополагающие идеи учета эффекта релаксации электрического заряда в жидкости [8], на криволинейную равновесную поверхность капли. Этот недостаток отмечен в [9], где и был проведен строгий вывод уравнения баланса заряда на произвольной криволинейной поверхности. В связи со сказанным и проведено настоящее рассмотрение.

Математическая формулировка задачи

Пусть сферическая капля вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью $\rho_1 \equiv \rho$, коэффициентами кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения α, удельной проводимостью $\sigma_1 \equiv \sigma$, диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$ обладает зарядом Q и помещена в среду с характеристиками $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\rho_2 \equiv 0$ (т.е. капля находится в вакууме). Уравнение границы раздела сред (свободной поверхности капли) в сферической системе координат с началом в центре капли запишем в виде $r = R + \xi(\vartheta, \varphi, t)$, где R — радиус невозмущенной капли, а $\xi(\vartheta, \varphi, t)$ — возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды $|\xi| \ll R$.

Для упрощения записи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\alpha = 1$. Тогда остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) выразятся в единицах своих характерных значений

$$r_* = R; \qquad t_* = \sqrt{\frac{R^3\rho}{\alpha}}; \qquad u_* = \frac{\alpha}{R};$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{R^3}\rho}; \qquad Q = \sqrt{R^3\alpha}; \qquad \nu_* = \sqrt{\frac{R\alpha}{\rho}}.$$

Система уравнений гидродинамики в электростатическом поле имеет вид [7,8]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu\Delta\mathbf{u}; \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}_1 = 4\pi\mu; \quad \operatorname{div}\mathbf{D}_2 = 0; \quad \mathbf{D}_j = \varepsilon\mathbf{E}_j; \quad \mathbf{E}_j = -\nabla\Phi_j, \quad (2)$$

$j = 1; 2$, индекс 1 относится к капле, а индекс 2 — к внешней среде; $\mu(\mathbf{r}, t)$ — объемная плотность электрического заряда; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей; $P_1(\mathbf{r}, t)$ —

давление внутри капли при наличии электрического поля.

На свободной поверхности капли $F(\mathbf{r},t) \equiv r - 1 - \xi(\vartheta,\varphi,t) = 0$ должны выполняться граничные условия кинематическое:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla F = 0; \tag{3}$$

динамическое для касательных компонент тензора напряжений:

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu\left[\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] = 0;$$

$$\Pi_\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_n E_\tau, \tag{4}$$

где E_n, E_τ — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к поверхности $F(\mathbf{r},t) \equiv r - 1 - \xi(\vartheta,\varphi,t) = 0$;
динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + P_E + P_\alpha = 0, \tag{5}$$

где P_2 — давление внешней среды; $P_E \equiv (E^2/8\pi)$ и $P_\alpha \equiv \alpha\cdot\operatorname{div}\mathbf{n}$ — давление на свободную поверхность капли электрических сил и сил поверхностного натяжения, условия скачка нормальной компоненты электрической индукции на заряженной границе раздела сред и непрерывности на ней электрического потенциала и касательных компонент напряженности электрического поля

$$r = 1 + \xi; \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\kappa; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \tag{6}$$

условие баланса поверхностной плотности заряда

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1) + 2u_r\kappa + \operatorname{div}_\Sigma\left[\kappa(u_\tau + bE_\tau)\boldsymbol{\tau}\right] = 0, \tag{7}$$

где $\kappa((\vartheta,\varphi,t)$ — поверхностная плотность электрического заряда; u_r — радиальная часть поля скорости; u_τ и E_τ — проекции поля скоростей и напряженности электрического поля на направление касательной к свободной поверхности капли; $\operatorname{div}_\Sigma$ — оператор поверхностной дивергенции.

Электрический потенциал поля свободного заряда капли должен удовлетворять условиям ограниченности на бесконечности и в центре капли

$$r \to \infty: \quad \Phi_2 \to 0; \qquad r \to 0: \quad \Phi_1 \to \text{const}. \tag{8}$$

Потребуем также, чтобы объем капли при осцилляциях сохранялся, а ее центр масс был неподвижен

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi, \qquad \int_V \mathbf{r}\,dV = 0. \tag{9}$$

Система уравнений (1), (2) с условиями (3)–(9) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

Равновесная форма

Для определения равновесной формы поверхности капли в отсутствие всякого движения жидкости и колебаний ее свободной поверхности достаточно положить $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \equiv 0$ и $\xi(\vartheta,\varphi,t) \equiv 0$. Тогда из системы уравнений (1) находится $P_1^0 = \text{const}$, где P_1^0 — значение P_1 для равновесной сферической поверхности капли; граничные условия (3), (4) обращаются в тождества, а из граничного условия (5) получается уравнение, определяющее равновесную сферическую форму капли

$$F(\mathbf{r},t) = r - 1 = 0; \quad \Delta P \equiv P_1^0 - P_2 = P_\alpha^0 - P_E^0, \tag{10}$$

где P_α^0 и P_E^0 — давление сил поверхностного натяжения и электрических сил на равновесную сферическую поверхность капли.

Линеаризация задачи

Решение задачи о капиллярных колебаниях капли проведем в линейном по полю скоростей $u(\mathbf{r},t)$ и возмущению поверхности $\xi(\vartheta,\varphi,t)$ приближении и с учетом (10). Давления P_1, P_E и P_α разложим в ряд по малым величинам u,ξ, ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости:

$$P_1 = P_1^0 + p_1 + \ldots, \qquad P_E = P_E^0 + p_E + \ldots,$$

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + p_\alpha + \ldots. \tag{11}$$

Здесь p_1, p_E и p_α — добавки к соответствующим давлениям, имеющие первый порядок малости.

В итоге система уравнений (1)–(9) в линейном приближении по малым величинам запишется в виде

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \nu\Delta\mathbf{u}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{12}$$

Граничные условия (4)–(6) в линейном приближении отнесем к невозмущенной поверхности капли $r = 1$. В результате получим

$$r = 1: \qquad \frac{\partial\xi(\vartheta,\varphi,t)}{\partial t} = u_r; \tag{13}$$

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu\left[\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] = 0. \tag{14}$$

Подставив разложения (11) в динамическое граничное условие (5), в линейном по малым величинам приближении найдем

$$r = 1: \quad -p_1 + 2\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} - p_E + p_\alpha = 0. \tag{15}$$

Условия (9) в первом порядке малости по ξ запишутся в виде

$$\int_\Omega \xi(\vartheta,\varphi,t)\,d\Omega = 0; \quad \int_\Omega \mathbf{e}_r\cdot\xi(\vartheta,\varphi,t)\,d\Omega = 0; \tag{16}$$

$d\Omega$ — элемент телесного угла.

Скаляризация задачи

Решение векторной краевой задачи (11)–(16) будем искать методом скаляризации [10,11], позволяющим наиболее наглядным образом представить поле скоростей течения жидкости в капле в виде суперпозиции потенциального, вихревого полоидального и вихревого тороидального течений. Иными словами, поле скоростей течения жидкости в капле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, имеющее первый порядок малости по $|\xi|$, представим в виде суммы трех ортогональных векторных полей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3(\mathbf{r}, t), \tag{17}$$

где $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, определяемые видом векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; $\hat{\mathbf{N}}_i$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\left(\hat{\mathbf{N}}_j^+, \hat{\mathbf{N}}_i\right) = 0, \qquad \text{при} \qquad i \neq j \tag{18}$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа Δ

$$\Delta \cdot \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \cdot \Delta, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Верхний индекс „плюс“ у оператора обозначает эрмитовое сопряжение. Векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ в сферической системе координат удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \qquad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{r} \equiv \nabla \times \mathbf{r};$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}); \tag{20}$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ \equiv -\nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ \equiv \mathbf{r} \times \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_3^+ \equiv (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla. \tag{21}$$

Операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ — эрмитово-сопряженные с операторами $\hat{\mathbf{N}}_j$; оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть течения, $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую тороидальную по отношению к оси OZ, $\hat{\mathbf{N}}_3$ — вихревую полоидальную компоненту течения жидкости в капле.

Подставив разложение (17) в уравнение (12), используя явный вид оператора $\hat{\mathbf{N}}_1$ и свойства коммутативности (19), несложно переписать (12) в виде

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{\mathbf{N}}_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta \right) \Psi_i + \delta_{i1} \cdot p_1 \right] = 0; \tag{22}$$

δ_{i1} — символ Кронекера. Умножив уравнение (22) слева последовательно на операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$, где $j = 1; 2 : 3$, и используя условия ортогональности (18), получим систему трех независимых уравнений

$$\left(\hat{\mathbf{N}}_i^+, \hat{\mathbf{N}}_i\right) \left\{ \delta_{i1} \cdot p_1 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - \nu\Delta\Psi_i \right\} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Так как векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ коммутируют с оператором Лапласа Δ, то и эрмитово-сопряженные им операторы $\hat{\mathbf{N}}_i^+$ коммутируют с ним, поскольку оператор Лапласа является самосопряженным оператором ($\Delta^+ \equiv \Delta$). Следовательно, условие коммутации справедливо и для операторов $(\hat{\mathbf{N}}_i^+, \hat{\mathbf{N}}_i)$ и Δ. Это, в свою очередь, означает, что указанные операторы обладают общей системой собственных функций, которую обозначим $\{\varphi_i\}$, тогда

$$\left(\hat{\mathbf{N}}_i^+, \hat{\mathbf{N}}_i\right)\varphi_j = n_j^i \varphi_j; \qquad \Delta\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \tag{24}$$

где n_j^i и λ_j — собственные значения операторов $(\hat{\mathbf{N}}_i^+, \hat{\mathbf{N}}_i)$ и Δ, соответствующие собственным функциям φ_j.

Воспользуемся тем, что произвольная функция, определенная в той же области пространства, что и $\{\varphi_i\}$, может быть разложена в ряд по полному набору собственных функций $\{\varphi_i\}$, и представим неизвестные функции $p_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$ в уравнениях (23) в виде разложений

$$p_1 = \sum_j A_j \cdot \varphi_j(\mathbf{r}, t); \quad \Psi_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j B_j^i \cdot \varphi_j(\mathbf{r}, t); \tag{25}$$

A_j и B_j^i — коэффициенты разложения. Суммирование ведется по всему набору собственных функций $\{\varphi_i\}$.

Подставив разложения (25) в (23) и учитывая соотношения (24), получим

$$\sum_j \left\{ A_j\delta_{i1} + B_j^i \frac{\partial}{\partial t} - \nu B_j^i \lambda_i \right\} n_j^i \varphi_j = 0.$$

Поскольку система собственных функций $\{\varphi_i\}$ ненулевая, то последнее равенство может выполняться лишь тогда, когда все собственные значения $n_k^i = 0$ либо когда все выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю. Поскольку тривиальный первый случай не соответствует физическому смыслу задачи, остается считать, что

$$n_j^i \neq 0; \quad \left\{ A_j \cdot \delta_{i1} + \frac{\partial}{\partial t} - \nu\lambda_j B_j^i \right\} = 0, \quad (\forall i, j). \tag{26}$$

Умножив (26) на соответствующую собственную функцию φ_j, просуммировав по всем j и учитывая выражения (24) и (25), получим систему трех скалярных уравнений в частных производных второго порядка для отыскания функции $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$:

$$\delta_{i1} \cdot p_1 + \frac{\partial}{\partial t}\Psi_i(\mathbf{r}, t) - \nu \cdot \Delta\Psi_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Подставим в условие несжимаемости жидкости (13) разложение (17), учтем явный вид оператора $\hat{\mathbf{N}}_1$ (20), а также тот факт, что $\hat{\mathbf{N}}_1^+ = -\hat{\mathbf{N}}_1$ (21), и используя условие ортогональности (18), получим

$$(\nabla \cdot \nabla)\Psi_1 \equiv \Delta\Psi_1 = 0. \tag{28}$$

Из (27) при $i = 1$ с учетом (28) найдем

$$p_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1(\mathbf{r}, t). \tag{29}$$

С учетом (29) система уравнений (27) представляется в виде

$$\Delta\Psi_i(\mathbf{r},t)-\frac{1}{\nu}(1-\delta_{i1})\frac{\partial\Psi_i(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0,\quad i=1,2,3. \quad (30)$$

Для скаляризации граничных условий (13)–(15) воспользуемся выражениями для компонент вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ в сферической системе координат через скалярные функции $\Psi_i(\mathbf{r},t)$, которые несложно выписать, используя (17) и (20). В итоге кинематическое условие (13) примет вид

$$r=1:\qquad \frac{\partial\xi(\vartheta,\varphi,t)}{\partial t}=\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}-\frac{1}{r}\Delta_\Omega\Psi_3. \quad (31)$$

Динамическое условие для касательных компонент тензора напряжений (14) даст два соотношения

$r=1,\ \boldsymbol{\tau}\equiv\mathbf{e}_\vartheta:$

$$(\Pi_{2\vartheta}-\Pi_{1\vartheta})-\nu\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_1}{r}\right)+\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}(2+\Delta_\Omega)\Psi_3\right\}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}-\Psi_2\right\}\right]=0; \quad (32)$$

$r=1,\ \boldsymbol{\tau}\equiv\mathbf{e}_\varphi:$

$$(\Pi_{2\varphi}-\Pi_{1\varphi})-\nu\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_1}{r}\right)+\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}(2+\Delta_\Omega)\Psi_3\right\}-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}-\frac{\Psi_2}{r}\right\}\right]=0, \quad (33)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений (15) и условия (16) примут вид

$$r=1:\qquad \left\{-p_1+2\nu\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2}-\Delta_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_3}{r}\right)\right)\right]-p_E+p_\alpha\right\}=0; \quad (34)$$

$$\int_\Omega\xi(\vartheta,\varphi,t)\cdot Y_0^0(\vartheta,\varphi)d\Omega=0;$$

$$\int_\Omega\xi(\vartheta,\varphi,t)\cdot Y_1^m(\vartheta,\varphi)d\Omega=0. \quad (35)$$

Решение системы скалярных краевых задач

Нахождение решения системы (28)–(30) можно рассматривать как исследование на устойчивость по Ляпунову равновесного тривиального решения исходной системы уравнений (1)–(9), имеющего вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0;\qquad \xi(\vartheta,\varphi,t)=0. \quad (36)$$

Из (36) следует, что начальное условие также является нулевым

$$t=0:\qquad \xi(\vartheta,\varphi)\equiv 0.$$

Зададим некоторое малое возмущение $\xi(\vartheta,\varphi,t=0)=\xi_0(\vartheta,\varphi)$. Решение (36) при этом также получит малое возмущение (т.е. $u(\mathbf{r},t)\neq 0$ и $\xi(\vartheta,\varphi,t)\neq 0$ и малы). Положим

$$\Psi_i(\mathbf{r},t)\sim\Psi_i^0(\mathbf{r})\cdot\exp(St);$$

$$\xi(\vartheta,\varphi,t)\sim\xi_0(\vartheta,\varphi)\cdot\exp(St). \quad (37)$$

Используя зависимости (37) в системе (29), (30), получим

$$\Delta\Psi_i^0(\mathbf{r})-\frac{1}{\nu}(1-\delta_{i1})S\cdot\Psi_i^0(\mathbf{r})=0,\quad i=1,2,3;$$

$$p_1=-S\cdot\Psi_1^0(\mathbf{r}). \quad (38)$$

Решения системы (38) имеют вид

$$\Psi_1^0(\mathbf{r})=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}^1 r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi); \quad (39)$$

$$\Psi_i^0(\mathbf{r})=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}^i i_l\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}r\right)Y_l^m(\Theta,\varphi),\quad i=2,3, \quad (40)$$

где $i_l(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя.

Функция $\xi_0(\vartheta,\varphi)$, описывающая возмущение поверхности капли, также может быть представлена в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi_0(\vartheta,\varphi)=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Z_{lm}Y_l^m(\vartheta,\varphi). \quad (41)$$

Границы изменения индекса l в выражениях (39)–(41) определяются условиями (35).

Решение краевой задачи для потенциалов

Система уравнений (2), (7), (8) позволяет сформулировать краевую задачу для потенциалов Φ_i:

$$\Delta\Phi_1=0;\qquad \Delta\Phi_2=0; \quad (42)$$

$$r = 0: \qquad \Phi_1 = \text{const};$$

$$r \to \infty: \qquad \Phi_2 \to 0;$$

$$r = 1 + \xi: \qquad \Phi_1 = \Phi_2; \tag{43}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) + 2\kappa u_r + \operatorname{div}_\Sigma\big[\kappa(u_\tau + bE_\tau)\boldsymbol{\tau}\big] = 0; \tag{44}$$

$$\kappa = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right).$$

Выше учтено, что объемная плотность заряда в капле $\mu = 0$, а перераспределение заряда при волновом искажении формы капли происходит за счет поверхностных токов.

Представим потенциалы Φ_i $(i = 1, 2)$ в виде разложений $\Phi_i = \Phi_i^0 + \delta\Phi_i$, где Φ_i^0 — потенциалы при равновесном состоянии системы, $\delta\Phi_i$ — добавки, вызванные возмущением равновесной формы поверхности капли и линейные по нему. Подставив эти разложения в уравнения (42), (43), выпишем отдельно краевые задачи для Φ_i^0 и $\delta\Phi_i$

$$r = 0: \qquad \Phi_1^0 = \text{const}; \quad \delta\Phi_1 \to 0; \tag{45}$$

$$r \to \infty: \qquad \Phi_2^0 \to 0; \quad \delta\Phi_2 \to 0; \tag{46}$$

$$r = 1: \quad \Phi_1^0 = \Phi_2^0; \quad \delta\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial r}\,\xi = \delta\Phi_2 + \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial r}\,\xi. \tag{47}$$

Для потенциалов Φ_i^0 получим

$$\Phi_1^0 = Q; \qquad \Phi_2^0 = Q/r.$$

Решения уравнений (42) для добавок $\Delta\Phi_i$, удовлетворяющие условиям (45), (46), естественно искать в виде

$$\delta\Phi_1 = \sum_{l,m} A_{lm}\cdot r^l \cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi)\cdot \exp(St);$$

$$\delta\Phi_2 = \sum_{l,m} B_{lm}\cdot r^{-(l+1)} \cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi)\cdot \exp(St). \tag{48}$$

Используя граничное условие (47), найдем первое уравнение, связывающее неизвестные константы A_{lm}, B_{lm} и Z_{lm}

$$A_{lm} = B_{lm} - QZ_{lm}. \tag{49}$$

Граничное условие (44) в первом порядке малости по u и ξ (с учетом (13), (37) и (41)) можно представить в виде

$$r = 1: \quad \sigma\,\frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} + \frac{Q}{4\pi}\,\Delta_\Omega\left(\Psi_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\Psi_3) - b\cdot\delta\Phi_1\right) + \frac{S}{4\pi}\left(\varepsilon\,\frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} - \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{\partial r} - 2\,\frac{Q}{r^3}\,\xi\right) + 2\,\frac{Q}{4\pi}\,S\xi = 0,$$

откуда получается второе условие для констант A_{lm}, B_{lm} и Z_{lm}:

$$\big(4\pi\sigma + (l+1)Qb + S\varepsilon\big) lA_{lm} + S(l+1)B_{lm} - Ql(l+1)\big[C_{lm}^1 + G_l(S,\nu)C_{lm}^3\big] = 0;$$

$$G_l(S,\nu) \equiv q\cdot i_{l+1}(q) + (l+1)\cdot i_l(q);$$

$$q \equiv \sqrt{S/\nu}. \tag{50}$$

Используя систему (49), (50), можно выразить коэффициенты A_{lm} и B_{lm} в (48) для $\delta\Phi_1$ и $\delta\Phi_2$ через коэффициенты Z_{lm} в разложении по сферическим функциям возмущения свободной поверхности $\xi(\vartheta,\varphi,t)$:

$$A_{lm} = -D_l Q\big[SZ_{lm} - l\big(C_{lm}^1 + G_l(S,\nu)C_{lm}^3\big)\big];$$

$$B_{lm} = Q\big[(1 - D_l S)Z_{lm} + lD_l\big(C_{lm}^1 + G_l(S,\nu)\big)C_{lm}^3\big];$$

$$D_l(\sigma,\varepsilon,S) \equiv \frac{l+1}{k\big[4\pi\sigma + (l+1)Qb + S\varepsilon\big] + (l+1)S}.$$

Используя полученные решения для потенциалов, выпишем нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля

$$r = 1 + \xi: \quad E_{1n} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1) \approx Q\sum_{l,m} lD_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\big] Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(St);$$

$$E_{2n} = (\mathbf{n},\mathbf{E}_2) \approx Q + Q\sum_{l,m}\Big[\big(l - 1 - (l+1)D_l S\big)Z_{lm} + l(l+1)D_l(\sigma,\varepsilon,S)\big[C_{lm}^1 + G(S,\nu)C_{lm}^3\big]\Big] Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(St);$$

$$E_{1\vartheta} = (\boldsymbol{\tau}_\vartheta,\mathbf{E}_1) \approx Q\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\big]\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\exp(St);$$

$$E_{2\vartheta} = (\boldsymbol{\tau}_\vartheta,\mathbf{E}_2) \approx Q\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\big]\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\exp(St);$$

$$E_{1\varphi} = (\boldsymbol{\tau}_\varphi,\mathbf{E}_1) \approx Q\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S)\big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\big]\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\exp(St);$$

$$E_{2\varphi} = (\boldsymbol{\tau}_\varphi,\mathbf{E}_2) \approx Q\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S)\big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\big]\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\exp(St). \tag{51}$$

Давление электрического поля на возмущенную поверхность капли имеет вид

$$P_E = -\mu\Phi_1 + \frac{1}{8\pi}\left[E_{2n}^2 - \varepsilon E_{1n}^2\right] + (\varepsilon+1)\,\frac{E_{2\tau}^2}{8\pi}. \qquad (52)$$

Используя выражения (51), (52) и учитывая, что $\mu = 0$, для давления электрического поля в первом порядке малости найдем

$$P_E^0 = \frac{Q^2}{8\pi}; P_E \approx \frac{Q^2}{4\pi}\sum_{l,m}\Big[\big(l-1-(l+1)D_l(\sigma,\varepsilon,S)S\big)Z_{lm} + l(l+1)D_l(\sigma,\varepsilon,S)\left[C_{lm}^1 + G(S,\nu)C_{lm}^3\right]\Big]Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(St). \qquad (53)$$

Для записи динамических граничных условий для касательных компонент тензора напряжений необходимо знать электрические части касательных компонент тензора напряжений $(\Pi_{2\Theta} - \Pi_{1\Theta})$ и $(\Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi})$.

Используя соотношения (51), (52) и определение $\Pi_\tau = (\varepsilon/4\pi)E_nE_\tau$, убедимся, что $\Pi_{1\tau_\Theta} \approx \Pi_{2\tau_\varphi} \approx 0$, так как являются величинами второго порядка малости. В результате найдем

$$r = 1+\xi: \quad (\Pi_{2\Theta} - \Pi_{1\Theta}) \approx \frac{Q^2}{4\pi}\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \left[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\right]\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\exp(St); \qquad (54)$$

$$(\Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi}) \approx \frac{Q^2}{4\pi}\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \left[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - lG(S,\nu)C_{lm}^3\right]\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial Y_l^m(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\exp(St). \qquad (55)$$

Получение дисперсионного уравнения

Чтобы удовлетворить динамическим граничным условиям (32)–(34), воспользуемся выражениями для электрических частей касательных компонент тензора напряжений (54), (55) и для добавки к давлению электрических сил P_E (53), а также для добавки к давлению сил поверхностного натяжения P_α [10].

Удовлетворяя граничным условиям, получим два дисперсионных уравнения, соответствующих вихревым тороидальным движениям, описываемым функцией $\Psi_2(\mathbf{r},t)$, и гармоническим и вихревым полоидальным движениям, описываемым функциями $\Psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\Psi_3(\mathbf{r},t)$ [10,11]. В этом несложно убедиться, поскольку граничные условия (32), (33) с учетом выражений (54), (55) после несложных математических преобразований могут быть приведены к виду

$$r = 1: \quad \Delta_\Omega\Big\{\frac{Q^2}{4\pi}\sum_{l,m} D_l(\sigma,\varepsilon,S)\big[SZ_{lm} - lC_{lm}^1 - l\big(q\cdot i_{l+1}(q) + (l+1)\cdot i_l(q)\big)C_{lm}^3\big]Y_l^m(\vartheta,\varphi) - \nu\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_1^0}{r}\right) + \frac{\partial^2\Psi_3^0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}(2+\Delta_\Omega)\Psi_3^0\right]\Big\} = 0; \qquad (56)$$

$$\left\{\frac{\partial\Psi_2^0}{\partial r} - \frac{\Psi_2^0}{r}\right\} = 0; \qquad q \equiv \sqrt{S/\nu}. \qquad (57)$$

В проведенных преобразованиях использовалось то обстоятельство, что

$$\Delta_\Omega = \left(-\hat{\mathbf{N}}_2^+, \hat{\mathbf{N}}_2\right); \qquad n_j^i \neq 0.$$

Для тороидальных движений после подстановки решения (40) в условие (57) получим

$$q\cdot i_{l+1}(q) + (l-1)\cdot i_l(q) = 0. \qquad (58)$$

Решения уравнения (58) представляют однопараметрическое множество декрементов затухания вихревых тороидальных движений жидкости в капле и от удельной электропроводности жидкости не зависят. Иными словами, на вихревые тороидальные движения жидкости в капле эффект релаксации заряда влияния не оказывает.

Дисперсионное уравнение для гармонических и вихревых полоидальных движений получается из условия обращения в нуль определителя системы линейных уравнений относительно коэффициентов Z_{lm}, C_{lm}^1, C_{lm}^3, которая возникает после подстановки решений (39), (40), выражения (53) и давления P_α в граничные условия (31), (34), (56)

$$lC_{lm}^1 + i_l(q)l(l+1)C_{lm}^3 - SZ_{lm} = 0;$$

$$\left[S + 2\nu l(l-1) - 4W\cdot l(l+1)\cdot D_l(\sigma,\varepsilon,S)\right]C_{lm}^1 + l(l+1)\Big[2\nu\big(q\cdot f_l(q) + (l-1)\big) - 4W\cdot D_l(\sigma,\varepsilon,S) \times \big(q\cdot f_l(q) + (l+1)\big)\Big]i_l(q)C_{lm}^3 + \Big[l(l+1) - 2 + 4W\big((l+1)D_l(\sigma,\varepsilon,S)S - (l-1)\big)\Big]Z_{lm} = 0;$$

$$-\Big[\frac{Q^2}{4\pi}D_l(\sigma,\varepsilon,S)l + 2\nu(l-1)\Big]C_{lm}^1 + \bigg[\Big[(l+1)\Big(2\nu(1-l) - \frac{Q^2}{4\pi}D_l(\sigma,\varepsilon,S)\Big) - S\Big]i_l(q) + 2q\Big(\nu - \frac{Q^2}{8\pi}D_l(\sigma,\varepsilon,S)\Big)i_{l+1}(q)\bigg]C_{lm}^3 + 4W\,D_l(\sigma,\varepsilon,S)SZ_{lm} = 0; \qquad (59)$$

$$f_l(q) \equiv i_{l+1}(q)/i_l(q); \qquad W \equiv Q^2/16\pi.$$

Приравняв нулю определитель системы однородных алгебраических уравнений (59) (т.е. удовлетворив требованию их совместности), получим дисперсионное уравнение для гармонических и вихревых полоидальных движений

$$S\left[S^2+l(l-1)(2l+1)\nu S+l(l-1)(l+2-4W)\right]$$
$$+2\sqrt{\frac{S}{\nu}}f_l\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right)\Big\{\left(2lD_l(\sigma,\varepsilon,S)W-\nu\right)$$
$$\times\left[S^2+2l(l-1)(l+2)S\nu+l(l-1)(l+2-4W)\right]$$
$$+8l(l-1)(l^2+1)\nu SWD_l(\sigma,\varepsilon,S)\Big\}+4(l-1)$$
$$\times\Big(S^2\nu-D(l+1)W\left(S^2+(l-1)l(l+2-4W+2S\nu)\right)\Big)$$
$$+\ 2\sqrt{\frac{S}{\nu}}f_l\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\right)\left(4D(l-1)l(l^2+1)SW\nu\right)=0; \qquad (60)$$
$$D_l(\sigma,\varepsilon,S)\equiv\frac{l+1}{4l\left[\pi\sigma+(l+1)(\pi W)^{1/2}b+S\varepsilon\right]+(l+1)S}.$$

Полученное дисперсионное уравнение отличается от приведенных в [4–6] слагаемыми, собранными в двух последних строчках.

Несложно видеть, что при $\nu=0$ и $\varepsilon\to\infty$ (60) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей невязкой жидкости, полученному Рэлеем [12]. Нетрудно видеть, что в этом случае: $S=\pm i\sqrt{l(l-1)[(l+2)-4W]}$. Если $3W<(l+2)$, то S определяет собственные частоты осцилляций поверхности заряженной капли идеальной жидкости. При $4W>(l+1)$ величина S характеризует инкремент экспоненциального нарастания либо декремент экспоненциального затухания решений со временем. Значение $4W=(l+2)$ разделяет устойчивые и неустойчивые решения, т.е. определяет критическую величину имеющегося на капле заряда. Для того чтобы капля стала неустойчивой, достаточно, чтобы условие неустойчивости выполнялось для самой неустойчивой из мод — для второй. Полагая $l=2$ и переходя в определении для W к размерным величинам, для случая идеально проводящей жидкости несложно найти величину заряда капли, критического для начала реализации ее неустойчивости по отношению к давлению электрического поля: $Q\equiv 4\sqrt{\pi\alpha R^3}$.

Влияние релаксации электрического заряда учитывается выражением $D_l(\sigma,\varepsilon,S)$, входящим в дисперсионное уравнение (60), которое при $\sigma\to\infty$ обращается в нуль. При этом перераспределение заряда по поверхности капли при ее деформации происходит мгновенно и эффект релаксации не наблюдается. Из (60) видно, что учет эффекта релаксации электрического заряда приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения из-за появления дополнительного движения жидкости, связанного с волной перераспределяющегося по поверхности заряда. Численный анализ уравнения (60) при $D_l(\sigma,\varepsilon,S)\neq 0$ показывает, что конечность скорости выравнивания потенциала, которая является функцией времени уже из-за тепловых осцилляций капли, приводит как к появлению сильно затухающих зарядово-релаксационных волновых движений, так и к увеличению декрементов затухания обычных капиллярных волн. Причина этого в существовании из-за конечной проводимости сдвига фаз между капиллярной волной и связанной с ней волной перераспределяющегося заряда, представляющей собой систему приповерхностных токов, диссипирующих энергию на джоулево тепловыделение. При заряде, закритическом для реализации неустойчивости Рэлея, увеличение электропроводности жидкости σ приводит к небольшому снижению величины инкремента. Расчеты показывают, что рост проводимости весьма слабо сказывается на декрементах затухания капиллярных осцилляций и полоидальных движений жидкости. Слабо зависит от проводимости и частота капиллярных осцилляций.

Численные расчеты по полному дисперсионному уравнению (60) приводят к зависимостям вещественной и мнимой компонент частоты осцилляций капли от удельной электропроводности жидкости, проиллюстрированным рис. 1–4. Из рисунков видно, что учет эффекта релаксации электрического заряда, независимо от величины вязкости жидкости и величины собственного заряда капли, приводит к появлению апериодической неустойчивости, описываемой на всех рисунках ветвью *1*, величина инкремента которой уменьшается с

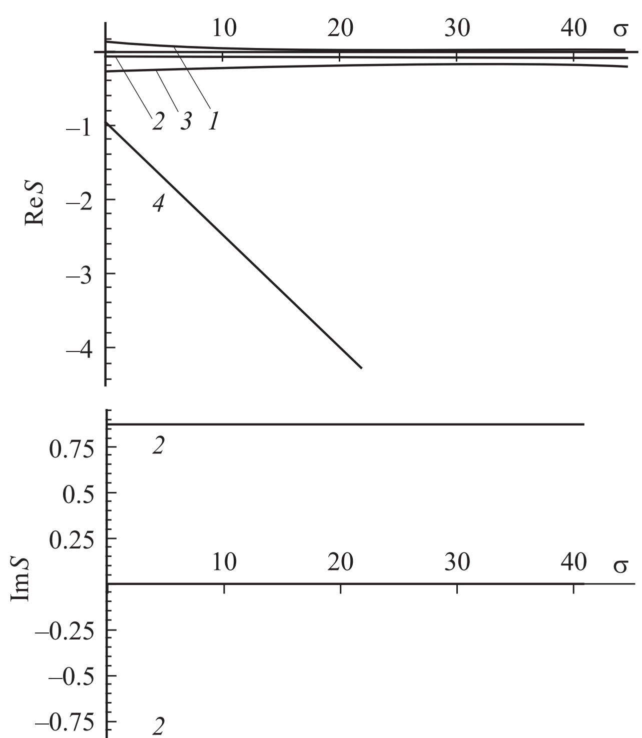

Рис. 1. Зависимости вещественной (a) и мнимой (b) компонент безразмерной частоты от безразмерной проводимости, рассчитанные при $\varepsilon=80$, $b=0.5$, $l=2$. $W=0.9$, $\nu=0.01$.

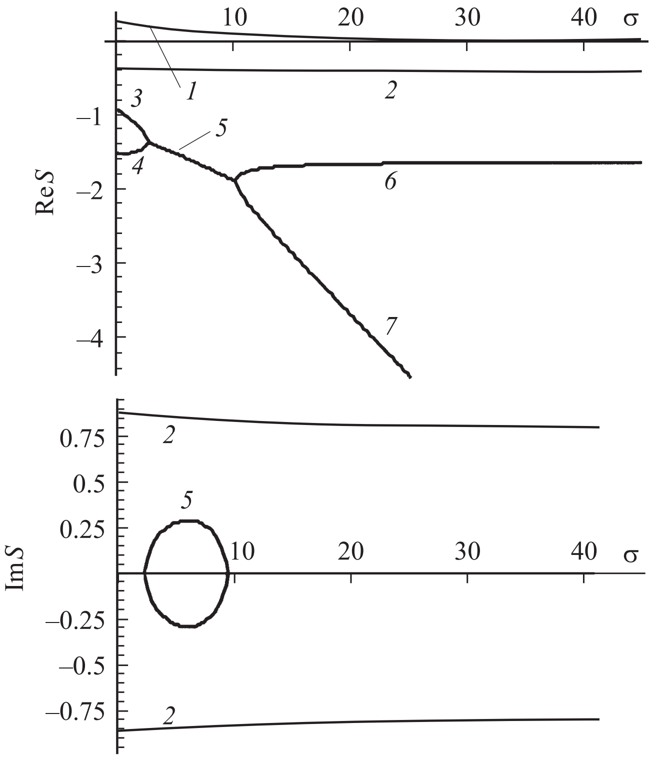

Рис. 2. То же, что на рис. 1; $W = 0.9$, $\nu = 0.1$.

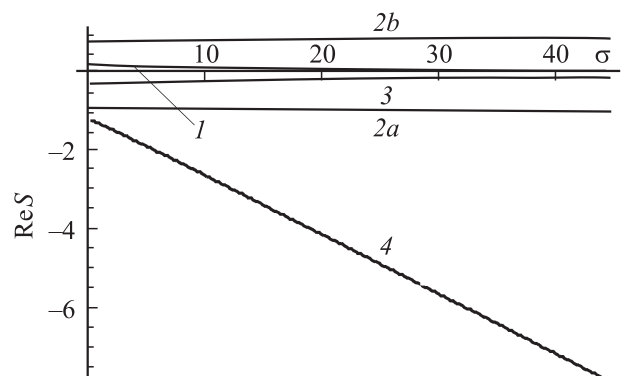

Рис. 3. То же, что на рис. 1; $W = 1.1$, $\nu = 0.01$.

ростом удельной электропроводности, обращаясь в нуль для идеально проводящей жидкости. Физический смысл такой неустойчивости достаточно прозрачен. Носители электрического заряда, направленное движение которых обеспечивает ток, текущий в плохо проводящей жидкости, увлекают за собой за счет передачи импульса направленного движения молекулам жидкости и приводят к появлению течения жидкости в направлении протекания тока, т. е. к выпуклостям на свободной поверхности капли, где в силу перераспределения заряда при деформации капли поверхностная плотность заряда должна расти. Это приводит к появлению дополнительного гидродинамического давления на поверхность жидкости, величина которого увеличивается с ростом локальной средней кривизны поверхности. Этот феномен был ранее описан в работах [13,14]. Очевидно также, что речь может идти лишь о неустойчивости в рамках приближения, линейного по амплитуде деформации свободной поверхности. Как только амплитуда деформации перестанет быть весьма малой по сравнению с радиусом капли, линейная теория перестанет работать, и исследование дальнейшей временной эволюции деформации должно проводиться в рамках нелинейного анализа. Следует также отметить, что качественно сходный тип неустойчивости был обнаружен ранее при линейном анализе устойчивости однородно заряженной плоской поверхности жидкости, по которой распределено поверхностно инактивное вещество [15].

На рис. 1 ветвь *2* описывает капиллярные осцилляции капли, частота и декремент затухания которых весьма слабо зависят от проводимости. Ветвь *3* соответствует затухающему полоидальному вихрю, а ветвь *4* — быстро затухающему с ростом электропроводности течению жидкости, порождаемому релаксационным переносом заряда вдоль поверхности капли.

На рис. 2, построенном при тех же значениях физических параметров, что и рис. 1, но при существенно большей безразмерной вязкости (увеличение безразмерной вязкости жидкости капли может быть достигнуто как увеличением собственно коэффициента вязкости жидкости, так и уменьшением радиуса капли) появляется качественно новое релаксационное движение, описываемое

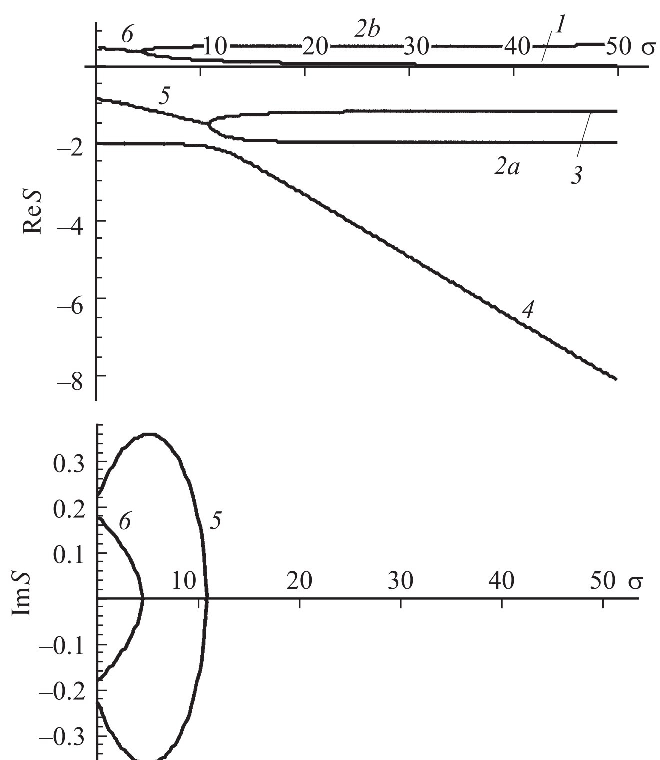

Рис. 4. То же, что на рис. 1; $W = 1.1$, $\nu = 0.1$.

ветвью *5*. Это движение соответствует быстро затухающему периодическому движению (частота в несколько раз меньше декремента затухания), возникающему при взаимодействии полоидального апериодического движения *3* с апериодическим релаксационным движением *4*. Остальные тенденции реализующихся в капле движений остаются теми же, что и на рис. 1.

На рис. 3 и 4 приведены характеристики реализующихся в капле движений жидкости при закритическом по Рэлею заряде капли, когда капиллярные осцилляции основной моды отсутствуют. При малой безразмерной вязкости (рис. 3) в капле реализуются только апериодические движения. Ветвь *1*, как отмечалось выше, соответствует неустойчивым релаксационным движениям жидкости. Ветви *2a* (соответствует затухающим движениям) и *2b* (соответствует экспоненциально нарастающим движениям) образуются из периодического движения *2* на рис. 1 и 2 при переходе параметра Рэлея W через критическое значение $W = 1$. С ростом безразмерной вязкости кроме движений, присутствовавших на рис. 3, появляются два почти периодических движения: ветвь *6* соответствует колебательной неустойчивости, возникающей при взаимодействии неустойчивого релаксационного движения *1* и экспоненциально нарастающего капиллярного движения *2b* (о существовании таких движений жидкости ранее сообщалось в [16,17] как для плоской, так и для сферической равновесной заряженной поверхности жидкости), и затухающего квазипериодического релаксационного движения *5*, возникающего при взаимодействии трех ветвей: релаксационного движения *4*, полоидального движения *3* и ветви затухающих капиллярных движений *2a*.

Заключение

Выведено корректное дисперсионное уравнение для течений жидкости в заряженной капле вязкой несжимаемой жидкости с конечной электропроводностью. Конечность скорости выравнивания электрического потенциала вдоль капли, проявляющаяся в конечности скорости переноса носителей электрического заряда и передачи импульса направленного движения от носителей заряда к нейтральным молекулам жидкости, приводит к появлению дополнительных течений жидкости внутри капли. Релаксационные движения жидкости взаимодействуют как с потенциальными, так и с вихревыми полоидальными движениями, образуя в зависимости от величины собственного заряда капли либо затухающие, либо экспоненциально нарастающие квазипериодические движения жидкости. Влияние конечности скорости перераспределения заряда увеличивается с уменьшением удельной электропроводности жидкости, когда время максвелловской релаксации заряда становится сравнимым с характерными временами реализации капиллярных осцилляций капли. На вихревые тороидальные движения жидкости в капле эффект релаксации заряда влияния в использованном линейном приближении не оказывает.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О, Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* // ЭОМ. 2005. № 3. С. 25–35.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* // ЭОМ. 2005. № 4. С. 24–34.
[4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 34–42.
[6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 67–72.
[7] *Шутов А.А., Шкадов В.Я.* // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 54–66.
[8] *Melcher J.R., Taylor G.I.* // Ann. Rev. Fluid Mech. Palo Alto. California. 1969. Vol. 1. P. 111–146.
[9] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
[10] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
[11] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12–19.
[12] *Rayleigh, Lord* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[13] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 3. С. 538–541.
[14] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 632–641.
[15] *Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 16. С. 26–31.
[16] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 34–41.
[17] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 116–123.